

quatrième série - tome 49 fascicule 3 mai-juin 2016

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Joël BELLAÏCHE

Théorème de Chebotarev et complexité de Littlewood

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Antoine CHAMBERT-LOIR

Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par C. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
de 1918 à 1941 par É. PICARD
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

Comité de rédaction au 1^{er} janvier 2016

N. ANANTHARAMAN I. GALLAGHER
P. BERNARD B. KLEINER
E. BREUILLARD E. KOWALSKI
R. CERF M. MUSTAȚĂ
A. CHAMBERT-LOIR L. SALOFF-COSTE

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Europe : 515 €. Hors Europe : 545 €. Vente au numéro : 77 €.

© 2016 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1^{er} juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 n^{os} / an

THÉORÈME DE CHEBOTAREV ET COMPLEXITÉ DE LITTLEWOOD

PAR JOËL BELLAÏCHE

RÉSUMÉ. – Dans la version effective du théorème de Chebotarev sous l’hypothèse de Riemann généralisée et la conjecture d’Artin (voir le livre d’Iwaniec et Kowalski, *Analytic Number Theory*, § 5.13) apparaît un invariant numérique d’un sous-ensemble D d’un groupe fini G , que nous appelons la *complexité de Littlewood* de D . Nous étudions en détail cet invariant. À l’aide de cette étude, et d’une application du grand crible, nous traitons de manière améliorée deux questions classiques liées à Chebotarev: celle de prouver une majoration du plus petit nombre premier d’un ensemble frobenien, et celle de donner une estimation asymptotique du nombre de nombres premiers ayant des Frobenius donnés dans une famille d’extensions galoisiennes. Nous donnons ensuite des applications concrètes de ces résultats au problème de la factorisation des polynômes à coefficients entiers modulo un nombre premier p , à la conjecture de Lang-Trotter pour les surfaces abéliennes, et à la conjecture de Koblitz, obtenant dans chacun de ces cas des estimations meilleures que celles qu’on trouve dans la littérature.

ABSTRACT. – The effective version of Chebotarev’s density theorem under the Generalized Riemann Hypothesis and the Artin conjecture (cf. Iwaniec and Kowalski’s *Analytic Number Theory*, § 5.13) involves a numerical invariant of a subset D of a finite group G that we call the Littlewood Complexity of D . We study this invariant in detail. Using this study, and an application of the large sieve, we give improved versions of two standard problems related to Chebotarev: the bound on the first prime in a Frobenian set, and the asymptotics of the set of primes with given Frobenius in an infinite family of Galois extensions. We then give concrete applications to the problem of the factorization of an integral polynomial modulo primes, to the Lang-Trotter conjecture for abelian surfaces, and to the conjecture of Koblitz, with in all three cases better bounds that previously known.

1. Introduction

1.1. Objectifs

Sous l’hypothèse de Riemann généralisée pour les fonctions L d’Artin, que nous noterons comme d’habitude GRH, et sous la conjecture d’Artin, le théorème de Chebotarev admet

une preuve simple et naturelle et une forme effective élégante et forte (cf. [11, page 143])⁽¹⁾, mais qui n'a semble-t-il jamais encore été utilisée. Cette forme effective fait apparaître un invariant d'un sous-ensemble invariant par conjugaison D d'un groupe fini G que nous appelons sa *complexité de Littlewood* $\lambda_G(D)$. Le but de cet article est de commencer une étude détaillée de cet invariant, de prouver un certain nombre de corollaires de ce théorème de Chebotarev et de donner des applications arithmétiques « concrètes » de ces résultats concernant le plus petit nombre premier modulo lequel un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible fixé a une racine (ou bien a au moins deux racines, ou n'en a aucune, ou encore reste irréductible... On pourrait multiplier les variantes, la méthode étant très générale) et la conjecture de Lang-Trotter pour les courbes elliptiques et ses généralisations, notamment aux courbes de genre $g > 1$ et aux variétés abéliennes (cette seconde application combinant l'emploi du théorème de Chebotarev effectif et du grand crible).

Ces résultats se divisent en trois familles, qui sont les suivantes : premièrement le théorème de Chebotarev proprement dit (i.e., concernant la densité des nombres premiers dont le Frobenius dans une extension finie de \mathbb{Q} de groupe de Galois G est dans un certain ensemble invariant par conjugaison $D \subset G$) et les propriétés de la complexité de Littlewood $\lambda_G(D)$; deuxièmement les théorèmes permettant de majorer le plus petit nombre premier dont le Frobenius dans G appartient à D ; troisièmement, les généralisations du théorème de Chebotarev au cas d'une extension infinie, ou d'un système infini d'extensions — ce sont ces généralisations qui sont utiles pour la conjecture de Lang-Trotter par exemple. Dans le reste de cette introduction, nous discutons en détail ces trois familles de résultats et les idées qui les sous-tendent.

1.2. Le théorème de Chebotarev et la complexité de Littlewood

Soit L une extension finie galoisienne⁽²⁾ de \mathbb{Q} de groupe de Galois G . Soit M le produit des nombres premiers ramifiés dans L . Pour p un nombre premier ne divisant pas M , on note Frob_p , (ou $\text{Frob}_{p,G}$ quand il y a une ambiguïté sur l'extension considérée) la classe de conjugaison de l'élément de Frobenius associé à p dans G . Pour f une fonction centrale (i.e., invariante par conjugaison) sur G à valeurs complexes, posons

$$\pi(f, x) = \sum_{p < x, p \nmid M} f(\text{Frob}_p).$$

Associons à f deux invariants : le premier,

$$\mu(f) = \mu_G(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$$

⁽¹⁾ La preuve de cette forme du théorème de Chebotarev apparaît pour la première fois dans l'article [19] de Murty, Murty, et Saradha, et est reprise dans le livre [18] de Murty et Murty mais dans les deux cas le résultat n'est énoncé que sous une forme affaiblie. La forme forte du théorème est énoncée et prouvée par Iwaniec et Kowalski dans leur livre [11]. Il y est également affirmé qu'on peut prouver le même résultat sans supposer la conjecture d'Artin, mais cette affirmation est erronée, comme E. Kowalski me l'a confirmé.

⁽²⁾ Pour ne pas alourdir les notations, nous ne considérons dans cet article que des extensions de corps de nombres dont le corps de base est \mathbb{Q} . Il est en principe toujours possible de se ramener à ce cas.

est simplement la valeur moyenne de f . Le second est

$$(1) \quad \lambda(f) = \lambda_G(f) = \sum_{\pi} |\hat{f}(\pi)| \dim \pi,$$

où π parcourt l'ensemble \widehat{G} des classes d'équivalences de représentations complexes irréductibles de G , et $\hat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ est la *transformée de Fourier* de f , définie par $\hat{f}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_g \text{tr } f(g)\pi(g^{-1})$. Nous appellerons $\lambda(f)$ la *norme de Littlewood* de f .

L'ensemble des représentations irréductibles π de G telles que $\hat{f}(\pi) \neq 0$ est appelé *support spectral* de f . Comme d'habitude $\text{Li}(x)$ est le logarithme intégral : $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$.

THÉORÈME 1 (Chebotarev effectif). – *Supposons vraies GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin associées aux représentations irréductibles de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qui appartiennent au support spectral de f . Il existe une constante absolue $c_1 > 0$ telle que pour $x \geq 3$, on ait :*

$$(2) \quad |\pi(f, x) - \mu(f)\text{Li}(x)| < c_1 x^{1/2} \lambda(f)(\log x + \log M + \log |G|).$$

Comme cet énoncé diffère, quoique très légèrement, de la forme donnée dans [11], nous expliquons comment le déduire en § 4.1.

Le cas le plus important est celui où f est la fonction indicatrice $\mathbf{1}_D$ d'un sous-ensemble D de G invariant par conjugaison. On note alors $\pi(D, x)$ pour $\pi(f, x)$, et ce nombre est le nombre d'éléments plus petits que x de l'ensemble \tilde{D} des nombres premiers p ne divisant pas M tels que $\text{Frob}_p \in D$. Un ensemble de la forme \tilde{D} sera appelé un ensemble *frobénien*. Nous noterons $\lambda(D)$ pour $\lambda(\mathbf{1}_D)$, et nous appellerons ce nombre réel positif la *complexité de Littlewood* de D . De la même façon, on appellera *support spectral* de D le support spectral de $\mathbf{1}_D$. On a évidemment $\mu(D) = \frac{|D|}{|G|}$ si bien que le théorème de Chebotarev effectif ci-dessus prend la forme :

THÉORÈME 2. – *Supposons vraies GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin associées aux représentations irréductibles de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qui appartiennent au support spectral de D . Pour $x \geq 3$,*

$$(3) \quad \left| \pi(D, x) - \frac{|D|}{|G|} \text{Li}(x) \right| < c_1 x^{1/2} \lambda(D)(\log x + \log M + \log |G|).$$

Comme nous l'avons dit, cette forme précise du théorème de Chebotarev effectif n'a à notre connaissance pas été utilisée jusqu'ici (mentionnons tout de même que dans le livre [14] de Kowalski, une variante pour L/\mathbb{Q} remplacée par une extension de corps de fonctions l'est). En revanche, des formes affaiblies de ce résultat ont souvent été utilisées, à savoir celles qu'on obtient en remplaçant $\lambda(D)$ par $|D|$, ce qui revient à appliquer la majoration triviale $\lambda(D) \leq |D|$ — c'est le théorème employé par exemple dans [23], qui est une légère amélioration du théorème de Lagarias et Odlyzko, [15], que nous appellerons ici *la version de Lagarias-Odlyzko-Serre*, ou bien $\lambda(D)$ par $\sqrt{|D|}$ (ce qui revient à appliquer la majoration dite « de Cauchy-Schwarz » $\lambda(D) \leq \sqrt{|D|}$) — c'est le théorème employé par exemple dans [19] et [18], que nous appellerons *la version de Murty-Murty-Saradha*.

Pour obtenir une application du théorème de Chebotarev effectif ci-dessus qui ne soit pas directement conséquence de la version de Murty-Murty-Saradha, il faut donc, dans des cas particuliers intéressants, prouver une meilleure majoration de $\lambda(D)$ que la borne

$\sqrt{|D|}$. Dans la plupart des applications, on travaille avec une famille $(L_\nu)_{\nu \geq 1}$ de corps de nombres galoisiens sur \mathbb{Q} de groupes de Galois G_ν , dont l'ordre $|G_\nu|$ tend vers l'infini, et avec une famille de sous-ensembles D_ν de G_ν invariants par conjugaison, et il importe d'obtenir une majoration de $\lambda(D_\nu)$ qui soit *asymptotiquement* meilleure que la majoration $\lambda(D_\nu) \leq |D_\nu|^{1/2}$, par exemple une majoration de la forme $\lambda(D_\nu) \leq |D_\nu|^\alpha$ avec $\alpha < 1/2$. Afin d'aider à l'obtention de telles majorations, nous développons une « boîte à outils » permettant de manipuler cet invariant $\lambda(D)$ (et plus généralement $\lambda(f)$). Certains de ces outils sont des transpositions de techniques utilisées par Serre dans [23] ou par Murty-Murty-Saradha dans [19] pour obtenir de meilleurs résultats que ce qu'ils obtiendraient par une application directe de leurs versions respectives du théorème de Chebotarev. Cependant, alors que pour Serre et Murty-Murty-Saradha ces techniques supposaient de changer, souvent plusieurs fois, l'extension de corps de nombres considérée et de traduire, de manière parfois un peu délicate, les résultats pour une extension en termes d'une autre, elles deviennent dans le langage de la complexité de Littlewood des lemmes élémentaires sur les représentations des groupes finis. Ainsi, la complexité de Littlewood permet non seulement d'obtenir de meilleurs résultats que ceux de [23] et [19] par exemple, mais aussi de retrouver plus simplement les leurs.

Quand la table des caractères d'un groupe fini G est connue, on peut en théorie calculer la complexité de Littlewood $\lambda_G(D)$ de n'importe quel ensemble invariant par conjugaison D , et la comparer avec la majoration de Cauchy-Schwarz $\sqrt{|D|}$. La table des caractères est connue dans plusieurs cas particulièrement importants dans les applications : celui où G est abélien, celui où G est le groupe symétrique S_n , pour lequel on dispose d'une description combinatoire de la table des caractères, ou encore celui où G est un groupe fini de type de Lie, où la théorie de Deligne-Lusztig et les travaux subséquents de Lusztig donnent une description complète des caractères. « En théorie » seulement, car le calcul se révèle souvent extrêmement difficile, même dans le cas abélien. Nous donnons dans cet article un certain nombre de tels calculs : dérangements dans S_n , matrices de traces fixées dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$ ou dans $\mathrm{GSP}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Comme cette liste le suggère, il reste beaucoup à faire, en particulier une étude systématique en utilisant la théorie de Deligne-Lusztig de la complexité de Littlewood de l'ensemble des matrices de trace donnée dans un sous-groupe de type de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$.

Notons par ailleurs qu'il n'est pas difficile de voir (cf. §2.1) que $\lambda(f)$ est égale à la *norme d'algèbre* $\|f\|_{A(G)}$ de f , une notion introduite par Pierre Eymard en 1964 pour une fonction f sur un groupe localement compact ([7]), et bien plus ancienne dans le cas d'un groupe abélien localement compact G , puisque dans ce cas $\|f\|_{A(G)}$ est la norme L^1 de la transformée de Fourier \hat{f} de f . Que cette notion, fondamentale en analyse harmonique, soit importante en arithmétique est évident depuis les travaux de Hardy et Littlewood. Rappelons à ce sujet la conjecture de Littlewood (d'où les noms « norme de Littlewood », et « complexité de Littlewood ») selon laquelle, pour D un sous-ensemble fini de $G = \mathbb{Z}$, on a $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)} \gg \log |D|$. La conjecture de Littlewood (maintenant un théorème) a fait l'objet de nombreuses recherches et généralisations, notamment aux cas des groupes abéliens localement compacts. Tout récemment, sa généralisation au cas d'un groupe fini non nécessairement abélien (c'est-à-dire au cas que nous considérons ici) a fait l'objet d'un article de Tom Sanders [20]. Puisque pour la conjecture de Littlewood et ses variantes, on cherche à minorer $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)}$, tandis que nous cherchons au contraire ici à le majorer,

nos résultats sont essentiellement disjoints, et en fait, complémentaires, de ceux de [20]. Notons qu'il ne semble pas que les applications au théorème de Chebotarev fassent partie des motivations de Tom Sanders.

1.3. Le plus petit nombre premier p tel que $\text{Frob}_p \in D$ et l'invariant $\varphi_G(D)$

On reprend les notations du paragraphe précédent : L/\mathbb{Q} une extension galoisienne finie de groupe de Galois G , ramifiée exactement aux diviseurs premiers de M , et $D \subset G$ un sous-ensemble stable par conjugaison. A ces données on attache l'ensemble frobenien \tilde{D} des nombres premiers p ne divisant pas M tels que $\text{Frob}_{p,G} \in D$. On considère le problème consistant à *majorer le plus petit nombre premier p de l'ensemble frobenien \tilde{D}* .

Notons tout d'abord qu'on obtient une telle majoration comme un corollaire direct du théorème de Chebotarev effectif (3) : dès que x est assez grand pour que le terme principal $\frac{|D|}{|G|}\text{Li}x$ soit supérieur à la valeur absolue du terme d'erreur, par exemple dès que $x/\log^2 x > c_2 \left(\frac{|D|\lambda(D)}{|G|}(\log M + \log |G|) \right)^2$, on sait évidemment qu'il existe un $p \leq x$ appartenant à \tilde{D} . La même méthode permet bien entendu d'obtenir une majoration du plus petit p de \tilde{D} en partant de la version de Lagarias-Odlyzko-Serre, ou de celle de Murty-Murty-Saradha du théorème, et la majoration que nous venons d'obtenir est meilleure exactement dans les mêmes circonstances, discutées plus haut, que le théorème 2 est meilleur que les autres versions.

En fait, dans la version de Lagarias-Odlyzko de la majoration du plus petit nombre premier de \tilde{D} (cf. [23, Théorème 5] et la remarque qui le suit), comme dans celle de Murty-Murty-Saradha, et dans celle donnée ci-dessus une astuce permet d'améliorer le facteur logarithmique de la borne obtenue. C'est un détail, que nous ne discuterons pas plus dans cette introduction.

Il y a en revanche une possibilité d'amélioration bien plus importante, basée sur l'idée très simple suivante : au lieu d'utiliser l'estimation (3) de $\pi(D, x)$, on peut utiliser l'estimation (2) de $\pi(f, x)$ pour une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ centrale adéquate. Par adéquate, nous voulons dire que la moyenne $\mu_G(f)$ est strictement positive et que f ne prend aucune valeur strictement positive en dehors de D . Ainsi, dès que x est suffisamment grand pour que le terme principal $\mu_G(f)\text{Li}(x)$ de (2) soit supérieur à la valeur absolue du terme d'erreur de (2), on sait qu'il existe un $p \leq x$ tel que $f(\text{Frob}_p) > 0$, donc tel que $p \in \tilde{D}$. On peut alors rechercher, parmi toutes les fonctions f adéquates celle qui donne de cette manière la meilleure borne sur p . Cette idée conduit à définir l'invariant suivant.

DÉFINITION 1. – Soit D un sous-ensemble non vide stable par conjugaison de G . Nous noterons

$$\varphi_G(D) = \inf_f \frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)},$$

quand f parcourt l'ensemble des fonctions sur G à valeurs réelles, qui satisfont les deux conditions suivantes

- (a) si $f(g) > 0$, alors $g \in D$.
- (b) $\mu_G(f) > 0$.

Cet invariant $\varphi_G(D)$ s'avère beaucoup plus difficile à étudier que $\lambda_G(D)$. On a évidemment

$$(4) \quad \varphi_G(D) \leq \lambda_G(D)|G|/|D|$$

car $f = \mathbf{1}_D$ satisfait (a) et (b), mais nous verrons des cas intéressants où cette inégalité est loin d'être une égalité. Nous montrerons, suivant l'idée esquissée ci-dessus :

THÉORÈME 3. – *Pour toute extension finie galoisienne L/\mathbb{Q} , $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, $D \subset G$ non vide et invariant par conjugaison, $M = \prod_p \text{ramifié dans } L \text{ } p$ comme ci-dessus, supposant GRH et la conjecture d'Artin vraies pour les fonctions L d'Artin attachées aux représentations de G , le plus petit nombre premier p de \tilde{D} vérifie :*

$$p < c_3 \varphi_G(D)^2 \log^2 M,$$

où c_3 est une constante absolue.

Bien entendu, on aurait pu utiliser la même idée (utiliser $\pi(f, x)$ au lieu de $\pi(D, x)$ pour une fonction f bien choisie) pour obtenir une majoration du plus petit nombre premier de \tilde{D} en utilisant, au lieu de (2) la version de Murty-Murty-Saradha (resp. de Lagarias-Odlyzko-Serre) de cette estimation, i.e., celle qu'on obtient en remplaçant $\lambda_G(f)$ par $\|f\|_2$, resp. $\|f\|_1$. Cependant, cette plus grande généralité ne donnerait pas un résultat meilleur, la fonction f la mieux choisie étant dans ce cas toujours $\mathbf{1}_D$ (cf. remarque 16 ci-dessous). Autrement dit, c'est la souplesse que donne l'emploi de la norme de Littlewood qui permet de choisir un f meilleur que $\mathbf{1}_D$. Insistons sur le fait que la borne du théorème 3 peut être meilleure que celle obtenue par Murty-Murty-Saradha (et a fortiori, celle obtenue par Lagarias-Odlyzko) pour deux raisons : parce que $\lambda_G(D)$ peut être strictement plus petit que $\sqrt{|D|}$ d'une part, et parce que $\varphi_G(f)$ peut être plus petit que $\lambda_G(D)|G|/|D|$, autrement dit que la borne inférieure définissant $\varphi_G(D)$ n'est pas atteinte par $\mathbf{1}_D$. Parfois ces deux raisons se cumulent, comme dans les calculs menant à l'application suivante.

THÉORÈME 4. – *Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers, irréductible, de degré $n \geq 1$. Soit M le produit des nombres premiers divisant le discriminant de P . Supposons GRH et la conjecture d'Artin vraies pour les fonctions L d'Artin attachées au corps de décomposition de P . Alors, il existe un nombre premier $p < 4c_3(n^2 + n)^2(\log M + n \log n)^2$ ne divisant pas M tel que le polynôme $P(X) \pmod{p}$ n'admette aucune racine dans \mathbb{F}_p .*

La borne qu'on obtiendrait avec la version de Murty-Murty-Saradha ou de Lagarias-Odlyzko serait super-exponentielle en n , au lieu de polynomiale. Pour d'autres applications du même genre, voir § 5.1

1.4. Cas des extensions infinies, ou des systèmes infinis d'extensions

Souvent on est amené à considérer une extension L/\mathbb{Q} algébrique infinie de groupe de Galois G , non ramifiée en dehors des nombres premiers divisant un entier $M \geq 1$ fixé. Si D est une partie fermée de G , le problème de déterminer un équivalent de $\pi(D, x)$ (le nombre de $p < x$, $p \nmid M$ tels que $\text{Frob}_{p,G} \in D$) s'avère beaucoup plus délicat que dans le cas d'une extension finie (sauf bien sûr si D est à la fois fermée et ouverte, où l'on se ramène facilement au cas d'une extension finie). Comme Serre l'a montré dans [23], le théorème de Chebotarev effectif (appliqué à des sous-extensions finies L_ν de \mathbb{Q} , de groupes de Galois G_ν , avec $G = \varprojlim G_\nu$) permet néanmoins de montrer des majorations non triviales

de $\pi(D, x)$. Une variante de la situation précédente est celle où l'on part dès le début d'un système d'extensions galoisiennes L_ν/\mathbb{Q} (finies ou non) de groupes de Galois G_ν , et qu'étant données des $D_\nu \subset G_\nu$ on s'intéresse au nombre $\pi(D, x)$ de nombres premiers $p < x$ tels que $\text{Frob}_{p, G_\nu} \in D_\nu$ pour tout ν . La méthode de Serre s'applique également à ce cas, voir par exemple [19]. On peut aussi, comme l'a fait plus récemment Zywinina ([26], voir aussi [14]), appliquer la méthode du grand crible pour obtenir des majorations de $\pi(D, x)$ qui sont parfois meilleures que celles obtenues par la méthode de Serre.

Dans cet article, nous montrons comment combiner aux méthodes de Serre et de Zywinina notre version avec complexité de Littlewood du théorème de Chebotarev. Si ce travail est assez facile pour la méthode de Serre, il nous faut modifier le crible utilisé par Zywinina afin de pouvoir y incorporer la complexité de Littlewood. Nous renvoyons au § 4.3 pour les énoncés, qui sont un peu techniques. Dans la dernière partie, nous donnons des applications de ces résultats à la conjecture de Lang-Trotter pour les surfaces abéliennes, et à la conjecture de Koblitz, qui sont meilleures que celles obtenues précédemment dans la littérature.

Notations. – Dans tout l'article, les nombres c_1, c_2, c_3 , etc. sont des constantes positives. Ce sont des constantes absolues, sauf mentions explicites du contraire qui resteront assez rares et préciseront alors de quoi elles dépendent. On emploie la notation de Landau telle que celui-ci et ensuite Bourbaki l'employaient : si $f(x)$ et $g(x) > 0$ sont deux fonctions d'une variable x définies sur une partie P non majorée de \mathbb{R} , $f(x) = O(g(x))$ s'il existe une constante A et une constante $C > 0$ telles que pour tout $x \in P$, $x \geq A \implies |f(x)| < Cg(x)$. Quand $f(x)$ et $g(x)$ dépendent de paramètres autres que x , les constantes A et C peuvent en dépendre aussi. On utilise les notations $f(x) \ll g(x)$ ou $g(x) \gg f(x)$ pour dire que $f(x) < Cg(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f et g où $C > 0$ est une constante qui peut dépendre des paramètres (mais pas de x). On note $f(x) \asymp g(x)$ pour dire que $f(x) \ll g(x)$ et $f(x) \gg g(x)$.

Remerciements. – Je tiens à remercier en tout premier lieu la communauté du forum `mathoverflow`. J'y ai posé durant la rédaction de cet article de nombreuses questions, dont les réponses (ainsi parfois que les réponses à des questions posées par d'autres) m'ont donné des références, des idées, parfois mêmes des preuves, que j'ai utilisées (dans ce dernier cas, les preuves sont attribuées nommément ci-dessous à leur auteur sur `mathoverflow`). Je remercie également l'université de Yale, qui m'a accueilli pendant la rédaction de cet article, et où j'ai baigné dans une ambiance beaucoup plus « théorie analytique des nombres » que celle, plus orientée « théorie algébrique des nombres », dont je bénéficie habituellement à Boston. Ce travail a été motivé en premier lieu par (et sera appliqué ultérieurement à) des questions concernant les formes modulaires modulo 2 et la fonction de partition : c'est grâce à Jean-Louis Nicolas et Jean-Pierre Serre que je me suis intéressé au sujet. Je les en remercie ici. Je remercie Emmanuel Kowalski pour d'intéressantes conversations et pour avoir attiré mon attention sur son livre [14], ainsi qu'Ivan Marin. Je tiens à remercier tout particulièrement David Zywinina et Lucile Devin, qui m'ont signalé chacun une erreur sérieuse dans l'application de la méthode du crible dans une version antérieure de cet article. Enfin, je suis très reconnaissant au relecteur anonyme pour sa lecture attentive et ses nombreuses suggestions.

Pendant l'élaboration de cet article, j'ai bénéficié du soutien de la NSF (grant DMS 1101615).

2. La norme de Littlewood $\lambda(f)$ et la complexité de Littlewood $\lambda(D)$

2.1. Égalité avec la norme d'algèbre $\|f\|_{A(G)}$

2.1.1. *Rappel : la norme d'algèbre pour un groupe localement compact, d'après Eymard ([7])*

Dans ce paragraphe, nous ne supposons pas que G est fini, mais que G est un groupe localement compact, muni d'une mesure de Haar μ_G invariante à gauche, ce qui permet de parler des espaces $L^1(G)$ et $L^2(G)$, munis de leur normes naturelles que nous noterons $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ et, en ce qui concerne $L^2(G)$, du produit hermitien noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ainsi que de la représentation régulière gauche L de G sur $L^2(G) : L(x)(f)(y) = f(xy)$.

Pour toute fonction $f \in L^1(G)$, et toute représentation unitaire π de G sur un espace de Hilbert V , on définit l'opérateur continu $\pi(f)$ de V par la formule usuelle :

$$\pi(f)(v) = \int_G f(x)\pi(x)(v)d\mu_G(x).$$

En particulier, on dispose pour $f \in L^1(G)$ d'un opérateur continu $L(f)$ sur $L^2(G)$, qui n'est autre que la convolution à gauche par f . On notera $\|L(f)\|$ la norme d'opérateur de $L(f)$.

DÉFINITION 2. – Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. On définit la quantité $\|f\|_{A(G)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, qu'on appellera la *norme d'algèbre* de f , par

$$\|f\|_{A(G)} = \sup_{g \in L^2(G), \|L(g)\| \leq 1} \langle f, g \rangle.$$

Notons que la borne supérieure définissant $\|f\|_{A(G)}$ peut être infinie : c'est le cas par exemple si $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et f est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1/2]$. Par ailleurs, $\|f\|_{A(G)}$ est indépendant du choix de la mesure de Haar (contrairement à $\|f\|_1$, $\|f\|_2$, $L(f)$, $\langle f, g \rangle$, $\|L(f)\|$ qui sont homogènes de degré 1, 1/2, 1, 1 et 1 en la mesure de Haar choisie).

2.1.2. *Comparaison avec la norme de Littlewood dans le cas d'une fonction centrale sur un groupe fini.* – Dans ce paragraphe, G est un groupe fini muni d'une mesure de Haar μ_G que nous choisissons de normaliser en demandant que $\mu_G(G) = 1$. C'est la normalisation qui revient à voir le groupe compact et discret G comme un groupe compact plutôt que discret, point de vue qui sera le seul naturel quand dans nos applications G sera un groupe de Galois. (Cependant, certaines formules concernant la norme de Littlewood ci-dessous seraient légèrement plus simples si l'on adoptait le point de vue G discret, avec une mesure de Haar où chaque élément est de mesure 1.)

Avec cette mesure de Haar, si $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions, on a $\|f\|_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|$, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)}g(x)$, $\pi(f) = \frac{1}{|G|} \sum_x f(x)\pi(x)$ pour $\pi \in \widehat{G}$, où \widehat{G} est comme dans l'introduction le dual de G , i.e., l'ensemble des classe d'isomorphie des représentations complexes irréductibles de G . On notera f^* la fonction définie par $f^*(x) = f(x^{-1})$ si bien que $\pi(f^*)$ est l'adjoint $\pi(f)^*$ de $\pi(f)$.

Rappelons qu'on a défini dans l'introduction, pour $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction centrale, la transformée de Fourier $\hat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule $\hat{f}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\text{tr } \pi(x^{-1})$ si bien

qu'on a également $\hat{f}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\text{tr } \pi(x)} = \langle \chi_\pi, f \rangle$ où χ_π est le caractère de π , ou encore $\hat{f}(\pi) = \text{tr } \pi(f^*)$. La fonction \hat{f} satisfait la formule $f = \sum_{\pi \in \hat{G}} \hat{f}(\pi) \chi_\pi$. Rappelons finalement qu'on a défini la norme de Littlewood de f par la formule

$$\lambda_G(f) = \sum_{\pi \in \hat{G}} |\hat{f}(\pi)| \dim \pi.$$

THÉORÈME 5. – Soit G un groupe fini, et $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction centrale. Alors

$$\|f\|_{A(G)} = \lambda_G(f).$$

Démonstration. – Nous utilisons le lemme 5.2 de [20] qui fait le gros du travail. Ce lemme affirme (pour toute fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, non nécessairement centrale) que $\|f\|_{A(G)} = \sum_{i=1}^{|G|^2} s_i$, où $s_1, s_2, \dots, s_{|G|^2}$ sont les valeurs singulières de l'opérateur $L(f)$, c'est-à-dire les racines carrées des valeurs propres (répétées selon leur multiplicité comme zéros du polynôme caractéristique) de $L(f)^* L(f)$, où $L(f)^* = L(f^*)$ est l'adjoint de $L(f)$.

Si f est centrale, et π une représentation irréductible de G , l'opérateur $\pi(f)$ commute à $\pi(g)$ pour tout $g \in G$, donc est la multiplication par un scalaire d'après le lemme de Schur. Ce scalaire est évidemment $\text{tr } \pi(f) / \dim \pi = \langle \chi_\pi, f \rangle / \dim \pi$. De même $\pi(f^*)$ est l'opérateur scalaire $\langle \chi_\pi, f \rangle / \dim \pi$.

Comme la représentation régulière est la somme directe, pour $\pi \in \hat{G}$, de $\dim \pi$ copies de la représentation π , l'opérateur $L(f)L(f)^* = L(f)L(f^*)$ est la somme directe pour $\pi \in \hat{G}$ de $\dim \pi$ copies de l'opérateur scalaire $\langle \chi_\pi, f^* \rangle \langle \chi_\pi, f \rangle / (\dim \pi)^2 = |\langle \chi_\pi, f \rangle|^2 / (\dim \pi)^2$ sur l'espace de π . Les valeurs propres de $L(f)L(f)^*$ sont donc les valeurs $|\langle \chi_\pi, f \rangle|^2 / (\dim \pi)^2$ pour $\pi \in \hat{G}$ chacune avec la multiplicité $(\dim \pi)^2$ (un facteur $\dim \pi$ parce qu'un opérateur scalaire sur un espace de dimension π a $\dim \pi$ fois la même valeur propre, et un facteur $\dim \pi$ puisque la représentation π apparaît $\dim \pi$ fois). Les valeurs spectrales de L_f sont les racines carrées des précédentes, à savoir les $|\langle \chi_\pi, f \rangle| / \dim \pi$ avec multiplicité $(\dim \pi)^2$. Il vient donc

$$\|f\|_{A(G)} = \sum_{\pi \in \hat{G}} \dim \pi |\langle \chi_\pi, f \rangle|,$$

ce qui est exactement la définition de $\lambda_G(f)$. □

2.2. Propriétés élémentaires de la norme et de la complexité de Littlewood

Dans toute cette partie, G est un groupe fini, muni de sa mesure de Haar μ_G de masse totale 1, et nous développons les sorites concernant la norme de Littlewood d'une fonction centrale sur G . Un certain nombre de ces résultats gardent un sens et restent vrais dans le cadre plus général de la norme d'algèbre d'une fonction quelconque sur G . Quand c'est le cas, nous donnons le plus souvent deux preuves : une, générale, valable pour la norme d'algèbre d'une fonction quelconque (c'est parfois une simple référence à [20]) et une autre, plus concrète et utilisant la théorie des représentations de G , valable pour la norme de Littlewood d'une fonction centrale (seul cas dont nous aurons besoin dans cet article).

2.2.1. *Propriétés algébriques*

PROPOSITION 1. – $\|\cdot\|_{A(G)}$ est une norme sur l'espace des fonctions de G dans \mathbb{C} . En particulier, λ_G est une norme sur l'espace des fonctions centrales de G dans \mathbb{C} .

C'est évident.

COROLLAIRE 1. – Si D_1 et D_2 sont deux sous-ensembles de G invariants par conjugaison,

$$\lambda(D_1 \cup D_2) \leq \lambda(D_1) + \lambda(D_2) + \lambda(D_1 \cap D_2).$$

Si D_1 et D_2 sont disjoints,

$$|\lambda(D_1) - \lambda(D_2)| \leq \lambda(D_1 \cup D_2) \leq \lambda(D_1) + \lambda(D_2).$$

Démonstration. – En effet, on a sous ces hypothèses $\mathbf{1}_{D_1 \cup D_2} = \mathbf{1}_{D_1} + \mathbf{1}_{D_2} - \mathbf{1}_{D_1 \cap D_2}$, d'où la première assertion. En particulier, si D_1 et D_2 sont disjoints, $\mathbf{1}_{D_1 \cup D_2} = \mathbf{1}_{D_1} + \mathbf{1}_{D_2}$, d'où la seconde. \square

REMARQUE 1. – Notons qu'on n'a pas en général égalité $\lambda(D_1 \cup D_2) = \lambda(D_1) + \lambda(D_2)$ si D_1 et D_2 sont disjoints. On a en revanche évidemment cette égalité quand D_1 et D_2 sont disjoints et de *support spectral* disjoints.

COROLLAIRE 2. – Si D est un sous-ensemble de G invariant par conjugaison, $\lambda(D) - 1 \leq \lambda(G - D) \leq \lambda(D) + 1$.

Démonstration. – On a $\lambda(G) = 1$ puisque $\widehat{\mathbf{1}}_G(\pi) = 0$ sauf si π est la représentation triviale, auquel cas $\widehat{\mathbf{1}}_G(\pi) = 1$. On applique alors le corollaire précédent à $D_1 = D$, $D_2 = G - D$. \square

PROPOSITION 2. – La norme $\|\cdot\|_{A(G)}$ est invariante par automorphismes, anti-automorphismes et par translations de G . En particulier, si $\sigma : G \rightarrow G$ est soit un automorphisme de groupe, soit un anti-automorphisme, soit de la forme $x \mapsto zx$ pour z fixé dans le centre $Z(G)$ de G , et si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est centrale, alors $\lambda(f) = \lambda(f \circ \sigma)$, et si $D \subset G$ est invariant par conjugaison, $\lambda(\sigma(D)) = \lambda(D)$.

Démonstration. – C'est évident sur la définition de $\|f\|_{A(G)}$. Voici une preuve directe du cas particulier concernant la norme de Littlewood d'une fonction centrale : si ψ est un automorphisme, ou un anti-automorphisme de G c'est trivial, et si ψ est la multiplication par $z \in Z(G)$, il suffit de remarquer que pour tout $\pi \in \widehat{G}$, $\pi(z)$ est un scalaire par le lemme de Schur, et une racine de l'unité, donc de module 1, et que $\widehat{f \circ \sigma}(\pi) = \overline{\pi(z)} \widehat{f}(\pi)$. \square

PROPOSITION 3. – On a $\|fg\|_{A(G)} \leq \|f\|_{A(G)} \|g\|_{A(G)}$, autrement dit $\|\cdot\|_{A(G)}$ est une norme d'algèbre. En particulier, pour f, g centrales, $\lambda_G(fg) \leq \lambda_G(f)\lambda_G(g)$.

Démonstration. – Ceci est prouvé par Sanders : cf. [20], Prop. 5.4. \square

COROLLAIRE 3. – Pour tout sous-ensemble non vide D de G , $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)} \geq 1$. En particulier, pour D invariant par conjugaison, $\lambda_G(D) \geq 1$.

Démonstration. – En effet $\mathbf{1}_D^2 = \mathbf{1}_D$, d'où $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)} \leq \|\mathbf{1}_D\|_{A(G)}^2$ et $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)} \neq 0$ si D est non vide. \square

2.2.2. *Minoration*

PROPOSITION 4. – On a $\|f\|_{A(G)} \geq \|f\|_\infty$. En particulier, si f est centrale, $\lambda(f) \geq \|f\|_\infty$.

Démonstration. – C'est le lemme 5.3 de [20], mais nous donnons une preuve plus directe. Pour $x \in G$, $L(\mathbf{1}_x)$ est $\frac{1}{|G|}$ fois la translation à gauche par x sur $L^2(G)$ donc la norme d'opérateur $\|L(\mathbf{1}_x)\|$ est $\frac{1}{|G|}$. Pour f une fonction sur G , écrivons $f = \sum_{x \in G} f(x)\mathbf{1}_x$, d'où $\|L(f)\| \leq \sum_{x \in G} \|f(x)L(\mathbf{1}_x)\| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)| = \|f\|_1$. On a donc

$$\|f\|_{A(G)} = \sup_{g, \|L(g)\| \leq 1} |\langle f, g \rangle| \geq \sup_{g, \|g\|_1 \leq 1} |\langle f, g \rangle| = \|f\|_\infty. \quad \square$$

On retrouve en particulier le corollaire 3 : $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)} \geq 1$ si D est non vide. Les cas d'égalité ont été déterminés par Sanders :

THÉORÈME 6. – Soit D un sous-ensemble non vide de G . On a l'égalité $\|\mathbf{1}_D\|_{A(G)} = 1$ si et seulement si D est une classe à gauche⁽³⁾ pour un sous-groupe H de G . En particulier, si D est invariant par conjugaison, on a $\lambda(D) = 1$ si et seulement si D est de la forme aH avec H un sous-groupe distingué de G , et a un élément de G dont l'image canonique dans G/H est centrale.

Démonstration. – La première partie est prouvée dans les sections 6 et 7 de [20]. La seconde en résulte si l'on remarque qu'une classe à gauche aH est invariante par conjugaison si et seulement si H est distingué dans G et l'image de a dans G/H est centrale, ce qui est facile : si aH est invariant par conjugaison, $H = \{x^{-1}y, x \in aH, y \in aH\}$ l'est aussi, et l'image aH de a dans G/H l'est également ; la réciproque est triviale.

Comme la preuve de Sanders est longue et difficile, nous donnons une autre preuve⁽⁴⁾, plus simple, de la seconde assertion, i.e., du cas où D est stable par conjugaison. Nous re-prouvons du même coup dans ce cas l'inégalité $\lambda(D) \geq 1$.

On a d'après l'égalité de Parseval

$$\frac{|D|}{|G|} = \|\mathbf{1}_D\|_2^2 = \sum_{\pi \in \widehat{G}} |\widehat{\mathbf{1}}_D(\pi)|^2.$$

D'autre part, pour $\pi \in \widehat{G}$, on a $|\widehat{\mathbf{1}}_D(\pi)| = \frac{1}{|G|} |\sum_{d \in D} \text{tr}(\pi(d))| \leq \frac{|D|}{|G|} \dim \pi$, avec égalité si et seulement si $\pi(d)$ est un scalaire indépendant de d pour tout $d \in D$. On obtient donc

$$\frac{|D|}{|G|} \leq \sum_{\pi \in \widehat{G}} |\widehat{\mathbf{1}}_D(\pi)| \frac{|D|}{|G|} \dim \pi = \frac{|D|}{|G|} \lambda(D)$$

où encore $1 \leq \lambda(D)$, avec égalité si et seulement si D satisfait la condition suivante :

(*) pour tout $\pi \in \widehat{G}$, on a $\begin{cases} \text{soit } \widehat{\mathbf{1}}_D(\pi) = 0 \\ \text{soit } \pi(d) \text{ est un scalaire indépendant de } d \text{ pour tout } d \in D \end{cases}$

⁽³⁾ ou, ce qui revient bien sûr au même, une classe à droite pour un (autre) sous-groupe de G .

⁽⁴⁾ Inspirée par la réponse de Seva à la question 117121 de [mathoverflow](#).

Cette condition (*) est satisfaite si $D = aH$ avec H distingué et a central dans G/H , car pour les π tels que $\pi(H) \neq 1$, on a $\widehat{1}_D(\pi) = 0$, et pour les autres, $\pi(d) = \pi(a)$ est indépendant de d et est un scalaire par le Lemme de Schur, puisque π se factorise par une représentation irréductible de G/H et l'image de a dans G/H est centrale. Réciproquement, si D satisfait (*), définissons H comme l'intersection des sous-groupes $\ker \pi$ pour π tels que $\widehat{1}_D(\pi) \neq 0$; c'est un sous-groupe normal de G , et pour toute représentation π de G/H , et tout d dans l'image de D dans G/H , $\pi(d)$ est un scalaire indépendant de d . Le lemme suivant, appliqué à G/H , montre alors que l'image de D dans G/H est réduite à un seul élément a , qui plus est dans le centre de G/H , ce qui termine la preuve. \square

LEMME 1. – Soit G un groupe fini. Les seuls éléments g de G qui sont tels que $\pi(g)$ est scalaire pour toute représentation irréductible de G sont les éléments du centre de G . De plus, pour de tels éléments, g est uniquement déterminé par l'application $\widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}^*$ envoyant π sur le rapport de l'homothétie $\pi(g)$.

Démonstration. – On a un isomorphisme d'algèbre $\prod_{\pi} \pi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \prod_{\pi} \text{End}(V_{\pi})$, où V_{π} est l'espace de la représentation π , et l'hypothèse implique que l'image de g par cette application est centrale, donc que g est dans le centre de $\mathbb{C}[G]$, ce qui implique qu'il est dans le centre de G . La deuxième assertion provient de ce que la somme des représentations irréductibles π de G est fidèle. \square

2.2.3. Majoration

PROPOSITION 5 (Majoration par Cauchy-Schwarz). – Pour f une fonction complexe sur G , on a $\|f\|_{A(G)} \leq \sqrt{|G|} \|f\|_2$. En particulier, si f est centrale, $\lambda(f) \leq \sqrt{|G|} \|f\|_2$. Quand f est à valeurs positives réelles, on a égalité si et seulement si le support de f est vide ou réduit à un point (du centre de G). Si D est un sous-ensemble de G stable par conjugaison, $\lambda(D) \leq \sqrt{|D|}$ avec égalité si et seulement si D est vide ou un singleton (inclus dans le centre de G).

Démonstration. – En effet, si $\|L(f)\|_{HS}$ dénote la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $L(f)$, on a $\|L(f)\| \geq \frac{1}{\sqrt{|G|}} \|L(f)\|_{HS}$ d'après les lemmes 3.3 et 3.4 de [20], et $\|L(f)\|_{HS} = \|f\|_2$ d'après [20, Th. 4.2]. D'où par dualité, $\|f\|_{A(G)} \leq \sqrt{|G|} \|f\|_2$. Nous laissons l'analyse du cas d'égalité au lecteur.

Voici une preuve directe dans le cas où f est centrale, qui justifie le nom de « majoration par Cauchy-Schwarz ». Comme $f = \sum \widehat{f}(\pi) \chi_{\pi}$, et que les χ_{π} forment une base orthonormée de $L^2(G)$, on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\pi} |\widehat{f}(\pi)|^2.$$

Par ailleurs et par Cauchy-Schwarz

$$\lambda(f) = \sum_{\pi} |\widehat{f}(\pi)| \dim \pi \leq \sqrt{\sum_{\pi} |\widehat{f}(\pi)|^2} \sqrt{\sum_{\pi} (\dim \pi)^2}.$$

La première racine carrée est égale à $\|f\|_2$, la seconde à $\sqrt{|G|}$ et l'inégalité est prouvée. Pour avoir égalité, il faut et il suffit que le vecteur $(|\widehat{f}(\pi)|)_{\pi \in \widehat{G}}$ soit proportionnel au vecteur $(\dim \pi)_{\pi \in \widehat{G}}$, ce qui est équivalent à l'assertion : pour tout $x \in \text{Supp} f$, pour tout $\pi \in \widehat{G}$,

$\pi(x)$ est un scalaire indépendant de x . Le lemme 1 montre que ceci est encore équivalent à l'assertion que $\text{Supp} f$ est vide ou un singleton contenu dans le centre.

Enfin, l'assertion pour D découle de la précédente puisque $\|\mathbf{1}_D\|_2 = \frac{\sqrt{|D|}}{\sqrt{|G|}}$. \square

REMARQUE 2. – La quantité $\sqrt{|G|}\|f\|_2$ s'écrirait simplement $\|f\|_2$ si l'on avait choisi la mesure de Haar sur G qui donne une masse 1 à chaque élément. Cette mesure est la mesure naturelle si l'on considère le groupe fini G comme un groupe discret, tandis que celle que nous avons choisie revient à considérer G comme un groupe compact, ce qui est plus naturel dans les applications où G est un groupe de Galois.

La majoration de Cauchy-Schwarz

$$\lambda(\mathbf{1}_D) \leq \sqrt{|D|}$$

sera l'étalon auquel nous comparerons les autres majorations de $\lambda(D)$ que nous obtiendrons.

COROLLAIRE 4 (Majoration triviale). – On a pour tout $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\|f\|_{A(G)} \leq |G|\|f\|_1$. En particulier $\lambda(f) \leq |G|\|f\|_1$ si f est centrale, et $\lambda(D) \leq |D|$.

2.2.4. *Comportement par produit.* – Soit G_1, G_2 deux groupes finis, $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions. On définit la fonction $f_1 \otimes f_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule $(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) = f_1(g_1)f_2(g_2)$.

PROPOSITION 6. – On a

$$\|f_1 \otimes f_2\|_{A(G_1 \times G_2)} = \|f_1\|_{A(G_1)}\|f_2\|_{A(G_2)}.$$

Si f_1 et f_2 sont invariantes par conjugaison, $f_1 \otimes f_2$ l'est également, et l'on a

$$\lambda_{G_1 \times G_2}(f_1 \otimes f_2) = \lambda_{G_1}(f_1)\lambda_{G_2}(f_2).$$

En particulier, si $D_1 \subset G_1$ et $D_2 \subset G_2$ sont deux sous-ensembles stables par conjugaison, on a $\lambda_{G_1 \times G_2}(D_1 \times D_2) = \lambda_{G_1}(D_1)\lambda_{G_2}(D_2)$.

Démonstration. – C'est évident sur la définition de la norme d'algèbre puisque $L^2(G_1 \times G_2) = L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$. C'est d'ailleurs tout aussi évident pour une fonction centrale f , avec la norme de Littlewood puisque l'application $(\pi_1, \pi_2) \mapsto \pi_1 \otimes \pi_2$ identifie $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$ avec $\widehat{G_1 \times G_2}$, et que la transformée de Fourier de $f_1 \otimes f_2$ est juste $\widehat{f_1} \otimes \widehat{f_2}$ modulo cette identification. \square

2.2.5. *Comportement par passage au quotient*

PROPOSITION 7. – Soit G un groupe fini, U un sous-groupe distingué de G , s la surjection canonique $G \rightarrow G/U$, et f une fonction centrale sur G/U . Alors $\lambda_G(f \circ s) = \lambda_{G/U}(f)$.

Démonstration. – L'application $\pi \mapsto \pi \circ s$ identifie $\widehat{G/U}$ à un sous-ensemble de \widehat{G} , et l'on a $\widehat{f \circ s} = \widehat{f}$ sur $\widehat{G/U}$, $\widehat{f \circ s} = 0$ sur le complémentaire de $\widehat{G/U}$ dans \widehat{G} . La proposition s'ensuit. \square

COROLLAIRE 5. – Si D_U est une partie de G/U stable par conjugaison, et D son image inverse dans G , alors $\lambda_G(D) = \lambda_{G/U}(D_U)$.

REMARQUE 3. – On retrouve le fait que si $D = aU$ avec U normal et a central dans G/U , $\lambda_G(aU) = 1$, puisque le corollaire 5 et la proposition 2 donnent $\lambda_G(aU) = \lambda_{G/U}(\{a\}) = \lambda_{G/U}(\{1\}) = 1$.

2.2.6. Comportement par restriction à un sous-groupe

PROPOSITION 8. – Soit G un groupe fini, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction centrale, et H un sous-groupe de G . On a alors $\lambda_H(f|_H) \leq \lambda_G(f)$. En particulier, si D est un sous-ensemble de G stable par conjugaison, $\lambda_H(D \cap H) \leq \lambda_G(D)$.

Démonstration. – Écrivons $f = \sum_{\pi \in \widehat{G}} c_\pi \chi_\pi$. Alors $f|_H = \sum_{\pi \in \widehat{G}} c_\pi (\chi_\pi)|_H = \sum_{\rho \in \widehat{H}} \sum_{\pi \in \widehat{G}} c_\pi m(\rho, \pi) \text{tr } \rho$, où pour π une représentation irréductible de G , ρ une représentation irréductible de H , $m(\rho, \pi)$ est la multiplicité de ρ dans $\pi|_H$. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda_H(f|_H) &= \sum_{\rho \in \widehat{H}} \left| \sum_{\pi \in \widehat{G}} c_\pi m(\rho, \pi) \right| \dim \rho \\ &\leq \sum_{\pi \in \widehat{G}} |c_\pi| \sum_{\rho \in \widehat{H}} m(\rho, \pi) \dim \rho \\ &= \sum_{\pi \in \widehat{G}} |c_\pi| \dim \pi = \lambda_G(f) \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 4. – On obtient une nouvelle preuve de ce que $\lambda_G(f_1 f_2) \leq \lambda_G(f_1) \lambda_G(f_2)$ pour deux fonctions centrales f_1 et f_2 sur G , en remarquant que $f_1 f_2$ est la restriction de $f_1 \otimes f_2$ au sous-groupe diagonal G de $G \times G$.

2.2.7. Comportement par induction. – Rappelons que pour G un groupe fini, H un sous-groupe de G , et f une fonction centrale sur H , on définit une fonction centrale sur G , $\text{Ind}_H^G f$, par la formule :

$$(5) \quad (\text{Ind}_H^G f)(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G, yxy^{-1} \in H} f(yxy^{-1})$$

PROPOSITION 9. – Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G , et f une fonction centrale sur H . Alors

$$\lambda_G(\text{Ind}_H^G f) \leq \frac{|G|}{|H|} \lambda_H(f).$$

On a égalité si et seulement si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\pi \in \widehat{G}$, la fonction \hat{f} a un argument complexe constant sur l'ensemble des sous-représentations irréductibles de la restriction de π à H .

Précisons ce que nous voulons dire par « argument complexe constant ». Une application $h : X \rightarrow \mathbb{C}$ a un argument complexe constant s'il existe $\theta \in [0, 1)$, tel que $\forall x \in X$, $h(x) = |h(x)| e^{2i\pi\theta}$. Autrement dit, $x \mapsto h(x)/|h(x)|$ est constante sur le sous-ensemble de X des x tels que $h(x) \neq 0$.

Démonstration. – Comme dans la preuve de la proposition 8, pour $\pi \in \widehat{G}$, $\rho \in \widehat{H}$ on écrit $m(\rho, \pi)$ pour la multiplicité de ρ dans $\pi|_H$, ou ce qui revient au même, pour la multiplicité de π dans $\text{Ind}_H^G \rho$. Pour $\rho \in \widehat{H}$ fixé, on a donc $\sum_{\pi \in \widehat{G}} m(\rho, \pi) \dim \pi = \dim \text{Ind}_H^G \rho = \frac{|G|}{|H|} \dim \rho$.

Écrivons $f = \sum_{\rho \in \widehat{H}} \hat{f}(\rho) \text{tr } \rho$, d'où

$$\text{Ind}_H^G f = \sum_{\rho \in \widehat{H}} \hat{f}(\rho) \text{tr } \text{Ind}_H^G \rho = \sum_{\rho, \pi} \hat{f}(\rho) m(\rho, \pi) \chi_\pi,$$

et donc

$$\begin{aligned} \lambda_G(\text{Ind}_H^G f) &= \sum_{\pi \in \widehat{G}} \left| \sum_{\rho \in \widehat{H}} \hat{f}(\rho) m(\rho, \pi) \right| \dim \pi \leq \sum_{\pi \in \widehat{G}} \sum_{\rho \in \widehat{H}} |\hat{f}(\rho)| m(\rho, \pi) \dim \pi \\ &= \sum_{\rho \in \widehat{H}} |\hat{f}(\rho)| \sum_{\pi \in \widehat{G}} m(\rho, \pi) \dim \pi = \sum_{\rho \in \widehat{H}} |\hat{f}(\rho)| \frac{|G|}{|H|} \dim \rho = \frac{|G|}{|H|} \lambda_H(f) \end{aligned}$$

Pour que l'on ait égalité, il faut et il suffit que pour tout $\pi \in \widehat{G}$, on ait

$$\left| \sum_{\rho \in \widehat{H}} \hat{f}(\rho) m(\rho, \pi) \right| = \sum_{\rho \in \widehat{H}} |\hat{f}(\rho)| m(\rho, \pi)$$

ce qui est équivalent à ce que l'argument complexe de \hat{f} soit constant sur l'ensemble des ρ tels que $m(\rho, \pi) \neq 0$, ce qui est la condition de l'énoncé. \square

2.2.8. *La méthode de Serre.* – Le résultat suivant est en quelque sorte la traduction dans le langage de la complexité de Littlewood d'une technique employée par Serre (cf. [23, § 2.7]) pour obtenir des majorations améliorées du terme d'erreur dans le théorème de Chebotarev.

THÉORÈME 7. – *Soit G un groupe fini, D un sous-ensemble de G stable par conjugaison. Soit H un sous-groupe de G , et U un sous-groupe normal de H , sur lesquels on fait les hypothèses suivantes, pour lesquelles on note $C(d)$ la classe de conjugaison dans G d'un élément d de D :*

- (a) $|C(d)|$ est indépendant de $d \in D$.
- (b) $|C(d) \cap H|$ est indépendant de $d \in D$.
- (c) $U(D \cap H) = D \cap H$, i.e., $D \cap H$ est invariant à gauche (et donc à droite) par U .

Notons s la projection canonique de H sur H/U . Alors

$$\lambda_G(D) \leq \frac{|C(d)|}{|C(d) \cap H|} \lambda_{H/U}(s(D \cap H)),$$

où d est un élément quelconque de D . De plus, on a égalité si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

- (d) Pour tout $\pi \in \widehat{G}$, la fonction $\mathbf{1}_{\widehat{s(D \cap H)}}$ a un argument complexe constant sur l'ensemble des représentations irréductibles ρ de H/U telles que $\rho \circ s$ apparaît dans $\pi|_H$.

Démonstration. – Par la formule (5), $\text{Ind}_H^G(\mathbf{1}_{D \cap H})(x) = \frac{1}{|H|} |\{y \in G, yxy^{-1} \in D \cap H\}|$. L'ensemble $\{y \in G, yxy^{-1} \in D \cap H\}$ est vide si $x \notin D$. Pour $x = d \in D$, le nombre d'éléments de la forme ydy^{-1} qui sont dans $D \cap H$ est $|C(d) \cap H|$ et chacun de ces éléments est obtenu pour $|Z_G(d)|$ valeurs de y , où $Z_G(d)$ est le centralisateur de d dans G . On a

$|Z_G(d)| = |G|/|C(d)|$, d'où il vient $\text{Ind}_H^G(\mathbf{1}_{D \cap H})(x) = \frac{|C(d) \cap H||G|}{|C(d)||H|}$ si $x = d \in D$, 0 si $x \notin D$. Comme la valeur $\frac{|C(d) \cap H||G|}{|C(d)||H|}$ est constante par les hypothèses (a) et (b), on a

$$\mathbf{1}_D = \frac{|C(d)||H|}{|C(d) \cap H||G|} \text{Ind}_H^G \mathbf{1}_{D \cap H}.$$

Par l'hypothèse (c) et la proposition 7, on a $\lambda_H(D \cap H) = \lambda_{H/U}(s(D \cap H))$, et le support de $\widehat{\mathbf{1}_{D \cap H}}$ ne contient que des représentations irréductibles de H qui sont triviales sur U . La proposition 9 donne donc :

$$\lambda_G(D) \leq \frac{|C(d)|}{|C(d) \cap H|} \lambda_{H/U}(s(D \cap H))$$

avec égalité quand l'hypothèse (d) est satisfaite. Ceci termine la preuve. \square

2.3. Quelques calculs de complexités de Littlewood

2.3.1. *Sous-ensemble des permutations transitives de S_n .* – Rappelons (voir par exemple [8, §4.1]) que les représentations irréductibles de S_n sont paramétrées par les partitions λ de $n : n = \lambda_1 + \dots + \lambda_l$, avec $l \geq 1$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 1$.

LEMME 2 (Frobenius). – Soit σ un n -cycle de S_n , λ une partition de n , et ρ_λ la représentation de S_n attachée à λ . Alors $\text{tr } \rho_\lambda(\sigma) = 0$, sauf si $\lambda = (n - l + 1, 1, \dots, 1)$. Dans ce cas, $\text{tr } \rho_\lambda(\sigma) = (-1)^{l-1}$, et on a par ailleurs $\dim \rho_\lambda = \text{tr } \rho_\lambda(1) = \binom{n-1}{l-1}$.

Démonstration. – Voir [8, Exercice 4.16 page 51 et sa solution page 519]. \square

PROPOSITION 10. – Soit n un entier et $D \subset S_n$ l'ensemble des n -cycles. Alors $\lambda_{S_n}(D) = \frac{2^{n-1}}{n}$.

Démonstration. – On calcule $\widehat{\mathbf{1}}_D(\rho_\lambda) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in D} \text{tr } \rho_\lambda(\sigma)$. D'après le lemme précédent, les seuls partitions λ pour lesquelles on obtient un résultat non nul sont celles telles que $\lambda_2 = \dots = \lambda_l = 1$ et l'on a alors $\widehat{\mathbf{1}}_D(\rho_\lambda) = \frac{(-1)^{l-1}}{n}$, où l est le nombre de parties de λ . On a donc $\lambda_{S_n}(D) = \sum_{l=1}^n \frac{1}{n} \binom{n-1}{l-1} = \frac{2^{n-1}}{n}$. \square

REMARQUE 5. – Notons que bien qu'exponentiel en n , ce résultat est bien meilleur que la borne de Cauchy-Schwarz $\lambda(D) \leq \sqrt{(n-1)!}$ qui elle est super-exponentielle.

2.3.2. *Sous-tores de GL_n .* – Dans ce paragraphe, nous nous contentons de poser un problème que nous ne savons pas résoudre, sauf dans deux cas particuliers. Sa solution générale serait pourtant très utile dans les applications à la conjecture de Lang-Trotter, cf. § 5.2.

Soit N un entier ≥ 1 , et soit T un sous-tore de dimension r du schéma en groupe GL_n sur $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]$. Soit Λ l'ensemble des nombres premiers ℓ ne divisant pas N tels que $T_{\mathbb{F}_\ell} = T \otimes_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} \text{Spec } \mathbb{F}_\ell$ soit un tore *déployé*. Comme Λ est l'ensemble des ℓ qui sont totalement décomposés dans l'extension finie de \mathbb{Q} fixée par le noyau de l'application naturelle $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}(X^*(T))$ (où $X^*(T)$ est le groupe des caractères algébriques de T), Λ est un ensemble frobenien de densité positive, en particulier infini.

Soit a un élément de \mathbb{Z} . Pour tout nombre premier ℓ , on note $T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}}$ l'ensemble des $g \in T(\mathbb{F}_\ell)$ qui, vus comme éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$, sont diagonalisables réguliers (i.e., à valeurs propres distinctes) et de trace $a \pmod{\ell}$.

QUESTION 1. – *Peut-on donner une estimation asymptotique de $\lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}})$ quand ℓ tend vers l'infini tout en restant dans Λ ? Dans quel cas cette estimation est-elle d'un ordre de grandeur meilleur que l'estimation de Cauchy-Schwarz $\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}}) \leq \sqrt{|T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}}|}$?*

Notons que si $T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}}$ est non vide, alors $\ell \in \Lambda$, d'où la restriction à ces ℓ dans l'énoncé du problème.

THÉORÈME 8. – *Soit T le sous-tore diagonal de GL_n sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Alors quand ℓ tend vers l'infini,*

$$\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}}) \sim \ell^{(n-1)/2} \text{ si } a \neq 0, \text{ et } \lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0, \text{dr}}) \sim \ell^{(n-2)/2}.$$

Démonstration. – Soit D_a l'ensemble des matrices de trace a dans $T(\mathbb{F}_\ell)$ et D_a^{nr} l'ensemble des éléments non réguliers de D_a . Comme tous les éléments de D_a sont diagonalisables, on a $D_a = T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}} \amalg D_a^{\text{nr}}$. On a $|D_a^{\text{nr}}| = O(\ell^{n-2})$ quand ℓ tend vers l'infini, d'où $\lambda(D_a^{\text{nr}}) = O(\ell^{(n-2)/2})$ par la majoration de Cauchy-Schwarz (cf. prop. 5); quand $a = 0$ on a même $\lambda(D_0^{\text{nr}}) = O(\ell^{(n-3)/2})$ puisque dans ce cas, si Z est le centre de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$, on voit que $ZD_0^{\text{nr}} = D_0^{\text{nr}}$ et donc, par la prop. 7, $\lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)} = \lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)/Z}(D_0^{\text{nr}}/Z)$ auquel on peut ensuite appliquer la majoration de Cauchy-Schwarz. On voit donc que $\lambda(D_a^{\text{nr}})$ est dans tous les cas négligeable par rapport à l'équivalent de $\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}})$ qu'on veut prouver, et donc qu'il suffit de prouver cet équivalent pour $\lambda(D_a)$ au lieu de $\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}})$.

Soit $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ un caractère $T(\mathbb{F}_\ell) \rightarrow \mathbb{C}^*$. On a par définition

$$\widehat{\mathbf{1}}_{D_a}(\chi) = \frac{1}{(\ell - 1)^n} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_\ell^* \\ x_1 + \dots + x_n = a}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n),$$

et on reconnaît dans la somme une somme de Jacobi généralisée $J_a(\chi_1, \dots, \chi_n)$, comme définie dans [10]. On voit par le changement de variable $x_i \mapsto ax_i$ que si $a \neq 0$, $|J_a(\chi_1, \dots, \chi_n)| = |J_1(\chi_1, \dots, \chi_n)|$. Si $a \neq 0$ dans \mathbb{F}_ℓ , et si les χ_i ne sont pas tous triviaux, on a d'après le théorème 4 de [10, Chapter 8], $|J_1(\chi_1, \dots, \chi_n)| = \ell^{(n-1)/2}$ sauf si $\chi_1 \cdots \chi_n = 1$ auquel cas $|J_1(\chi_1, \dots, \chi_n)| = \ell^{n/2-1}$. Comme il y a $(\ell - 1)^n$ caractères χ , on voit donc que la contribution des caractères χ tels que $\chi_1 \cdots \chi_n = 1$ est négligeable et que $\lambda_G(D_a) \sim \ell^{(n-1)/2}$ si $a \neq 0$ dans \mathbb{F}_ℓ . Bien sûr, si $a \neq 0$ dans \mathbb{Z} , on aura $a \neq 0$ dans \mathbb{F}_ℓ pour tout $\ell > a$, d'où le résultat dans ce cas.

Supposons au contraire $a = 0$ dans \mathbb{Z} , donc dans \mathbb{F}_ℓ pour tout ℓ . Si $\chi_1 \cdots \chi_n \neq 1$, on a $J_0(\chi_1, \dots, \chi_n) = 0$ d'après [10, 8.5.1], tandis que si $\chi_1 \cdots \chi_n = 1$, et au moins l'un des χ_i , disons χ_n , est non trivial, on a $|J_0(\chi_1, \dots, \chi_n)| = (\ell - 1)|J_1(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})| = (\ell - 1)\ell^{(n-3)/2}$. Comme on a $(\ell - 1)^{n-1}$ caractères χ tels que $\chi_1 \cdots \chi_n = 1$, et que le cas particulier où tous les χ_i sont triviaux est négligeable, on obtient $\lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(D_0) \sim \ell^{(n-2)/2}$. \square

REMARQUE 6. – On a $|T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}}| \sim \ell^{n-1}$ donc la majoration de Cauchy-Schwarz donne $\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}}) = O(\ell^{(n-1)/2})$. On voit donc que cette majoration donne le bon ordre de grandeur pour $a \neq 0$. Dans le cas $a = 0$, elle ne le donne pas tout à fait, mais si l'on remarque que $ZT(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}} = T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}}$ (où Z est le centre de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$), on obtient bien en utilisant la proposition 7 avant la majoration de Cauchy-Schwarz que $\lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(D_0) = O(\ell^{(n-2)/2})$. Autrement dit, la majoration de Cauchy-Schwarz, tenant compte de l'amélioration triviale ci-dessus dans le cas $a = 0$, donne un résultat optimal dans la situation du théorème 8.

THÉORÈME 9. – Soit T le tore « symplectique » des matrices diagonales $\text{diag}(x, y, y^{-1}, x^{-1})$ de GL_4 sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Alors il existe une constante absolue c_4 telle que $1 \leq \lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}}) < c_4$. Le même résultat est vrai si T est remplacé par le tore des « similitudes symplectiques », i.e., des matrices diagonales de GL_4 de la forme $\text{diag}(zx, zy, zy^{-1}, zx^{-1})$.

Démonstration. – Le cas des « similitudes symplectiques » se ramène au cas « symplectique » par la prop. 7. Traitons donc ce cas. Par la proposition 4, on a $\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}}) \geq 1$; il suffit donc de prouver la majoration.

Soit D_0 l'ensemble des matrices de $T(\mathbb{F}_\ell)$ dont la trace est nulle. On a $D_0 = T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}} \amalg D_0^{\text{nr}}$, où D_0^{nr} est l'ensemble des matrices de D_0 non régulières. On voit facilement que $|D_0^{\text{nr}}| \leq c_5$ indépendamment de ℓ . Il suffit donc de prouver le résultat pour $\lambda(D_0)$.

Or il se trouve que $D_0 = D_0^+ \cup D_0^-$ avec $D_0^\pm = \{(x, y, y^{-1}, x^{-1}) \in D_0, y = -x^{\pm 1}\}$, et D_0^\pm est $(1, -1, -1, 1)H^\pm$ où H^\pm est le sous-groupe de $T(\mathbb{F}_\ell)$ défini par $x = y^{\pm 1}$ (je dois cette observation à Felipe Voloch, voir la question 127099 de `mathoverflow`).

On a donc $\lambda(D_0) \leq \lambda(D_0^+) + \lambda(D_0^-) + \lambda(D_0^+ \cap D_0^-)$ par le corollaire 1, et $\lambda(D_0^\pm) = 1$ par le théorème 6, tandis que $D_0^+ \cap D_0^-$ est de cardinal 2. On a donc $\lambda(D_0) \leq 2 + \sqrt{2}$, ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE 7. – Dans ce théorème, la majoration qu'on obtient est meilleure que celle donnée par Cauchy-Schwarz même en tenant compte de l'amélioration qui consiste à passer au quotient par Z . Par exemple, si T est le tore des similitudes symplectiques, l'ordre de grandeur de $|T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}}|$ est ℓ^2 et celui de $|T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}}/Z|$ est ℓ , si bien que la majoration de Cauchy-Schwarz pour ce quotient, combinée avec la proposition 7 donne $\lambda(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=0,\text{dr}}) = O(\ell^{1/2})$, moins bon que le $O(1)$ du théorème. Il serait intéressant de savoir si un phénomène semblable se produit pour $a \neq 0$, ou pour les tores symplectiques en dimension $2g > 4$.

2.3.3. Groupes munis d'un système de Tits. – Dans ce numéro, nous supposons que

(i) G est un groupe fini muni d'un système de Tits (B, N) (cf. [2, ch. IV, § 2]).

On pose comme d'habitude $T = B \cap N$, et $W = N/T$: c'est le groupe de Weyl du système de Tits. Pour w in W , $t \in T$, on écrit t^w pour ntn^{-1} si n est un représentant de w dans N . Nous supposerons de plus donné

(ii) un sous-groupe normal U de B qui contient le groupe dérivé de B et tel que $B = TU$ et $U \cap T = \{1\}$.

Ceci implique en particulier que T est abélien. Notons s la surjection $s : B \rightarrow B/U \simeq T$, où l'isomorphisme $B/U \simeq T$ est l'inverse de l'isomorphisme $T \simeq B/U$ induit par l'injection canonique de T dans B . On a $\ker s = U$ et $s|_T = \text{Id}_T$. Finalement, nous supposerons que

(iii) si $n \in N$, $nUn^{-1} \cap B \subset U$.

EXEMPLE 1. – Soit G un groupe réductif connexe sur \mathbb{F}_q . Alors, G est quasi-déployé (théorème de Lang) et si T est le centralisateur d'un tore maximal déployé, N le normalisateur de T , B un Borel contenant T , et U le radical unipotent de B , alors G muni de (B, N) et de U est un système de Tits satisfaisant les conditions requises. Voir [3].

LEMME 3. – Soit d un élément de T , dont le centralisateur dans G est T . Soit u un élément de U . Alors ud et du sont conjugués à d dans B .

Démonstration. – (Je remercie Will Sawin pour cet argument, voir la question 128117 de `mathoverflow`.) Considérons l'application $f : B \rightarrow B$, $b \mapsto b^{-1}dbd^{-1}$. Les fibres de cette application sont des classes à gauche sous le centralisateur de d , c'est-à-dire T , donc l'image de f est de cardinal $|B|/|T|$. Comme l'image de f est contenue dans U par l'hypothèse (ii), et que $|U| = |B|/|T|$, f est surjectif sur U . Il existe donc $b \in B$ tel que $f(b) = u$, c'est-à-dire tel que $b^{-1}db = ud$. Le cas de du se traite de même. \square

LEMME 4. – Si $b \in B$, b est conjugué à $s(b)$ dans B . Si $n \in N$, w l'image de n dans W , $b \in B$ et si $nbn^{-1} \in B$, alors nbn^{-1} est conjugué à $s(b)^w$ dans B .

Démonstration. – Si l'on pose $u = b^{-1}s(b)$, on a $s(u) = s(b^{-1})s(s(b)) = s(b^{-1})s(b) = 1$ donc $u \in U$, et donc $s(b) = bu$ est conjugué à b dans B par le lemme précédent. Pour la deuxième assertion, écrivant encore $b = s(b)u^{-1}$, on a $nbn^{-1} = s(b)^w n u n^{-1}$. Par hypothèse, $nbn^{-1} \in B$, donc $n u n^{-1} \in B$, et par l'hypothèse (iii), $n u n^{-1} \in U$, si bien que $s(nbn^{-1}) = s(b)^w$; le résultat en découle. \square

THÉORÈME 10. – Soit D un sous-ensemble de G stable par conjugaison. Supposons que pour tout $d \in D$, le centralisateur de d dans G soit conjugué à T . Alors on a $\lambda_G(D) = \frac{|G|}{|W||B|} \lambda_T(D \cap T)$.

Démonstration. – On va appliquer le cas d'égalité du théorème 7 avec $G = G$, $H = B$, $U = U$. Vérifions-en les quatre hypothèses :

(a) Soit $d \in D$. Par hypothèse, d est conjugué à un élément d' de T , et comme $C(d) = C(d')$, on est ramené au cas $d \in T \cap D$. Comme le centralisateur de d est T ,

$$|C(d)| = |G|/|T|,$$

qui est bien indépendant de d .

(b) Soit $d \in D$, que nous pouvons à nouveau supposer dans T . On a

$$(6) \quad C(d) \cap B = \coprod_{w \in W} C_B(d^w),$$

où C_B est la classe de conjugaison de d^w dans B . En effet, soit $d' \in C(d)$ et choisissons $g \in G$ tel que $d' = gdg^{-1}$. Le choix de l'élément g n'est pas unique, mais la classe gT l'est. Soit BwB , pour $w \in W$, la cellule, évidemment bien déterminée, de la décomposition de Bruhat à laquelle g appartient. Écrivons $g = b_1 n b_2$ avec $b_1, b_2 \in B$, et n un représentant de w dans N . On a alors $d' = gdg^{-1} = b_1 n b_2 d b_2^{-1} n^{-1} b_1^{-1}$ et l'on voit que d' est dans B si et seulement si $n b_2 d b_2^{-1} n^{-1}$ l'est, auquel cas cet élément, et donc aussi d' , est conjugué dans B à d^w par le lemme 4, ce qui prouve (6). Comme le

centralisateur dans B d'un élément régulier de T est toujours T , $|C_B(d^w)| = |B|/|T|$ et il en résulte que

$$|C(d) \cap B| = |W||B|/|T|,$$

qui est bien indépendant de d .

- (c) Il faut voir que $U(D \cap B) = D \cap B$, ce qui suit immédiatement du lemme 3 puisque D est invariant pas conjugaison.
- (d) Soit $\pi \in \widehat{G}$. Il faut montrer que sur les caractères de T qui apparaissent dans $\pi|_B$, la fonction $\widehat{\mathbf{1}}_{s(D \cap B)}$ a un argument constant. Or ces caractères forment une classe de conjugaison de \widehat{T} sous W , par le critère de Mackey. Il suffit donc de voir que la fonction $\widehat{\mathbf{1}}_{s(D \cap B)}$ sur \widehat{T} est invariante par W , donc de voir que le sous-ensemble $s(D \cap B)$ de T est invariant par W , ce qui est encore une conséquence du lemme 4.

Le théorème 7 donne donc

$$\lambda_G(D) = \lambda_T(s(D \cap B))$$

et comme $s(D \cap B) = D \cap T$ par le lemme 4, le théorème est prouvé. \square

Nous appliquons maintenant le théorème aux sous-groupes réductifs connexes de GL_n : soit $N \geq 1$ un entier, G un sous-schéma en groupes réductif connexe ⁽⁵⁾ de GL_n sur $\mathbb{Z}[1/N]$, T un tore maximal de G . On écrit $G_{\mathbb{Q}}$ (resp. $G_{\mathbb{F}_\ell}$) pour les fibres de G au-dessus du point générique (resp. du point spécial de caractéristique ℓ) de $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[1/N]$, $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ pour $G_{\mathbb{Q}} \times_{\mathrm{Spec} \mathbb{Q}} \mathrm{Spec} \overline{\mathbb{Q}}$ et de même pour $T_{\mathbb{Q}}$, $T_{\mathbb{F}_\ell}$, $T_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Soit W le groupe de Weyl de $T_{\overline{\mathbb{Q}}}$ dans $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$. On note d la dimension commune des $G_{\mathbb{Q}}$, $G_{\mathbb{F}_\ell}$ pour $\ell \nmid N$, r (le rang réductif) celle des $T_{\mathbb{Q}}$, $T_{\mathbb{F}_\ell}$. Il suit facilement de [6, Théorème 2.5, exposé 19] qu'il existe un ensemble frobenien Λ de densité > 0 de ℓ ne divisant pas N tel que, pour $\ell \in \Lambda$, $T_{\mathbb{F}_\ell}$ soit un tore maximal déployé de $G_{\mathbb{F}_\ell}$ et le groupe de Weyl W_ℓ de $T_{\mathbb{F}_\ell}$ dans $G_{\mathbb{F}_\ell}$ s'identifie canoniquement avec le groupe de Weyl W .

COROLLAIRE 6. – *Gardons les notations du paragraphe précédent. Fixons un entier $a \in \mathbb{Z}$. Pour ℓ un nombre premier, on note $G(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}$ (resp. $T(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}$) l'ensemble des éléments de $G(\mathbb{F}_\ell)$ (resp. $T(\mathbb{F}_\ell)$) qui, dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$, sont de trace $a \pmod{\ell}$ et diagonalisables réguliers. Alors, quand $\ell \in \Lambda$, $\ell \rightarrow \infty$, on a*

$$\lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}) \sim \frac{1}{|W|} \ell^{(d-r)/2} \lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(T(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}})$$

Démonstration. – Pour $\ell \in \Lambda$, $G(\mathbb{F}_\ell)$ possède un système de Tits (B, N) , avec $B = B(\mathbb{F}_\ell)$ les points d'un Borel contenant $T(\mathbb{F}_\ell)$, N le normalisateur de T , $T = T(\mathbb{F}_\ell)$, et de groupe de Weyl $W_\ell = W$, satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. Comme il est clair que $G(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}} \cap T(\mathbb{F}_\ell) = T(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}$, et que $|B(\mathbb{F}_\ell)| \sim \ell^{(n+r)/2}$, $|T(\mathbb{F}_\ell)| = (\ell-1)^r \sim \ell^r$, ce théorème donne l'équivalence voulue. \square

Donnons deux cas particuliers :

⁽⁵⁾ Dans la terminologie de [6], tous les schémas en groupes réductifs sont connexes, mais nous n'adopterons pas cette terminologie.

COROLLAIRE 7. – Soit $G = \mathrm{GL}_n$ sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$, T le tore diagonal, $a \in \mathbb{Z}$. Alors quand ℓ tend vers l’infini,

$$\lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}) \sim \begin{cases} \frac{1}{n!} \ell^{(n^2-1)/2} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{1}{n!} \ell^{(n^2-2)/2} & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Démonstration. – Cela résulte du corollaire précédent et du théorème 8. □

COROLLAIRE 8. – Soit $G = \mathrm{GSP}_4 \subset \mathrm{GL}_4$, T le tore maximal des matrices diagonales de G . Alors

$$\lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=0, \mathrm{dr}}) \asymp \ell^4$$

Démonstration. – La dimension de GSP_4 est $d = 11$, celle de son tore maximal est $r = 3$, et on a $1 \leq \lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(T(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=0, \mathrm{dr}}) \leq c_6$ d’après le théorème 9. □

2.3.4. Ensemble des matrices de trace donnée dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$. – Fixons un entier $n \geq 1$. Pour ℓ un nombre premier, soit \mathbb{F}_ℓ le corps fini de cardinal ℓ , $a \in \mathbb{Z}$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$, D_a l’ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$ dont la trace est $a \pmod{\ell}$. On se donne pour objectif de calculer l’ordre de grandeur, quand ℓ tend vers l’infini, de $\lambda_G(D_a)$. Nous allons voir que cet ordre de grandeur est le même que celui de $\lambda(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}})$ que nous avons calculé ci-dessus. Autrement dit, pour GL_n , il revient au même, en terme d’ordres de grandeur du moins, de travailler avec toutes les matrices de trace a , ou bien seulement celles qui sont régulières et diagonalisables.

Commençons par majorer $\lambda_G(D_a)$. On a $|D_a| \leq \ell^{n^2-1}$ puisque ℓ^{n^2-1} est le nombre de matrices de trace a dans $M_n(\mathbb{F}_\ell)$, d’où $\lambda_G(D_a) \leq \ell^{\frac{n^2-1}{2}}$ par la majoration de Cauchy-Schwarz. Si $a \equiv 0 \pmod{\ell}$, soit Z le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$. On a $ZD_0 \subset D_0$, d’où $\lambda_G(D_0) = \lambda_{G/Z}(D_0/Z) \leq \sqrt{|D_0|/|Z|} \leq \sqrt{\ell^{n^2-1}/(\ell-1)} \leq 2\ell^{\frac{n^2-2}{2}}$ dès que $\ell \geq 2$. Ces deux majorations sont implicitement appliquées dans [19], au moins pour $n = 2$. Nous allons voir qu’elles donnent le bon ordre de grandeur pour $\lambda_G(D_a)$ et $\lambda_G(D_0)$.

THÉORÈME 11. – On a :

$$\begin{aligned} \lambda_G(D_a) &\asymp \ell^{\frac{n^2-1}{2}} \text{ si } a \neq 0 \\ \lambda_G(D_0) &\asymp \ell^{\frac{n^2-2}{2}}. \end{aligned}$$

Les constantes implicites dépendent de n et a (mais évidemment pas de ℓ).

Démonstration. – Pour minorer asymptotiquement $\lambda_G(D_a)$ écrivons $D_a = D_a^{\mathrm{reg}} \amalg D_a^{\mathrm{nr}}$, où D_a^{reg} est l’ensemble des éléments réguliers de D_a (i.e., ceux dont les valeurs propres dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ sont deux à deux distinctes) et D_a^{nr} l’ensemble de ceux qui ne le sont pas. On a

$$\begin{aligned} \lambda_G(D_a^{\mathrm{nr}}) &= O(\ell^{\frac{n^2-2}{2}}) \text{ si } a \neq 0 \\ \lambda_G(D_a^{\mathrm{nr}}) &= O(\ell^{\frac{n^2-3}{2}}) \text{ si } a = 0. \end{aligned}$$

En effet, $|D_a^{\mathrm{nr}}| = O(\ell^{n^2-2})$ d’où le résultat pour $a \neq 0$ par la majoration de Cauchy-Schwarz. Et quand $a = 0$, D_a^{nr} est encore invariant par Z , et $|D_a^{\mathrm{nr}}|/|Z| = O(\ell^{n^2-3})$ et le résultat en découle par le corollaire 5 et la majoration de Cauchy-Schwarz. Nous sommes donc ramenés à démontrer $\lambda_G(D_a^{\mathrm{reg}}) \gg \ell^{\frac{n^2-1}{2}}$ pour $a \neq 0$, et $\lambda_G(D_0^{\mathrm{reg}}) \gg \ell^{\frac{n^2-2}{2}}$.

Pour cela, rappelons trois résultats sur les séries principales. Soit T le tore diagonal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$, B le Borel des matrices triangulaires supérieures, $W = S_n$ le groupe de Weyl. Pour $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère, on notera $I(\chi)$ la représentation $\mathrm{Ind}_B^G \chi$.

- (a) la représentation $I(\chi)$ est irréductible si et seulement si le caractère χ est *régulier*, i.e., $\chi^w \neq \chi$ pour tout $w \in W$.
- (b) Si $g \in G^{\mathrm{reg}}$, χ est un caractère quelconque de G , et si $\mathrm{tr} I(\chi)(g) \neq 0$, alors g est diagonalisable (i.e., conjugué à un élément de T).
- (c) Soit $g \in G^{\mathrm{reg}}$ diagonalisable et régulier, $\pi \in \widehat{G}$; si $\mathrm{tr} \pi(g) \neq 0$ alors $\pi \subset I(\chi)$ pour un caractère χ de T .

Les deux premiers résultats sont bien connus et élémentaires : le premier se déduit par exemple du critère d'irréductibilité de Mackey (cf. [21, prop. 23]), et le deuxième encore plus facilement de la formule du caractère d'une induite (*loc. cit.*, prop. 20). Le troisième semble plus difficile : il résulte de la théorie de Deligne-Lusztig (cf. [5, formula (7.6.2)]). Écrivons alors

$$\begin{aligned} \lambda_G(D_a^{\mathrm{reg}}) &= \sum_{\pi \in \widehat{G}} |\widehat{\mathbf{1}}_{D_a^{\mathrm{reg}}}(\pi)| \dim \pi \\ &\geq \sum_{\chi \text{ régulier}} |\widehat{\mathbf{1}}_{D_a^{\mathrm{reg}}}(I(\chi))| \dim I(\chi) \text{ (en utilisant le point (a) rappelé ci-dessus)} \\ &= \sum_{\chi \text{ régulier}} |\widehat{\mathbf{1}}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}}(I(\chi))| \dim I(\chi) \text{ (en utilisant (b))} \\ &\geq \sum_{\chi} |\widehat{\mathbf{1}}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}}(I(\chi))| \dim I(\chi) - \sum_{\chi \text{ non régulier}} |\widehat{\mathbf{1}}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}}(I(\chi))| \dim I(\chi) \end{aligned}$$

On peut borner le second terme par Cauchy-Schwarz

$$\sum_{\chi \text{ non régulier}} |\widehat{\mathbf{1}}_{D_a^{\mathrm{reg}}}(I(\chi))| \dim I(\chi) \leq \sqrt{\frac{|D_a^{\mathrm{reg}}|}{|G|} \sum_{\chi \text{ non régulier}} (\dim I(\chi))^2}.$$

On a $|G| \sim \ell^{n^2}$, $|D_a^{\mathrm{reg}}| \sim \ell^{n^2-1}$, $\dim I(\chi)^2 = |G/B|^2 \sim \ell^{n(n-1)}$, et le nombre de χ non réguliers est $O(\ell^{n-1})$, d'où l'on voit que la contribution des χ non réguliers est $O(\sqrt{\ell^{-1} \ell^{n(n-1)} \ell^{n-1}}) = O(\ell^{(n^2-2)/2})$. Quand $a = 0$, on peut travailler dans G/Z et montrer de la même façon que cette contribution est $O(\ell^{(n^2-3)/2})$. Dans tous les cas, elle est négligeable au vu du résultat à prouver, et on est donc ramené à vérifier que

$$\begin{aligned} \sum_{\chi} |\widehat{\mathbf{1}}_{D_a^{\mathrm{reg}}}(I(\chi))| \dim I(\chi) &\gg \ell^{\frac{n^2-1}{2}} \text{ si } a \neq 0, \\ &\gg \ell^{\frac{n^2-1}{2}} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Comme cette somme est supérieure ou égale à $\lambda_G(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}})$ par le point (c), il faut prouver que

$$\begin{aligned} \lambda_G(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)^{\mathrm{tr}=a, \mathrm{dr}}) &\gg \ell^{\frac{n^2-1}{2}} \text{ si } a \neq 0, \\ &\gg \ell^{\frac{n^2-2}{2}} \text{ sinon,} \end{aligned}$$

ce qu'on a déjà fait plus haut, au corollaire 7. □

2.3.5. *Matrices dont une des valeurs propres est 1 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$.* – Soit ℓ un nombre premier, S l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ dont l'une au moins des valeurs propres est 1. (La lettre S est censée rappeler qu'il s'agit de l'ensemble des matrices « semi-unipotentes ».)

PROPOSITION 11. – *On a $\lambda(S) = O(\ell)$ quand $\ell \rightarrow \infty$.*

Démonstration. – Soit S^u l'ensemble des matrices de S dont les deux valeurs propres sont égales à 1, et S^{dr} celui des matrices de S dont exactement une valeur propre est égale à 1; ce sont des matrices diagonalisables régulières. On a $S = S^u \amalg S^{\mathrm{dr}}$, d'où $\lambda(S) \leq \lambda(S^u) + \lambda(S^{\mathrm{dr}})$. On a $|S^u| = O(\ell^2)$ d'où $\lambda(S^u) = O(\ell)$ par la majoration de Cauchy-Schwarz. Soit $T = \mathbb{F}_\ell^* \times \mathbb{F}_\ell^*$ le tore diagonal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$. D'après le théorème 10, $\lambda(S^{\mathrm{dr}}) = \frac{\ell+1}{2} \lambda_T(S^{\mathrm{dr}} \cap T)$. Or $S^{\mathrm{dr}} \cap T$ est la réunion disjointe des ensembles de matrices $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{F}_\ell^* - \{1\} \right\}$ et $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{F}_\ell^* - \{1\} \right\}$. Comme $S_1 \cup \{\mathrm{Id}\}$ et $S_2 \cup \{\mathrm{Id}\}$ sont des sous-groupes de T , leur complexité de Littlewood est 1 (cf. théorème 6) et on a donc $\lambda_T(S_i) \leq 2$ pour $i = 1, 2$, d'où $\lambda_T(S^{\mathrm{dr}} \cap T) \leq 4$ et $\lambda(S^{\mathrm{dr}}) = O(\ell)$. La proposition suit. \square

REMARQUE 8. – Comme $|S| \asymp \ell^3$, la majoration de Cauchy-Schwarz ne donne que $\lambda(S) = O(\ell^{3/2})$, moins bon que la majoration en $O(\ell)$ que nous venons d'obtenir. Cette majoration est d'ailleurs optimale, comme on peut le voir en calculant explicitement $\lambda(S)$ en utilisant la table de caractères de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$.

3. L'invariant $\varphi_G(D)$

Cette section est destinée à l'étude de l'invariant $\varphi(D) = \varphi_G(D)$ d'un sous-ensemble D non vide invariant par conjugaison d'un groupe fini G . Rappelons-en la définition :

$$\varphi_G(D) = \inf_f \frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)},$$

quand f parcourt l'ensemble des fonctions centrales sur G à valeurs réelles, qui satisfont les deux conditions suivantes

- (a) si $f(g) > 0$, alors $g \in D$.
- (b) $\mu_G(f) > 0$.

Cet invariant s'avère beaucoup plus subtil que la norme de Littlewood $\lambda(D)$, et pour l'instant il y a bien peu de cas où nous pouvons le calculer exactement, et à peine plus où nous savons en donner une estimation intéressante.

3.1. Propriétés élémentaires

PROPOSITION 12. – *La borne inférieure définissant $\varphi(D)$ est atteinte. Plus précisément, il existe une fonction f_D centrale sur G , et une seule à multiplication par un réel strictement positif près, tel que :*

- (a) si $f_D(g) > 0$, alors $g \in D$;
- (b) $\mu_G(f_D) > 0$;
- (c) $\varphi_G(D) = \frac{\lambda_G(f_D)}{\mu_G(f_D)}$.

Démonstration. – Soit E l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ centrales, satisfaisant (a), (b) et la condition $\sum_g |f(g)| = 1$. Comme toute fonction satisfaisant (a) et (b) est, à multiplication par un réel strictement positif unique près, dans E , on voit qu'il suffit de montrer que la fonctionnelle $f \mapsto \frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)}$ admet un unique minimum sur E . Or E est convexe, et cette fonctionnelle est strictement convexe sur E , ce qui prouve que la borne inférieure, si elle est atteinte, l'est par une unique fonction $f \in E$.

Si ϵ est un réel positif, soit E_ϵ le sous-ensemble de E défini par la condition $\mu_G(f) \geq \epsilon$. L'ensemble E_ϵ est compact, étant fermé dans la sphère unité pour la norme L^1 de l'espace des fonctions de G dans \mathbb{C} . Pour $f \in E - E_\epsilon$ on a $\frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)} > \frac{\lambda_G(f)}{\epsilon} \geq \frac{\|f\|_\infty}{\epsilon} \geq \frac{1}{|G|\epsilon}$ (en utilisant la proposition 4 puis le fait que $\|f\|_\infty \geq \|f\|_1/|G|$). On voit donc que la borne inférieure de $f \mapsto \frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)}$ sur E est égale à la borne inférieure sur E_ϵ pour ϵ suffisamment petit, qui est atteinte par compacité. \square

COROLLAIRE 9. – On a $\varphi_G(D) > 0$.

Démonstration. – En effet, la fonction f_D est non nulle par (a), donc $\lambda_G(f_D) > 0$ puisque λ_G est une norme, et donc $\varphi_G(D) > 0$ par (c). \square

COROLLAIRE 10. – Soit $\sigma : G \rightarrow G$ une bijection qui est soit un automorphisme de groupe, soit un anti-automorphisme, soit de la forme $g \mapsto zg$ où z est un élément du centre. Alors $\varphi(\sigma(D)) = \varphi(D)$. Si de plus $\sigma(D) = D$, alors la fonction f_D de la proposition précédente satisfait $f_D \circ \sigma = f_D$.

Démonstration. – D'après la proposition 2, pour σ comme dans l'énoncé on a $\lambda_G(f) = \lambda_G(f \circ \sigma)$ pour toute fonction centrale f sur G , et comme évidemment $\mu_G(f) = \mu_G(f \circ \sigma)$, la première assertion en découle aisément. Pour la seconde, remarquons que si $\sigma(D) = D$, l'espace des fonctions f satisfaisant (a) et (b) est invariant par σ ainsi, comme on vient de le voir, que la fonctionnelle $f \mapsto \lambda_G(f)/\mu_G(f)$, donc $f_D \circ \sigma = \nu f_D$ pour un réel ν par la proposition précédente, et évidemment $\nu = 1$. \square

En particulier, pour l'anti-automorphisme $x \mapsto x^{-1}$, on obtient :

COROLLAIRE 11. – Soit G un groupe fini, D un sous-ensemble invariant par conjugaison et par l'anti-automorphisme $g \mapsto g^{-1}$. Alors $\varphi_G(D)$ est la borne inférieure de $\lambda_G(f)/\mu_G(f)$ quand f parcourt l'ensemble des fonctions centrales à valeurs réelles telles que

- (a) si $f(g) > 0$, alors $g \in D$;
- (b) $\mu_G(f) > 1$;
- (c) Pour tout g dans G , $f(g) = f(g^{-1})$.

REMARQUE 9. – Plaçons-nous sous les hypothèses du corollaire précédent. Pour f satisfaisant (c), la fonction \hat{f} est à valeurs réelles, si bien que $\lambda_G(f)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de valeurs absolues de forme linéaire $f \mapsto \hat{f}(\rho)$ sur l'espace des fonctions f centrales satisfaisant (c). Autrement dit, calculer le minimum $\varphi_G(D)$ et trouver la fonction f_D qui le réalise est dans ce cas un problème de programmation linéaire.

Voici une autre application du corollaire 10.

COROLLAIRE 12. – Soit G un groupe abélien, H un sous-groupe, $A \subset G/H$. Alors $\varphi_G(AH) = \varphi_{G/H}(A)$.

Démonstration. – On applique le corollaire 10 aux bijections $\psi_z : x \mapsto zx$ de G pour $z \in H$. Comme ces bijections stabilisent AH , on voit que la fonction f_{AH} qui réalise le minimum est invariante par translation par H , et provient donc d'une fonction \tilde{f} sur G/H vérifiant les conditions (a) et (b) relative au sous-ensemble A de G/H . On a $\lambda_G(f_{AH}) = \lambda_{G/H}(\tilde{f})$ par la proposition 7, d'où $\varphi_{G/H}(A) \leq \varphi_G(AH)$. L'autre inégalité est claire. \square

PROPOSITION 13. – Soit $D \subset G$ un sous-ensemble non vide invariant par conjugaison. On a

$$\varphi(D) \leq \frac{\lambda(D)|G|}{|D|}$$

avec égalité si et seulement si $f_D = \mathbf{1}_D$ à multiplication par un réel près.

C'est clair.

COROLLAIRE 13. – Soit $D \subset G$ un sous-ensemble non vide invariant par conjugaison. On a

$$(7) \quad \varphi(D) \leq \frac{|G|}{\sqrt{|D|}}$$

Démonstration. – Cela résulte de la proposition précédente vu la majoration de Cauchy-Schwarz (proposition 5). \square

PROPOSITION 14. – On a

$$\varphi(D) \geq \frac{|G|}{|D|}$$

avec égalité si et seulement si $\lambda(D) = 1$, i.e., si et seulement si D est de la forme aH avec H un sous-groupe distingué dans G et a un élément de G dont l'image dans G/H est centrale. Lorsque ces conditions sont satisfaites, $f_D = \mathbf{1}_D$ à un scalaire près.

Démonstration. – Soit f satisfaisant (a) et (b). On a $\frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)} \geq \frac{\lambda_G(f)|G|}{\sum_{g \in G, f(g) > 0} f(g)} \geq \frac{\|f\|_\infty |G|}{\sum_{g \in G, f(g) > 0} f(g)}$ d'après la proposition 4. Comme d'après (b), la somme du dénominateur a au plus $|D|$ termes, et que chacun d'eux est positif et plus petit que $\|f\|_\infty$, on voit que

$$\frac{\lambda_G(f)}{\mu_G(f)} \geq \frac{|G|}{|D|}.$$

L'égalité n'est possible que s'il n'y a pas de g avec $f(g) < 0$ et que tous les g tels que $f(g) > 0$ sont tels que $f(g) = \|f\|_\infty$, autrement dit que si $f = \mathbf{1}_D$ à un scalaire près. Dans ce cas, on a $\lambda_G(D) = 1$ et donc D est bien de la forme voulue, d'après le théorème 6. \square

3.2. Estimations de $\varphi(D)$ pour certains sous-ensembles D de S_n

Dans ce numéro, on note f la fonction qui à une permutation g du groupe symétrique S_n associe le nombre de points que g laisse fixes dans $\{1, \dots, n\}$.

LEMME 5. – Soit G un sous-groupe du groupe symétrique S_n . Alors

$$\begin{aligned}\lambda_G(f) &= n \\ \lambda_G(f^2) &= n^2 \\ \mu_G(f) &\geq 1 \text{ avec égalité ssi } G \text{ agit transitivement sur } \{1, \dots, n\} \\ \mu_G(f^2) &\geq 2 \text{ avec égalité ssi } G \text{ agit doublement transitivement sur } \{1, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Démonstration. – La fonction f est la trace de la représentation naturelle de G sur $V = \mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées. Écrivons cette représentation $\bigoplus_{\rho} \rho^{m_{\rho}}$, on a $\lambda_G(f) = \sum_{\rho} |m_{\rho}| \dim \rho = \sum_{\rho} m_{\rho} \dim \rho = \dim \mathbb{C}^n = n$. On raisonne de même avec f^2 qui est la trace de la représentation $V \otimes V$. Les résultats sur μ_G sont bien connus (cf. [21, exercice 2.3]). \square

On a plus généralement avec la même preuve $\lambda_G(f^k) = n^k$ pour tout $k \geq 0$. En revanche on se gardera bien de croire que $\mu_G(f^k) = k$ si G agit k -transitivement sur $\{1, \dots, n\}$.

PROPOSITION 15. – Soit G un sous-groupe du groupe symétrique S_n . On a

$$\begin{aligned}\varphi_G(\{g \in G \mid f(g) \geq 1\}) &\leq n \\ \varphi_G(\{g \in G \mid f(g) \geq 2\}) &\leq n^2 + 1 \\ \varphi_G(\{g \in G \mid f(g) = 0\}) &\leq 2n^2 + 2n \text{ si } G \text{ agit transitivement sur } \{1, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Démonstration. – La fonction f est par définition nulle sur le complémentaire de $\{g \in G \mid f(g) \geq 1\}$ et l'on a $\mu_g(f) \geq 1 > 0$, donc par définition $\varphi(\{g \in G \mid f(g) \geq 1\}) \leq \lambda(f)/\mu(f) \leq n/1 = n$.

Considérons la fonction $f' = f^2 - 1$. On voit aisément que f' est négative ou nulle sur le complémentaire de $\{g \in G \mid f(g) \geq 2\}$, et $\mu_G(f') = \mu_G(f^2) - 1 \geq 1$. D'où $\varphi_G(\{g \in G \mid f(g) \geq 2\}) \leq \lambda(f')/\mu_G(f') \leq n^2 + 1$.

Considérons la fonction $f'' = f^2 - (n+1)f + n$. Si G agit transitivement sur $\{1, \dots, n\}$, on a $\mu_G(f'') \geq 2 - (n+1) + n = 1$. Par ailleurs, on voit aisément que f'' est négatif ou nul sur le complémentaire de $\{g \in G \mid f(g) = 0\}$, c'est-à-dire dès que $f(g) \geq 1$. Donc $\varphi(\{g \in G \mid f(g) = 0\}) \leq \lambda(f'')/\mu_G(f'') \leq n^2 + (n+1)n + n = 2n^2 + 2n$. \square

REMARQUE 10. – Dans les trois exemples ci-dessus, on a donné une borne polynomiale en n pour $\varphi_G(D)$, alors que la majoration de Cauchy-Schwarz $\varphi_G(D) \leq |G|/\sqrt{D}$ donnerait une borne super-exponentielle.

4. Les théorèmes principaux

4.1. Le théorème de Chebotarev effectif

Comme dans l'introduction, soit L un corps de nombres galoisien sur \mathbb{Q} , $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, et M le produit des nombres premiers qui sont ramifiés dans L . Soit f une fonction centrale à valeurs complexes sur G , et $\pi(f, x) = \sum_{p < x} f(\text{Frob}_p)$. Rappelons l'énoncé de la version du théorème de Chebotarev que nous utilisons dans cet article.

THÉORÈME 1 (Chebotarev effectif). – *Supposons vraies GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin associées aux représentations irréductibles de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qui appartiennent au support spectral de f . On a, pour $x \geq 3$,*

$$|\pi(f, x) - \mu(f)\text{Li}(x)| < c_1 x^{1/2} \lambda(f) (\log x + \log M + \log |G|).$$

Montrons d'abord comment déduire ce théorème des résultats de [11] et [19]. Nous noterons $\Lambda_f(n)$ la fonction de Von Humbolt associée à f , définie par :

$$\Lambda_f(n) = \begin{cases} f(\text{Frob}_p^k) \log p & \text{si } n = p^k, p \nmid M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose

$$(8) \quad \psi(f, x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_f(n).$$

On écrit $f = \sum_{\pi \in \widehat{G}} c_\pi \chi_\pi$, où $c_\pi = \widehat{f}(\pi)$. On a donc par définition $\lambda_G(f) = \sum_{\pi} |c_\pi| \dim \pi$, et l'on voit immédiatement que pour prouver le théorème 1, il suffit de le faire quand $f = \chi_\pi$ pour $\pi \in \widehat{G}$. Notons que dans ce cas, $\mu_G(\chi_\pi) = 0$ si π n'est pas la représentation triviale, que $\mu_G(\chi_\pi) = 1$ si π est la représentation triviale, et que $\lambda(\chi_\pi) = \dim \pi$. En supposant que $L(\pi, s)$ satisfasse l'hypothèse de Riemann et la conjecture d'Artin (i.e., soit holomorphe sauf peut-être en $s = 1$), le théorème des nombres premiers généralisé (cf. [11, Theorem 5.15]) donne

$$(9) \quad |\psi(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)x| < c_7 x^{1/2} (\log x) \log(x^{\dim \pi} q(\pi)),$$

où $q(\pi)$ est le conducteur d'Artin de π . On utilise alors la majoration (cf. [19] ou [18, Proposition 7.4])

$$(10) \quad \log q(\pi) \leq 2(\dim \pi) (\log M + \log |G|)$$

pour obtenir

$$(11) \quad |\psi(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)x| < c_1 x^{1/2} (\log x) (\dim \pi) (\log x + \log |G| + \log |M|),$$

avec $c_1 = 2c_7$. Un argument standard d'intégration par partie [4] permet d'en déduire :

$$|\pi(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)\text{Li}(x)| < c_1 x^{1/2} (\log x) (\dim \pi) (\log x + \log |G| + \log |M|),$$

ce qui est la formule voulue et termine la preuve du théorème 1.

REMARQUE 11. – Dans le théorème précédent, M est le produit des nombres premiers ramifiés dans L . En fait, le théorème reste vrai si on remplace M par n'importe quel nombre divisible par tous les nombres premiers ramifiés dans L . C'est clair, car ce changement de M ne fait pas diminuer le terme d'erreur, et le changement induit dans $\pi(D, x)$ (qui ne compte que les p ne divisant pas M) est au plus $\log M$, ce qui est absorbé sans effort par le terme d'erreur.

REMARQUE 12. – Si l'on suppose que toutes les fonctions L d'Artin satisfont GRH, mais pas nécessairement la conjecture d'Artin, il ne semble pas possible de prouver, dans l'état actuel des connaissances, une formule aussi précise que (9) (voir la note de bas de page 1). Certes, il résulte de GRH et du fait que $\zeta_L(s)$ n'a qu'un pôle en $s = 1$, simple qui plus est, que les fonctions L d'Artin ont tous leurs zéros et tous leurs pôles non triviaux sur la droite critique $\Re s = 1/2$, ce qui permet d'écrire une *formule explicite* pour $\psi(\chi_\pi, x)$ avec un terme d'erreur qui est une somme de termes x^z correspondant aux zéros et pôles non triviaux z de $L(\pi, s)$, donc de termes de module $x^{1/2}$. C'est encourageant, mais pour conclure il faudrait alors connaître une majoration similaire à [11, (5.33)] pour le nombre total de zéros et de pôles de $L(\pi, s)$ sur un segment $-T \leq \Im s < T$ de la droite critique, et c'est cette majoration qui fait défaut, car la méthode habituelle, qui consiste à intégrer L'/L sur un contour adéquat, ne donnerait qu'une estimation de la *différence* du nombre de zéros et de pôles, au lieu de leur *somme*.

REMARQUE 13. – Considérons une fonction centrale $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui peut s'écrire

$$(12) \quad f = \sum_{\rho} c_{\rho} \operatorname{tr} \rho$$

avec les $c_{\rho} \in \mathbb{C}$, où les ρ sont des représentations de G non nécessairement irréductibles. Alors, en admettant GRH et la conjecture d'Artin pour les représentations ρ apparaissant dans cette somme (i.e., l'holomorphie de $L(\rho, s)$ sauf peut-être en $s = 1$), on a

$$(13) \quad |\pi(f, x) - \mu(f)\operatorname{Li}(x)| < c_1 x^{1/2} \left(\sum_{\rho} |c_{\rho}| \dim \rho \right) (\log x + \log M + \log |G|).$$

La preuve est exactement la même que celle du théorème 2 : on se ramène par linéarité au cas $f = \operatorname{tr} \rho$, et ce cas se traite exactement comme celui où $f = \operatorname{tr} \pi$, $\pi \in \widehat{G}$, puisque l'irréductibilité de π n'est pas utilisée dans la preuve. L'intérêt de cette variante est qu'il est parfois plus facile de vérifier la conjecture d'Artin pour les représentations non irréductibles $\rho \in R$ que pour leurs composantes irréductibles. De plus, si les représentations ρ sont à supports disjoints, on a $\sum_{\rho} |c_{\rho}| \dim \rho = \lambda(f)$.

REMARQUE 14. – Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 10. On suppose donc notamment que $G = \operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est muni d'un système de Tits (B, N) de groupe de Weyl W , que le groupe $T = B \cap N$ est abélien, et que $D \subset G$ est un sous-ensemble stable par conjugaison dont tout élément est de centraliseur un sous-groupe conjugué à T . Le théorème 10 donne alors $\lambda_G(D) = \frac{|G|}{|B||W|} \lambda_T(D \cap T)$, et le théorème 1 affirme donc dans ce cas que sous GRH et Artin, on a

$$(14) \quad |\pi(D, x) - \mu_G(D)\operatorname{Li}(x)| < c_1 x^{1/2} \frac{|G|}{|B||W|} \lambda_T(D \cap T) (\log x + \log M + \log |G|)$$

En fait, la formule (14) est valable sous GRH seule. En effet, la preuve du théorème 10 montre que $\mathbf{1}_D$ peut s'écrire $\sum c_\chi \text{tr Ind}_B^G \chi$, où les χ sont des caractères abéliens de B , et les représentations $\text{Ind}_B^G \chi$ sont à supports disjoints. La remarque précédente s'applique donc, puisque les représentations $\text{Ind}_B^G \chi$ satisfont la conjecture d'Artin.

Si l'on combine le théorème 1 avec l'estimation de $\lambda(f)$ de la proposition 5 (Cauchy-Schwarz), on obtient

COROLLAIRE 14 (Chebotarev effectif, « version de Murty-Murty-Saradha »)

Supposons vraies GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin associées aux représentations irréductibles de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qui appartiennent au support spectral de f . On a, pour $x \geq 3$,

$$(15) \quad |\pi(f, x) - \mu(f)\text{Li}(x)| < c_1 x^{1/2} \|f\|_2 \sqrt{|G|} (\log x + \log M + \log |G|)$$

et si D est un sous-ensemble de G invariant par conjugaison.

$$(16) \quad \left| \pi(D, x) - \frac{|D|}{|G|} \text{Li}(x) \right| < c_1 x^{1/2} \sqrt{|D|} (\log x + \log M + \log |G|).$$

En utilisant la majoration triviale, on obtient une conclusion moins forte, mais qui a l'avantage d'être valable sans la conjecture d'Artin, et de ne supposer GRH que pour les fonctions Zeta des corps de nombres :

THÉORÈME 12 (Chebotarev effectif, « version de Lagarias-Odlyzko-Serre »)

Supposons vraie GRH pour la fonction Zeta du corps L . On a, pour $x \geq 3$,

$$(17) \quad |\pi(f, x) - \mu(f)\text{Li}(x)| < c_8 x^{1/2} \|f\|_1 |G| (\log x + \log M + \log |G|)$$

et si D est un sous-ensemble de G invariant par conjugaison.

$$(18) \quad \left| \pi(D, x) - \frac{|D|}{|G|} \text{Li}(x) \right| < c_8 x^{1/2} |D| (\log x + \log M + \log |G|).$$

Pour (18), cf. [23, Remarques 3], page 134], et (17) en découle par additivité.

Notons qu'une version très légèrement plus précise de ces deux théorèmes (cf. [23, Théorème 4] et [19, Proposition 3.2]) est en fait énoncée dans les articles cités : le facteur logarithmique $(\log x + \log M + \log |G|)$ du terme d'erreur est remplacé par $(\log x + \frac{\log d_L}{|G|})$, où d_L est la valeur absolue du discriminant de l'extension L/\mathbb{Q} . D'après Hecke et Serre ([23]), on a $\frac{1}{2} \log M \leq \frac{\log d_L}{|G|} \leq \log M + \log |G|$. Ces estimations montrent que nos énoncés « perdent » par rapport à leurs variantes plus précises au pire un facteur $\log |G|$, ce qui n'a pas beaucoup d'importance dans la suite. De plus, dans la plupart des applications que nous avons en vue $\frac{\log d_L}{|G|}$ est du même ordre de grandeur que $\log M + \log |G|$ (par exemple pour les corps cyclotomiques, ou bien les corps engendrés par les coordonnées des points de torsion d'une courbe elliptique), donc on ne perd même pas ce facteur $\log |G|$.

4.2. Plus petit nombre premier d'un ensemble frobenien

Rappelons le théorème que nous devons prouver :

THÉORÈME 3. – Soit L/\mathbb{Q} une extension finie galoisienne. $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, $D \subset G$ non vide et invariant par conjugaison, et $M = \prod_p \text{ramifié dans } L \text{ p}$. Supposons vraies GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin associées aux représentations irréductibles de G . Alors le plus petit nombre premier p tel que $\text{Frob}_p \in D$ vérifie :

$$p < c_3 \varphi_G(D)^2 (\log M + \log |G|)^2.$$

Démonstration. – Par la proposition 12, il existe une fonction centrale f sur G , satisfaisant :

(a) si $f(g) > 0$, alors $g \in D$;

(b) $\sum_{g \in G} f(g) > 0$;

(c) $\varphi_G(D) = \frac{\lambda_G(f)}{\sum_{g \in G} f(g)}$.

Définissons, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\psi_1(f, x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda_f(n)(x - n)$$

$$\theta_1(f, x) = \sum_{p < x} \Lambda_f(p)(x - p).$$

Si π est une représentation irréductible de G , de caractère χ_π , on a par le lemme 6 ci-dessous,

$$|\psi_1(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)x^2| < c_{13} x^{3/2} (\log q(\pi) + \dim \pi),$$

et donc par [19, Prop. 2.5], on en déduit

$$|\psi_1(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)x^2| < c_9 x^{3/2} (\dim \pi) (\log M + \log |G|),$$

d'où, par linéarité et définition de $\lambda_G(f)$,

$$(19) \quad |\psi_1(f, x) - \mu_G(f)x^2| < c_9 x^{3/2} \lambda_G(f) (\log M + \log |G|).$$

On a

$$\begin{aligned} |\theta_1(f, x) - \psi_1(f, x)| &= \sum_{p, k \geq 2, p^k < x} \Lambda_f(p^k)(x - p^k) \\ &\leq x \sum_{k \geq 2} \psi(f, x^{1/k}). \end{aligned}$$

On a par le théorème 1 et sa preuve (cf. (11))

$$\psi(f, x^{1/2}) < c_{10} (x^{1/2} + x^{1/4} \log^2 x) \lambda_G(f) (\log M + \log |G|),$$

et pour $k \geq 3$,

$$\psi(f, x^{1/k}) < c_{10} (x^{1/3} + x^{1/6} \log^2 x) \lambda_G(f) (\log M + \log |G|).$$

Comme par ailleurs $\psi(f, x^{1/k}) = 0$ si $x^{1/k} < 2$ i.e., si $k > \log x / \log 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\theta_1(f, x) - \psi_1(f, x)| &< \frac{c_{10}}{\log 2} \left(x^{3/2} + x^{5/4} \log^2 x + x^{4/3} \log x + x^{7/6} \log^3 x \right) \lambda_G(f) (\log M + \log |G|) \\ &< c_{11} x^{3/2} \lambda_G(f) (\log M + \log |G|). \end{aligned}$$

On obtient donc pour θ_1 la même estimation que pour ψ_1 , avec une constante différente :

$$(20) \quad |\theta_1(f, x) - \mu_G(f)x^2| < c_{12}x^{3/2}\lambda_G(f)(\log M + \log |G|).$$

Puisque $\mu_G(f) > 0$ par (b), cette estimation montre

$$\theta_1(f, x) > 0 \text{ dès que } x > c_{12}^2 \frac{\lambda_G(f)^2}{\mu_G(f)^2} (\log M + \log |G|)^2,$$

donc dès que $x > c_{12}^2 \varphi_G(f)^2 (\log M)^2$. Par définition de θ_1 , si $\theta_1(x) > 0$ il existe un nombre premier $p < x$ tel que $f(\text{Frob}_p) > 0$, ce qui par (a) entraîne que $\text{Frob}_p \in D$. Le résultat suit, avec $c_3 = c_{12}^2$. □

LEMME 6. – Soit π une représentation irréductible de G et supposons que $L(\pi, s)$ satisfasse GRH et la conjecture d'Artin. On a :

$$|\psi_1(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)x^2| < c_{13}x^{3/2}(\log q(\pi) + \dim \pi),$$

Démonstration. – Partons de l'égalité élémentaire

$$-\frac{L'}{L}(\pi, s) = \sum_{n \geq 1} \Lambda_{\chi_\pi}(n)n^{-s}.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$, où $x \geq 3$ est un paramètre réel, et intégrant sur la droite $\Re s = 2$, on obtient :

$$\psi_1(\chi_\pi, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{L'}{L}(\chi_\pi, s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.$$

En déplaçant la droite $\Re s = 2$ infiniment loin vers la gauche, on écrit $\psi_1(\chi_\pi, x)$ comme la somme des résidus aux pôles de $\frac{L'}{L}(\chi_\pi, s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$; le pôle simple de $L(\pi, s)$ en $s = 1$ quand π est triviale, ou son absence quand π est non triviale, donne un terme $\mu_G(\chi_\pi)x^2$, et tous les autres pôles triviaux de $\frac{L'}{L}(\chi_\pi, s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ (le plus important étant celui en $s = 0$) donnent au total une erreur $\leq c_{14}(\log q(\pi))x \log x$ (compare [4, Chapter 19]). Donc

$$\psi_1(\chi_\pi, x) - \mu_G(\chi_\pi)x^2 - \sum_z \epsilon(z) \frac{x^{z+1}}{z(z+1)} < c_{15}(\log q(\pi))x \log x,$$

où la somme porte sur les zéros et les pôles z non triviaux de $L(\pi, s)$, comptés plusieurs fois selon leur multiplicité, et où le signe $\epsilon(z)$ est 1 pour un zéro, -1 pour un pôle. Puisque nous supposons vraie la conjecture d'Artin, les pôles non triviaux n'existent pas, et puisque nous supposons que $L(\pi, s)$ satisfait GRH, tous les zéros non triviaux satisfont $\Re z = 1/2$, donc $|x^{z+1}| = x^{3/2}$. Par ailleurs, le nombre de zéros z tels que $T \leq |\Im z| < T + 1$ est $\leq c_{16}(\log q(\pi) + \dim \pi \log(T + 3))$ d'après [11, Prop. 5.7(1)] (on utilise encore une fois la conjecture d'Artin pour s'assurer que $L(\pi, s)$ satisfait aux conditions imposées aux fonctions L dans tout le chapitre 5 de [11].) On a donc

$$\sum_z \frac{x^{z+1}}{z(z+1)} < c_{17}x^{3/2} \sum_{T=1}^{\infty} \frac{\log q(\pi) + \dim \pi (\log(T + 3))}{T^2} < c_{18}x^{3/2}(\log q(\pi) + \dim \pi),$$

et le résultat suit. □

REMARQUE 15. – Le théorème précédent reste vrai si l'on remplace M par n'importe quel entier positif divisible par tous les nombres premiers ramifiés dans L . Il suffit dans la preuve de voir que la formule 20 reste vraie avec la nouvelle définition de M (qui change aussi la définition de θ_1). C'est clair, car le changement de M ne fait que grandir le terme d'erreur, et change $\theta_1(x)$ au plus par $x \log M$, ce qui peut être absorbé dans le terme d'erreur.

REMARQUE 16. – En supposant seulement GRH pour la fonction Zeta de L , Lagarias et Odlyzko obtiennent le résultat

$$(21) \quad p < c_{19}(\log d_K)^2 \leq c_{19}|G|^2(\log |G| + \log M)^2$$

moins précis sauf quand $|D| = 1$. Sous les mêmes hypothèses et conjectures que le théorème 3, Murty et Murty énoncent (sans donner la preuve) :

$$(22) \quad p < c_{20} \frac{|G|^2}{|D|} (\log |G| + \log M)^2.$$

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, notre résultat est plus fort d'une part car en prenant $f = \mathbf{1}_D$, i.e., en utilisant l'estimation $\varphi(D) \leq \lambda(D)|G|/|D|$, on obtient un meilleur résultat que celui de Murty et Murty si $\lambda(D) < \sqrt{|D|}$, et d'autre part parce qu'il est souvent possible d'utiliser une fonction f satisfaisant les conditions (a) et (b) ci-dessus qui donne un meilleur résultat que $\mathbf{1}_D$, autrement dit parce que souvent $\varphi(D) \leq \lambda(D)|G|/|D|$.

Il est important d'observer cependant que cette astuce d'utiliser une fonction f autre que $\mathbf{1}_D$ afin de majorer le plus petit nombre premier p tel que $\text{Frob}_p \in D$ ne donne quelque chose de nouveau que parce qu'on a utilisé la forme avec la complexité de Littlewood $\lambda(f)$ du théorème 1, et non la forme de Murty-Murty-Saradha (15) où $\lambda(f)$ est remplacé par $\|f\|_2 \sqrt{|G|}$. En effet, appliquer le principe de démonstration du théorème 3 avec (15) amènerait à chercher à minimiser l'expression $\frac{\|f\|_2}{\mu_G(f)}$ sur les fonctions f satisfaisant les conditions (a) et (b), et on voit aisément que le minimum de cette fonctionnelle est toujours atteint pour $f = \mathbf{1}_D$. (Si f est une fonction satisfaisant (a) et (b), soit f' définie par $f' = \max(f, 0)$. Il est clair que f' satisfait aussi (a) et (b) et que l'on a $\mu_G(f') \geq \mu_G(f)$ et $\|f'\|_2 \leq \|f\|_2$, d'où $\frac{\|f'\|_2}{\mu_G(f')} \leq \frac{\|f\|_2}{\mu_G(f)}$. De plus comme f' est positive et à support dans D , $\mu_G(f') = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in D} f'(x) \leq \frac{1}{|G|} \sqrt{\sum_{x \in D} |f'(x)|^2 \sum_{x \in D} 1} = \|f'\|_2 \sqrt{|G||D|}$ avec égalité quand f' est proportionnel à $\mathbf{1}_D$.)

Cette observation illustre la thèse centrale de cet article : que la version de Chebotarev avec complexité de Littlewood $\lambda(f)$ est à la fois plus forte et plus souple que celle où l'on remplace $\lambda(f)$ par la norme L^2 (ou *a fortiori* L^1) de f .

4.3. Application à certains ensembles de densité 0

4.3.1. *Position du problème.* – Dans cette partie on se donne un entier $M \geq 1$, un ensemble Λ , et pour chaque $\nu \in \Lambda$, une extension finie galoisienne L_ν de \mathbb{Q} , non ramifiée hors des nombres premiers divisant M , de groupe de Galois G_ν . On se donne également une famille $D = (D_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ de sous-ensembles $D_\nu \subset G_\nu$ stables par conjugaison. On pose

$$(23) \quad \tilde{D} = \{p \mid p \nmid M \text{ et } \forall \nu \in \Lambda, \text{Frob}_{p, G_\nu} \in D_\nu\} = \bigcap_{\nu \in \Lambda} \tilde{D}_\nu.$$

et

$$(24) \quad \pi(D, x) = |\tilde{D} \cap [1, x]| = |\{p \leq x \mid p \nmid M \text{ et } \forall \nu \in \Lambda, \text{Frob}_{p, G_\nu} \in D_\nu\}|$$

Sous des hypothèses assez générales, l'ensemble \tilde{D} aura une densité naturelle égale à zéro, et notre but est d'estimer sa « rareté » en donnant une majoration (valable sous GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin associées aux représentations de G_ν , $\nu \in \Lambda$) de la forme $\Pi_D(x) = O(x^u(\log x)^v)$, où $0 \leq u < 1$ et v sont des réels dépendant de la taille des G_ν , D_ν et $\lambda_{D_\nu}(G_\nu)$.

Nous énonçons ci-dessous trois théorèmes donnant de telles estimations. L'idée de la preuve du premier est très simple, et nous l'avons reprise de [23]; c'est elle aussi qui est utilisée par Murty-Murty-Saradha dans [19]. Pour majorer $\pi_D(x)$, on observe que $\pi(D, x) \leq \pi(D_\nu, x)$ pour tout ν et on choisit le $\nu = \nu(x)$ qui donne le meilleur résultat. Le théorème (cf. théorème 13) que nous obtenons est donc meilleur que celui énoncé dans [23] (resp. que celui implicite dans [19]) quand et dans la mesure où nous disposons d'une estimation des $\lambda(D_\nu)$ meilleure que l'estimation triviale (resp. de Cauchy-Schwarz).

On peut espérer améliorer la méthode décrite ci-dessus dans certains cas si l'on arrive à utiliser l'information $\tilde{D} \subset \tilde{D}_\nu$ pour tous les ν à la fois, ou du moins pour beaucoup de ν , et non seulement pour un seul. C'est difficile, car ces informations sont en partie redondantes. Heureusement, il existe une théorie bien documentée pour traiter ce genre de question : la méthode du grand crible. Ce n'est pas la première fois que le grand crible est appliqué à des questions de ce genre : cf. [14] et surtout le travail [26] de Zywinia. Nous donnons deux théorèmes qui combinent la méthode du grand crible avec la complexité de Littlewood, le premier dans une situation de grand crible $|D_\nu|/|G_\nu| \rightarrow 0$, le second dans une situation de petit crible $|D_\nu|/|G_\nu| \rightarrow 1$. Tous deux sont inspirés de [26], mais le grand crible que nous utilisons n'est pas comme pour Zywinia le *crible de conjugaison* (cf. [14, 3.1]) qui par nature ne peut donner qu'une estimation qui dépend de $|D_\nu|$ et $|G_\nu|$ et non de $\lambda_{G_\nu}(D_\nu)$. Nous renvoyons à la preuve de ces théorèmes 14 et 15 et aux remarques qui les suivent pour de plus amples détails sur notre méthode. Disons simplement que ces théorèmes donnent de meilleurs résultats que ceux de Zywinia quand l'on dispose (ce qui est assez rare pour l'instant) de majorations de $\lambda(D_\nu)$ qui sont asymptotiquement meilleures que celle de Cauchy-Schwarz.

4.3.2. Borne obtenue par application directe de Chebotarev

THÉORÈME 13. – Soit α et β deux réels tels que $0 < \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. On fait les hypothèses suivantes :

- (a) Il existe un nombre $L > 0$ tels que tout intervalle de \mathbb{R} de longueur L contienne au moins un $\log |G_\nu|$
- (b) Il existe un nombre $Q > 0$ tel que $|D_\nu|/|G_\nu| \leq Q/|G_\nu|^\alpha$.
- (c) Il existe un nombre $R > 0$ tel que $\lambda_{G_\nu}(D_\nu) \leq R|G_\nu|^\beta$.

Supposons que toutes les fonctions L d'Artin des représentations de $G_\nu = \text{Gal}(L_\nu/\mathbb{Q})$ satisfassent GRH et la conjecture d'Artin. Alors on a

$$(25) \quad \pi_D(x) = O\left(x^{\frac{\alpha+2\beta}{2\alpha+2\beta}}(\log x)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right).$$

Démonstration. – Fixons x assez grand. Choisissons $\nu = \nu(x)$ tel que

$$e^{-L}x^{1/(2\alpha+2\beta)}(\log x)^{-2/(\alpha+\beta)} \leq |G_\nu| \leq x^{1/(2\alpha+2\beta)}(\log x)^{-2/(\alpha+\beta)},$$

ce qui est possible par (a). Appliquons le théorème de Chebotarev :

$$\pi(D_\nu, x) < \frac{|D_\nu|}{|G_\nu|} \text{Li}(x) + c_1 x^{1/2} \lambda(D_\nu) (\log x + \log M + \log |G_\nu|).$$

Majorons le terme principal (en utilisant $\text{Li}(x) < 2x/\log x$ pour x assez grand) :

$$\begin{aligned} \frac{|D_\nu|}{|G_\nu|} \text{Li}(x) &\leq 2Qx(\log x)^{-1} |G_\nu|^{-\alpha} \\ &\leq 2Qe^{\alpha L} x^{1-\alpha/(2\alpha+2\beta)} (\log x)^{-1+2\alpha/(\alpha+\beta)} \\ &= O\left(x^{(\alpha+2\beta)/(2\alpha+2\beta)} (\log x)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right). \end{aligned}$$

Majorons le terme d'erreur : comme $\log |G_\nu| = O(\log x)$ et $\log M$ est constant, $\log x + \log M + \log |G_\nu| = O(\log x)$ et

$$\begin{aligned} x^{1/2} \lambda(D_\nu) (\log x + \log M + \log |G_\nu|) &= O\left(x^{\frac{1}{2}} |G_\nu|^\beta (\log x)\right) \\ &= O\left(x^{\frac{1}{2}} (\log x) x^{\beta/(2\alpha+2\beta)} (\log x)^{-2\beta/(\alpha+\beta)}\right) \\ &= O\left(x^{(\alpha+2\beta)/(2\alpha+2\beta)} (\log x)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right). \end{aligned}$$

D'où $\pi(D, x) \leq \pi(D_\nu, x) = O\left(x^{(\alpha+2\beta)/(2\alpha+2\beta)} (\log x)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right)$ et le théorème est prouvé. \square

REMARQUE 17. – (i) En utilisant la majoration triviale $\lambda(D_\nu) \leq |D_\nu|$, on voit que (b) implique (c) avec $\beta = 1 - \alpha$. On voit donc que sous les hypothèses (a) et (b), le théorème entraîne

$$\pi(D, x) < c_{21} x^{1-\frac{\alpha}{2}} (\log x)^{2\alpha-1}.$$

Ce résultat est celui qu'obtient Serre ([23, Théorème 11(ii)]), sous GRH mais sans supposer Artin.

(ii) Si au lieu d'utiliser la majoration triviale, on utilise la majoration de Cauchy-Schwarz $\lambda(D_\nu) \leq |D_\nu|^{1/2}$, on voit que (b) implique (c) avec $\beta = (1 - \alpha)/2$, et donc que le théorème donne, sous les hypothèses (a) et (b) :

$$(26) \quad \pi(D, x) < c_{22} x^{\frac{1}{1+\alpha}} (\log x)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}}.$$

Ce résultat est celui qu'on obtient avec la version de Murty-Murty-Saradha du théorème de Chebotarev (en utilisant GRH et Artin). Bien qu'il ne soit pas explicitement énoncé en général dans [19], il l'est dans le cas particulier où les G_ν sont des sous-groupes de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ attachés à une forme modulaire propre pour les opérateurs de Hecke, cas dans lequel on a $\alpha = 1/4$: voir la première partie du premier théorème page 3 de [19]. Une astuce que nous utiliserons également permet d'ailleurs aux auteurs dans ce cas précis de se passer de la conjecture d'Artin.

(iii) L'exposant de x dans le théorème est toujours $\geq 1/2$ avec égalité si $\beta = 0$.

4.3.3. *Borne obtenue par une application du grand crible.* – Nous énonçons maintenant la majoration de $\pi(D, x)$ utilisant le grand crible. Comme les hypothèses que nous utilisons ressemblent à celles du théorème 13, nous les numérotons d'une manière qui tente de mettre en lumière cette ressemblance.

THÉORÈME 14. – Soit α et β deux réels tels que $0 < \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. On suppose que Λ est l'ensemble de tous les nombres premiers ne divisant pas un entier fixé $N \geq 1$ (on notera ℓ au lieu de ν un élément générique de Λ) et on suppose que pour deux constantes $P, R > 0$ les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (a') Pour tout $\ell \in \Lambda$, $\log |G_\ell| < R \log \ell$.
- (b') Pour tout $\ell \in \Lambda$, $\ell^\alpha - P\ell^{\alpha-1} \leq \frac{|G_\ell|}{|D_\ell|} \leq \ell^\alpha + P\ell^{\alpha-1}$.
- (c') Pour tout $\ell \in \Lambda$, $\lambda_{G_\ell}(D_\ell) \leq R\ell^\beta$.
- (d') Pour tout sous-ensemble fini m de Λ , l'application naturelle $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \prod_{\ell \in m} G_\ell$ est surjective.

Supposons que toutes les fonctions L d'Artin des représentations de G_ℓ , $\ell \in \Lambda$ satisfassent GRH et la conjecture d'Artin. Alors on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\pi(D, x) = O\left(x^{\frac{\alpha+4\beta+1}{2\alpha+4\beta+2} + \epsilon}\right),$$

les constantes implicites dépendant de P, R et ϵ .

Démonstration. – On utilise la méthode du grand crible, pour laquelle notre référence est [14, § 2.1 et suivants], dont on reprend les notations et la terminologie.

Mise en place du crible. – Tout d'abord, la donnée de grand crible $(Y, \Lambda, (Y_\ell)_{\ell \in \Lambda}, (\pi_\ell)_{\ell \in \Lambda})$ que nous utiliserons est la suivante :

- L'ensemble Y est l'ensemble des nombres premiers p ne divisant pas M .
- L'ensemble Λ est comme dans l'énoncé du théorème : $\Lambda = \{\ell \mid \ell \nmid N\}$.
- Pour $\ell \in \Lambda$, on définit un ensemble $Y_\ell = \{\underline{\text{oui}}, \underline{\text{non}}\}$, et une application surjective $\pi_\ell : Y \rightarrow Y_\ell$, telle que $\pi_\ell(p)$ soit la réponse à la question : « est-ce que l'élément Frob_p de G_ℓ appartient à D_ℓ ? »

Avant d'aller plus loin, munissons Y_ℓ de la mesure de probabilité μ_ℓ telle que $\{\underline{\text{oui}}\}$ soit de mesure $\mu_\ell(\{\underline{\text{oui}}\}) = \frac{|D_\ell|}{|G_\ell|}$. Ainsi, l'application naturelle $\psi_\ell : G_\ell \rightarrow Y_\ell$ qui envoie D_ℓ sur $\underline{\text{oui}}$ et son complémentaire sur $\underline{\text{non}}$ réalise l'espace mesuré Y_ℓ comme un quotient de l'espace G_ℓ muni de sa mesure invariante de probabilité.

Définissons ensuite l'ensemble à cribler (*siftable set* en anglais) X :

$$X = \{p \in Y, p \leq x\}.$$

Munissons cet ensemble de la mesure de comptage (notée μ dans [14] mais pour laquelle nous n'utiliserons pas de notation), et de son injection canonique dans Y (notée F dans [14],

sous-entendue ici). Le diagramme commutatif suivant a pour but d'aider à visualiser les différents objets introduits :

$$\begin{array}{ccccc}
 X \subset & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{p \mapsto \text{Frob}_{p, G_\ell}} & G_\ell \\
 & & & \searrow \pi_\ell & \downarrow \psi_\ell \\
 & & & & Y_\ell = \{\text{oui}, \text{non}\}.
 \end{array}$$

Soit \mathcal{L}^* un sous-ensemble fini de Λ (le *support premier du crible*) et \mathcal{L} un ensemble de parties de \mathcal{L}^* (le *support du crible*), que nous choisirons tous deux plus tard. Finalement, soit $\Omega = (\Omega_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}^*}$ la *famille d'ensembles criblants*, avec $\Omega_\ell \subset Y_\ell$ for $\ell \in \mathcal{L}^*$, qu'on définit simplement comme $\Omega_\ell = \{\text{non}\}$ pour tout $\ell \in \mathcal{L}^*$.

On peut alors définir l'ensemble criblé (cf. [14, définition 2.1] — cet ensemble dépend des données ci-dessus à l'exception de \mathcal{L} et des mesures choisies sur les Y_ℓ) :

$$\begin{aligned}
 S(X, \Omega, \mathcal{L}^*) &= \{p \in X, \pi_\ell(p) \notin \Omega_\ell \text{ pour tout } \ell \in \mathcal{L}^*\} \\
 &= \{p \leq x, p \nmid M, \text{Frob}_p \in D_\ell \text{ pour tout } \ell \in \mathcal{L}^*\} \\
 &\supset \tilde{D} \cap [1, x].
 \end{aligned}$$

On a donc

$$(27) \quad \pi(D, x) = |\tilde{D} \cap [1, x]| \leq |S(X, \Omega, \mathcal{L}^*)|.$$

Majoration de la constante de crible Δ . — Aux données ci-dessus on peut attacher une constante de crible $\Delta = \Delta(X, \mathcal{L})$ définie [14, prop. 2.4], que nous nous donnons pour but de majorer. Mais pour ce faire, il nous faut d'abord introduire, suivant [14] quelques objets construits à partir des données précédentes, et des notations pour les nommer.

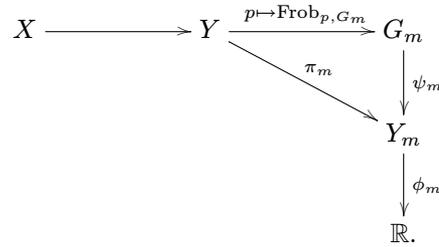
Pour $\ell \in \mathcal{L}^*$, soit ϕ_ℓ la fonction à valeurs réelles sur $Y_\ell = \{\text{oui}, \text{non}\}$ qui à oui associe $\sqrt{\frac{|G_\ell| - |D_\ell|}{|D_\ell|}}$ et à non associe $-\sqrt{\frac{|D_\ell|}{|G_\ell| - |D_\ell|}}$. Pour la structure hermitienne sur $L^2(Y_\ell, \mu_\ell, \mathbb{C})$, cette fonction ϕ_ℓ est orthogonale à la fonction constante 1, et de norme 1. C'est même, à une phase sans importance près, l'unique telle fonction dans $L^2(Y_\ell, \mathbb{C})$. On pose $\mathcal{B}_\ell^* = \{\phi_\ell\}$.

De même, pour $m \in \mathcal{L}$, on définit $Y_m = \prod_{\ell \in m} Y_\ell$ (produit comme espace mesuré), $\pi_m : Y \rightarrow Y_m$ comme le produit des π_ℓ , $\ell \in m$, la fonction $\phi_m \in L^2(Y_m, \mathbb{C})$ par $\phi_m = \otimes_{\ell \in m} \phi_\ell$, et finalement $\mathcal{B}_m^* = \{\phi_m\}$. On a donc par définition, pour tout $p \in Y$,

$$\phi_m(\pi_m(p)) = \prod_{\ell \in m} \phi_\ell(\pi_\ell(p)).$$

On définit L_m comme l'extension de \mathbb{Q} composée des L_ℓ pour $\ell \in m$, $G_m = \text{Gal}(L_m/\mathbb{Q})$, si bien que $G_m = \prod_{\ell \in m} G_\ell$ par l'hypothèse (d'). On a des applications naturelles surjectives $G_m \rightarrow G_\ell \rightarrow Y_\ell$ pour $\ell \in m$, et donc, en prenant leur produit une application $\psi_m : G_m \rightarrow Y_m$.

On a donc pour tout m le diagramme commutatif suivant :



Ces diagrammes sont compatibles en un sens évident pour $m \subset m'$ et redonnent le diagramme précédent pour $m = \{\ell\}$.

La proposition 2.9 de [14] donne :

$$(28) \quad \Delta \leq \max_{m \in \mathcal{L}} \sum_{n \in \mathcal{L}} |W(\phi_m, \phi_n)|$$

où

$$W(\phi_m, \phi_n) = \sum_{p \in X} \phi_m(\pi_m(p)) \overline{\phi_n(\pi_n(p))}.$$

Comme ϕ_n est à valeurs réelles, on peut supprimer la conjugaison complexe; par la commutativité et la compatibilité des diagrammes ci-dessus pour m, n et $m \cup n$, il vient

$$W(\phi_m, \phi_n) = \sum_{p \leq x, p \nmid M} (\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)(\text{Frob}_p, G_{m \cup n}).$$

La fonction à valeurs réelles $(\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)$ sur le groupe $G_{m \cup n} = G_s \times G_i$, où s est la différence symétrique de m et n , et i leur intersection (i.e., $s = (m \cup n) - (m \cap n)$, $i = m \cap n$) peut s'écrire

$$(\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n) = (\phi_s \circ \psi_s) \otimes (\phi_i \circ \psi_i)^2.$$

On voit en particulier que la moyenne des valeurs de cette fonction, $\mu_{G_{m \cup n}}((\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n))$ est nulle sauf si $s = \emptyset$, i.e., sauf si $m = n$, auquel cas cette moyenne est 1.

Appliquons le théorème de Chebotarev effectif, pour $f = (\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)$. On obtient

$$(29) \quad |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_1 \lambda_{G_{m \cup n}}((\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)) x^{1/2} (\log x + \log |G_{m \cup n}| + \log M).$$

Il nous faut maintenant estimer la norme de Littlewood apparaissant dans la formule ci-dessus. On a d'après la proposition 6

$$\lambda_{G_{m \cup n}}((\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)) = \prod_{\ell \in s} \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell \circ \psi_\ell) \times \prod_{\ell \in i} \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell^2 \circ \psi_\ell).$$

Or, comme $\phi_\ell \circ \psi_\ell = \sqrt{\frac{|G_\ell| - |D_\ell|}{|D_\ell|}} \mathbf{1}_{D_\ell} + \sqrt{\frac{|D_\ell|}{|G_\ell| - |D_\ell|}} \mathbf{1}_{G_\ell - D_\ell}$, on a puisque λ est une norme :

$$(30) \quad \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell \circ \psi_\ell) \leq \sqrt{\frac{|G_\ell| - |D_\ell|}{|D_\ell|}} \lambda(D_\ell) + \sqrt{\frac{|D_\ell|}{|G_\ell| - |D_\ell|}} \lambda(G_\ell - D_\ell)$$

$$(31) \quad \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell^2 \circ \psi_\ell) \leq \frac{|G_\ell| - |D_\ell|}{|D_\ell|} \lambda(D_\ell) + \frac{|D_\ell|}{|G_\ell| - |D_\ell|} \lambda(G_\ell - D_\ell).$$

Or d'après le corollaire 2, $\lambda(G_\ell - D_\ell) \leq \lambda(D_\ell) + 1$. On obtient alors, si $\frac{|G_\ell|}{|D_\ell|}$ est assez grand (ce qui par (b') ne peut être en défaut que pour un nombre fini de ℓ , qu'on peut alors enlever de l'ensemble Λ en changeant l'entier N) :

$$(32) \quad \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell \circ \psi_\ell) < \sqrt{2 \frac{|G_\ell|}{|D_\ell|}} \lambda(D_\ell)$$

et

$$(33) \quad \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell^2 \circ \psi_\ell) < \frac{|G_\ell|}{|D_\ell|} \lambda(D_\ell).$$

[Pour vérifier (32), on pose $t = |G_\ell|/|D_\ell|$ si bien que la quantité à majorer devient $(\sqrt{t-1} + \sqrt{1/(t-1)})\lambda(D_\ell) + \sqrt{1/(t-1)} \leq \sqrt{t+1} + 1/\sqrt{t-1} \lambda(D_\ell) + \sqrt{1/(t-1)}\lambda(D_\ell)$ en utilisant que $\lambda(D_\ell) \geq 1$, et il est clair que pour t assez grand, cette quantité est inférieure à $\sqrt{2t}\lambda(D_\ell)$. La majoration (33) est encore plus facile.]

En appliquant ces estimations dans (29), on obtient

$$\begin{aligned} & |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| \\ & < c_1 \left(\prod_{\ell \in s} \sqrt{2 \frac{|G_\ell|}{|D_\ell|}} \lambda(D_\ell) \right) \left(\prod_{\ell \in i} \frac{|G_\ell|}{|D_\ell|} \lambda(D_\ell) \right) x^{1/2} (\log x + \log |G_{m \cup n}| + \log M). \end{aligned}$$

Donc, en utilisant les hypothèses (b') et (c'), et que $1 + P/\ell < \sqrt{2}$ pour ℓ assez grand :

$$\begin{aligned} & |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| \\ & < c_1 \left(\prod_{\ell \in s} \ell^{\alpha/2+\beta} \right) \left(\prod_{\ell \in i} \ell^{\alpha+\beta} \right) \left(\prod_{\ell \in m \cup n} 2R \right) x^{1/2} (\log x + \log |G_{m \cup n}| + \log M). \end{aligned}$$

Il est temps de restreindre le choix du support premier de crible \mathcal{L}^* , et du support de crible \mathcal{L} , qui jusqu'à présent étaient quelconques. Soit $Q \geq 1$ un paramètre réel, que nous choisirons ultérieurement. Soit \mathcal{L}_Q^* l'ensemble des $\ell \in \Lambda$ tels que $\ell \leq Q$, et \mathcal{L}_Q l'ensemble des $m \subset \mathcal{L}_Q$ tels que $\prod_{\ell \in m} \ell \leq Q$. Pour ce choix de \mathcal{L}^* , \mathcal{L} , on a $\prod_{\ell \in s} \ell^{\alpha/2} \prod_{\ell \in i} \ell^\alpha = \prod_{\ell \in m} \ell^{\alpha/2} \prod_{\ell \in n} \ell^{\alpha/2} < Q^\alpha$ et $\prod_{\ell \in s} \ell^\beta \prod_{\ell \in i} \ell^\beta < \prod_{\ell \in m} \ell^\beta \prod_{\ell \in n} \ell^\beta < Q^{2\beta}$. Quant au facteur parasite $\prod_{\ell \in m \cup n} 2R$ il se majore ainsi : le nombre d'éléments $\ell \in m$ (ou $\ell \in n$) est le nombre de facteurs premiers d'un entier sans facteurs carrés $< Q$; il est donc (cf. [9, p. 344-345]) strictement inférieur à $c_{23} \log Q / \log \log Q$, où c_{23} est une constante absolue, et le facteur parasite est donc $< (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q}$. On obtient donc, en utilisant (a') qui implique $\log |G_{m \cup n}| < 2R \log Q$:

$$|W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_1 Q^{\alpha+2\beta} (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q} x^{1/2} (\log x + 2R \log Q + \log M),$$

ce qu'on simplifie en :

$$\forall \epsilon > 0, \quad |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_{24} Q^{\alpha+2\beta+\epsilon} x^{1/2} \log x,$$

où c_{24} est une constante ne dépendant que de R et ϵ (et de M). Donc, d'après (28) et puisque $|\mathcal{L}_Q^*| < Q$

$$(34) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \Delta(X, \mathcal{L}_Q) < \text{Li}(x) + c_{24} Q^{\alpha+2\beta+1+\epsilon} x^{1/2} \log x.$$

C'est la majoration de Δ que nous cherchions.

Minoration de la constante de crible H . – La constante H est définie (cf. [14, (2.4)]) par

$$H = \sum_{m \in \mathcal{L}} \prod_{\ell \in m} \frac{\mu_\ell(\{\text{non}\})}{\mu_\ell(\{\text{oui}\})} = \sum_{m \in \mathcal{L}} \prod_{\ell \in m} \frac{1 - |D_\ell|/|G_\ell|}{|D_\ell|/|G_\ell|}.$$

Posons $f(m) = \frac{1}{m^\alpha} \prod_{\ell|m, \ell \nmid N} \frac{1 - |D_\ell|/|G_\ell|}{|D_\ell|/|G_\ell|}$ pour m sans facteur carré. En particulier, pour ℓ un nombre premier ne divisant pas N , $f(\ell) = \frac{1 - |D_\ell|/|G_\ell|}{\ell^\alpha |D_\ell|/|G_\ell|}$, et $f(\ell) = 0$ si $\ell \mid N$. Par l'hypothèse (b'), on a donc $|f(\ell) - 1| = O(\ell^{-\alpha})$ quand $\ell \rightarrow \infty$. D'après le théorème de Lau et Wu ([17, Theorem 1] ou [14, Theorem G.1]), on a

$$\left| \sum_{m \leq Q}^b f(m) - cQ \right| < c_{25} Q (\log Q)^{-1} \log \log Q,$$

où $c = \prod_{\ell} (1 - \ell^{-1})(1 + f(\ell)\ell^{-1})$ est une constante strictement positive et \sum^b désigne la somme restreinte aux entiers sans facteurs carrés. On a alors

$$(35) \quad H = \sum_{m \leq Q}^b m^\alpha f(m)$$

$$(36) \quad \geq (Q/2)^\alpha \sum_{Q/2 \leq m \leq Q}^b f(m)$$

$$(37) \quad \geq (Q/2)^\alpha cQ/2 + O(Q(\log Q)^{-1} \log \log Q),$$

ce qui implique

$$H^{-1} < c_{26} Q^{-\alpha-1}$$

quand Q est assez grand, la constante c_{26} ne dépendant que de P .

Fin de la preuve. – D'après le théorème du grand crible ([14, prop. 2.3]), on a $\pi(D, x) < \Delta H^{-1}$, ce qui donne, utilisant notre majoration de Δ et notre minoration de H :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \pi(D, x) < c_{26} \frac{\text{Li}(x)}{Q^{1+\alpha}} + c_{26} c_{24} Q^{2\beta+\epsilon} x^{1/2} \log x,$$

pour $x \geq 3$ et Q suffisamment grand. Prenons alors $Q = Q(x) = x^{\frac{1}{2\alpha+4\beta+2}}$, ce qui est possible si l'on suppose que x est suffisamment grand. On obtient alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \pi_D(x) < c_{27} x^{\frac{\alpha+4\beta+1}{2\alpha+4\beta+2} + \epsilon}$$

pour x suffisamment grand, et le théorème suit. \square

REMARQUE 18. – (i) Zywnina m'a signalé une erreur de calcul dans une première version de la preuve de ce théorème. Plus tard, Lucile Devin et un *referee* anonyme m'en ont signalé une seconde. Qu'ils en soient tous remerciés ici.

(ii) On pourrait améliorer le facteur x^ϵ en raffinant la majoration (32), puis celle du « facteur parasite ». Comme ce qui nous intéresse dans cet article est d'améliorer, quand c'est possible, l'exposant de x dans les majorations, nous avons renoncé à le faire. Lucile Devin m'a indiqué avoir obtenu, par une modification du crible utilisée dans la preuve, une majoration en $O\left(x^{\frac{\alpha+4\beta+1}{2\alpha+4\beta+2}} \log(x)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2\beta+1}}\right)$.

(iii) L'hypothèse (d') est évidemment une hypothèse d'indépendance : elle revient à dire que les extensions L_ℓ de \mathbb{Q} pour $\ell \in \Lambda$ sont linéairement disjointes.

- (iv) Si $|G_\ell| = \ell^d + O(\ell^{d-1})$ pour un certain $d > 0$ (ce qui est souvent le cas dans les applications), les hypothèses (b') et (c') du théorème 14 impliquent les hypothèses (b) et (c) du théorème 13 (avec α et β remplacés par α/d et β/d , mais cela n'a pas d'importance puisque la conclusion du théorème 13 est homogène de degré zéro en α et β .) On peut se demander lequel de ces deux théorèmes donne le meilleur résultat. La réponse est simple : quand $\alpha < 1$, le théorème 14, obtenu avec le crible, est meilleur, quelle que soit la valeur de β . Quand $\alpha > 1$, c'est le théorème 13, obtenu sans le crible, qui est meilleur. Quand $\alpha = 1$, les deux théorèmes donnent presque le même résultat, au facteur x^ϵ près. En termes imagés, c'est quand le grand crible n'est pas trop grand qu'il est préférable de l'utiliser.
- (v) En supposant toujours $|G_\ell| = \ell^d + O(\ell^{d-1})$, on peut comme pour le théorème 13, au lieu d'utiliser une estimation maison (c') de $\lambda(D_\ell)$, sous les hypothèses (a') et (b') seules, déduire que (c') est vraie avec $\beta = d - \alpha$ (si l'on utilise la majoration triviale $\lambda(D_\ell) \leq |D_\ell|$) ou même avec $\beta = (d - \alpha)/2$ (si l'on utilise la majoration de Cauchy-Schwarz). On obtient alors, pour tout $\epsilon > 0$,
- (38) $\forall \epsilon > 0 \quad \pi_D(x) = O\left(x^{\frac{4d-3\alpha+1}{4d-2\alpha+2}} + \epsilon\right)$ avec la majoration triviale,
- (39) $\forall \epsilon > 0 \quad \pi_D(x) = O\left(x^{\frac{2d-\alpha+1}{2d+2}} + \epsilon\right)$ avec la majoration de Cauchy-Schwarz.

La majoration (38) est valable sous GRH seule, sans supposer Artin. En effet, la même preuve s'applique sans utiliser Artin, à condition d'utiliser le théorème de Chebotarev effectif de Lagarias-Odlyzko-Serre (18) au lieu du théorème 1 et de remplacer partout dans la preuve la norme de Littlewood λ par la norme L^1 .

- (vi) Dans [26], une version différente du grand crible est utilisée pour le même problème dans un cas particulier. Au lieu de prendre pour Y_ℓ un ensemble à deux éléments comme nous l'avons fait, avec Ω_ℓ l'un de ces éléments, Zywna prend pour Y_ℓ l'ensemble des classes de conjugaison du groupe $G_\ell^\#$ et pour Ω_ℓ l'image du complémentaire de D_ℓ dans $G_\ell^\#$. Ainsi, notre choix $(Y_\ell, \{\text{non}\})$ est un quotient du choix $(G_\ell^\#, \Omega_\ell)$ par la relation d'équivalence évidente (celle dont les classes d'équivalences sont D_ℓ et $G_\ell - D_\ell$), et ceci est également vrai pour les mesures que Zywna et nous mettons sur $G_\ell^\#$ et Y_ℓ . Un aspect important du choix de Zywna est que l'estimation donnée par le grand crible ne dépend que de la taille $|D_\ell|$ des D_ℓ , non de leur position dans G_ℓ . Autrement dit, toute information qu'on pourrait avoir sur $\lambda(D_\ell)$ est perdue. Ceci provient du fait que la définition de la constante Δ ne fait pas intervenir les $\Omega_\ell = D_\ell$, tandis que celle de la constante H ne fait intervenir que la taille des Ω_ℓ ou plus précisément, leur mesure dans Y_ℓ . Cet aspect, qui souvent est un des avantages du crible (cf. [14, §2.5]), est ici évidemment un inconvénient.

Dans le cas particulier considéré par Zywna, on a $G_\ell = \text{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$, D_ℓ est l'ensemble des matrices de trace fixée $a \neq 0$, et on a donc $d = 4$, $\alpha = 1$. La borne qu'obtient Zywna est $\Pi_D(x) = O(x^{4/5}/\log(x)^{1/5})$ avec le même exposant de x (à ϵ près) que celle que nous obtenons à partir de (38), i.e., en utilisant la majoration de Cauchy-Schwarz de $\lambda(D_\ell)$ (qui dans ce cas est la meilleure possible, cf. théorème 11).

Plus généralement, on peut voir qu'appliquer le théorème 14 avec la majoration de Cauchy-Schwarz donne le même résultat (aux facteurs en $o(x^\epsilon)$ près) que la méthode

de Zywinia, du moins quand le produit du carré du nombre de représentations irréductibles de G_ℓ par la dimension maximale d'une représentation irréductible de G_ℓ est du même ordre de grandeur que $|G_\ell|$, ce qui est le cas si G_ℓ est par exemple $G(\mathbb{F}_\ell)$ pour G un groupe réductif.

On a supposé dans la preuve du théorème précédent que $\alpha > 0$, hypothèse utilisée à plusieurs reprises dans les calculs. En fait, la méthode est également intéressante quand $\alpha = 0$, mais les calculs sont un peu plus compliqués, en particulier l'évaluation de la constante du crible H . Nous donnons maintenant un exemple de résultat obtenu par cette méthode, inspiré de [26, §4] avec la même modification que ci-dessus pour tenir compte de la complexité de Littlewood.

THÉORÈME 15. – Soit β un nombre réel tel que $0 \leq \beta \leq 1$. On suppose que Λ est l'ensemble constitué de tous les nombres premiers ℓ ne divisant pas un entier fixé sans facteurs carrés $N \geq 1$, et de l'élément N et on suppose que pour deux constantes $P, R > 0$ les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (a') On a $\log |G_\ell| = O(\log \ell)$.
- (b') Pour tout nombre premier $\ell \in \Lambda$, $\ell - P \leq \frac{|G_\ell|}{|G_\ell - D_\ell|} \leq \ell + P$.
- (c') Pour tout nombre premier $\ell \in \Lambda$, $\lambda_{G_\ell}(D_\ell) \leq R\ell^\beta$.
- (d') Pour tout sous-ensemble fini m de Λ ne contenant pas N , l'application naturelle $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow \prod_{\ell \in m} G_\ell$ est surjective.

Supposons que toutes les fonctions L d'Artin des représentations de G_ℓ , $\ell \in \Lambda$, satisfassent GRH et la conjecture d'Artin. Posons

$$C = \frac{|D_N|}{|G_N| \prod_{\ell|N} (1 - \frac{1}{\ell})} \prod_{\ell \nmid N} \frac{|D_\ell|}{|G_\ell|(1 - \frac{1}{\ell})} = \prod_{\nu \in \Lambda} \frac{|D_\nu| \nu}{|G_\nu| \phi(\nu)}.$$

On a :

$$\pi(D, x) \leq (4\beta + 4 + o(1))C \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Démonstration. – La preuve suit de près celle du théorème 14. Nous nous contentons d'indiquer les grandes lignes en insistant sur ce qui change par rapport à la preuve du théorème 14.

Mise en place du crible. – Tout d'abord, la donnée de grand crible $(Y, \Lambda, (Y_\ell)_{\ell \in \Lambda}, (\pi_\ell)_{\ell \in \Lambda})$ que nous utiliserons est la suivante :

- L'ensemble Y est l'ensemble des nombres premiers p ne divisant pas M .
- L'ensemble Λ est comme dans l'énoncé du théorème : $\Lambda = \{\ell \mid \ell \nmid N\} \cup \{N\}$.
- Pour $\ell \in \Lambda$, on définit un ensemble $Y_\ell = \{\text{oui}, \text{non}\}$, et une application surjective $\pi_\ell : Y \rightarrow Y_\ell$, telle que $\pi_\ell(p)$ soit la réponse à la question : « est-ce que l'élément Frob_p de G_ℓ appartient à D_ℓ »?

Le reste de la mise en place du crible est la même que dans la preuve du théorème 14.

Majoration de la constante Δ . – On choisit comme support premier du crible \mathcal{L}^* l'ensemble \mathcal{L}_Q^* constitué des nombres $\ell \in \Lambda - \{N\}$, $\ell \leq Q$, et de N , et pour \mathcal{L} l'ensemble des parties m de $\mathcal{L}^* - \{N\}$ tels que $\prod_{\ell \in m} \ell < Q$, où $Q > 0$ sera choisi plus tard.

Toutes les formules jusqu'à (30) et (31) incluses restent vraies, en particulier

$$(40) \quad |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_1 \lambda_{G_{m \cup n}}((\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)) x^{1/2} (\log x + \log |G_{m \cup n}| + \log M).$$

Mais l'estimation qui suit (31) n'est plus valable : c'est $|G_\ell|/|G_\ell - D_\ell|$ qui tend vers l'infini et non plus $|G_\ell|/|D_\ell|$. En inversant les rôles de D_ℓ et de $G_\ell - D_\ell$, on obtient, pour ℓ assez grand, au lieu de (33) et (32) :

$$(41) \quad \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell^2 \circ \psi_\ell) < \frac{|G_\ell|}{|G_\ell - D_\ell|} \lambda(G_\ell - D_\ell)$$

et

$$(42) \quad \lambda_{G_\ell}(\phi_\ell \circ \psi_\ell) < \sqrt{2 \frac{|G_\ell|}{|G_\ell - D_\ell|}} \lambda(G_\ell - D_\ell).$$

En utilisant que, quitte à remplacer R par $R + 1$, $\lambda(G_\ell - D_\ell) \leq R\ell^\beta$ par (c'), et que $\frac{|G_\ell|}{|G_\ell - D_\ell|} \leq R\ell$ par (b'), on obtient :

$$(43) \quad |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_1 \left(\prod_{\ell \in s} \ell^{1/2+\beta} \right) \left(\prod_{\ell \in i} \ell^{1+\beta} \right) \left(\prod_{\ell \in m \cup n} 2R \right) x^{1/2} (\log x + \log |G_{m \cup n}|)$$

où i est l'intersection et m la différence symétrique des sous-ensembles m et n du support du crible \mathcal{L}_Q . Le facteur $(\prod_{\ell \in s} \ell^{1/2+\beta}) (\prod_{\ell \in i} \ell^{1+\beta})$ se majore comme dans la preuve du théorème 14 par $Q^{1+2\beta}$ (c'est le même calcul avec $\alpha = 1$). Comme dans la preuve du théorème précédent, le facteur parasite $(\prod_{\ell \in m \cup n} 2R)$ est $< (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q}$. On obtient donc :

$$(44) \quad |W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_1 Q^{1+2\beta} x^{1/2} (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q}$$

et finalement :

$$(45) \quad \Delta(X, \mathcal{L}_Q) < \text{Li}(x) + c_{24} Q^{2\beta+2} (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q}.$$

Minoration de la constante du crible H , d'après Zywna. – L'estimation de $H = H(\mathcal{L}^*)$ est plus délicate. Heureusement, elle a été faite par Zywna, qui montre (cf. [26, §4.2])

$$H = C^{-1} \log Q + o(\log Q),$$

où

$$C = \frac{|D_N|}{|G_N| \prod_{\ell|N} (1 - \frac{1}{\ell})} \prod_{\ell \nmid N} \frac{|D_\ell|}{|G_\ell| (1 - \frac{1}{\ell})}.$$

Fin de la preuve. – Le théorème du grand crible donne donc, pour x assez grand :

$$\pi(D, x) < C \frac{\text{Li}(x) + c_{24} Q^{2\beta+2} x^{1/2} (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q}}{\log Q + o(\log Q)}.$$

En prenant $Q = x^{1/(4\beta+4)} c_{28}^{-\log Q / \log \log Q}$ où c_{28} est une constante choisie assez grande relativement à c_{23} , on voit que $c_{24} Q^{2\beta+2} x^{1/2} (2R)^{2c_{23} \log Q / \log \log Q} = o(\text{Li}(x))$, et que $\log Q \sim \frac{1}{4\beta+4} \log x$. On obtient donc

$$\pi(D, x) < (4\beta + 4 + o(1)) C \frac{x}{(\log x)^2}$$

d'où le théorème. □

REMARQUE 19. – Il peut être utile de noter qu'on a en fait montré :

$$|\{p \leq x \mid p \nmid M \text{ et } \forall \nu \in \Lambda \text{ tel que } \nu < Q, \text{ on a } \text{Frob}_{p, G_\nu} \in D_\nu\}| < (4\beta+4+o(1)) C \frac{x}{(\log x)^2}$$

où Q est n'importe quel nombre tel que $Q \gg x^{\frac{1}{4\beta+4}}$.

5. Applications

5.1. Réductions des polynômes à coefficients entiers

Nous prouvons ici le théorème 4 et d'autres résultats du même type.

THÉORÈME 16. – *Soit P un polynôme unitaire irréductible à coefficients entiers, de degré $n \geq 1$. Soit M le produit des nombres premiers divisant le discriminant de P . Alors sous GRH et la conjecture d'Artin :*

- (a) *Il existe un nombre premier $p < c_3 n^2 (\log M + n \log n)^2$ ne divisant pas M tel que le polynôme $P(X) \pmod{p}$ admette au moins une racine dans \mathbb{F}_p .*
- (b) *Il existe un nombre premier $p < c_3 n^4 (\log M + n \log n)^2$ ne divisant pas M tel que le polynôme $P(X) \pmod{p}$ admette au moins deux racines dans \mathbb{F}_p .*
- (c) *Il existe un nombre premier $p < c_3 n^4 (\log M + n \log n)^2$ ne divisant pas M tel que le polynôme $P(X) \pmod{p}$ n'admette aucune racine dans \mathbb{F}_p .*

Démonstration. – Soit L le corps de décomposition de P , et $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ munie de son action naturelle transitive sur l'ensemble des racines de P dans \mathbb{C} , qu'on identifie à $\{1, \dots, n\}$. Comme, pour p un nombre premier ne divisant pas M , le nombre de racines de $P \pmod{p}$ est égal au nombre de points fixés par l'action de $\text{Frob}_p \in G$ sur $\{1, \dots, n\}$, un nombre premier p satisfait la condition du théorème dans le cas (a) (resp. (b), resp. (c)) si et seulement si Frob_p appartient au sous-ensemble D des éléments de G ayant au moins un point fixe (resp. ayant au moins deux point fixes, resp. n'ayant pas de point fixe.) Par le théorème 3 il existe un tel p qui soit $< c_3 \varphi_G(D)^2 (\log(M) + \log |G|)^2$. Le résultat découle donc de la proposition 15 et de la majoration triviale $\log |G| \leq \log n! \leq n \log n$. □

REMARQUE 20. – Dans chacun des cas, la majoration sur p du théorème est polynomiale en $n = \deg P$. Ceci est à comparer avec la majoration qu'on obtiendrait par une application directe du théorème de Lagarias-Odlyzko, cf. (21) (resp. Murty et Murty, cf. (22)) qui serait en $n(n!)^2 \log n$ (resp. $nn! \log n$), donc super-exponentielle.

Une majoration polynomiale dans le cas (a) du théorème ci-dessus avait néanmoins déjà été obtenue sous GRH par Weinberger ([25]) et Adleman-Odlyzko ([1]), indépendamment. Il sera peut-être intéressant de comparer brièvement leurs preuves (qui sont essentiellement les mêmes) avec la nôtre (qui est différente, mais possède un point commun avec celles-ci). Reformulée dans le langage de cet article, ces preuves reviennent à étudier la fonction $\pi(f, x)$ (ou une variante comme $\psi_1(f, x)$, peu importe), comptant les nombres premiers $p < x$ avec multiplicité égale à $f(\text{Frob}_{p,L})$, i.e., au nombre de points fixes de $\text{Frob}_{p,L}$ agissant sur $\{1, \dots, n\}$. On retrouve dans ce cas particulier donc la même idée que dans notre preuve du théorème 3 d'utiliser une fonction auxiliaire f sur G (plutôt que la fonction caractéristique des éléments de G ayant au moins un point fixe). Cependant nous avons dit plus haut (cf. remarque 16) que cette idée ne menait à rien quand on la combinait à la version du théorème de Chebotarev de Lagarias-Odlyzko, la seule disponible à l'époque. Comment Adleman-Odlyzko et Weinberger concluent-ils donc? En utilisant la simple observation suivante, que $\pi(f, x)$ est égal au nombre d'idéaux premiers \mathfrak{p} du corps de rupture K du polynôme P de degré 1 sur \mathbb{Q} avec $N(\mathfrak{p}) < x$. Notons que le corps K n'est pas en général galoisien, mais qu'il est de degré n , tandis que le corps de décomposition L de P peut être de degré $n!$. On utilise ensuite une estimation élémentaire de norme $d_{\mathfrak{p}}$ de degré plus grand que 1 avec $N(\mathfrak{p}) < x$ (ils sont absolument négligeables) et le « théorème des nombres premiers » pour K (sous GRH) estimant le nombre de \mathfrak{p} avec $N(\mathfrak{p}) \leq x$ pour conclure. La démonstration n'utilise donc pas le théorème de Chebotarev effectif, mais seulement le théorème des nombres premiers pour K (qui est si l'on y tient une forme de Chebotarev effectif, mais pour l'extension triviale K/K).

THÉORÈME 17. – *Soit P un polynôme unitaire irréductible à coefficients entiers, de degré $n \geq 1$. Soit M le produit des nombres premiers divisant le discriminant de P . Supposons GRH et Artin. S'il existe un nombre premier $p \nmid M$ tel que le polynôme $P \pmod{p}$ soit irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, alors il en existe un qui soit $< c_3 4^{n-1} (\log M + n \log n)^2$.*

Démonstration. – On garde les notations de la preuve du théorème précédent. Pour $p \nmid M$, $\text{Frob}_{p,G}$ est un n -cycle si et seulement si $P \pmod{p}$ est irréductible. L'hypothèse implique donc que l'ensemble D des n -cycles dans G est non vide. Comme le centralisateur d'un n -cycle dans S_n est le sous-groupe d'ordre n qu'il engendre, il en est de même de son centralisateur dans G , et donc la classe de conjugaison d'un n -cycle est de cardinal $|G|/n$. On a donc $|D| \geq |G|/n$. Par ailleurs $\lambda_G(D) \leq 2^{n-1}/n$ d'après la proposition 10 et la proposition 8. On a donc $\varphi_G(D) \leq 2^{n-1}$ par la proposition 13 et le résultat en découle par le théorème 3. \square

REMARQUE 21. – Dans ce cas aussi, une application directe du théorème de Lagarias-Odlyzko-Serre donnerait une borne super-exponentielle.

5.2. Systèmes compatibles et conjecture de Lang-Trotter généralisée

5.2.1. *Position du problème.* – On aimerait partir d'un (iso-)motif pur E défini sur \mathbb{Q} . Comme, faute d'avoir prouvé les conjectures standard et la conjecture de Hodge, on ne dispose pas encore d'une catégorie des motifs (même en se restreignant aux sommes directes de motifs purs) ayant toutes les propriétés qu'on attend d'elle, nous partirons directement du système compatible de représentations galoisiennes attachées au motif pur E sans faire référence à E , en supposant explicitement les propriétés qu'on attend d'un tel système attaché à un motif.

On se donne donc un *système compatible de représentations galoisiennes*, pur, à savoir :

- (a) un entier $n \geq 1$ (la *dimension*)
- (b) un entier sans facteurs carrés $M \geq 1$ (le *discriminant réduit*) ;
- (c) pour tout ℓ , une représentation continue $\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ (les *représentations galoisiennes*)

tels que

- (i) Pour tout ℓ , ρ_ℓ est non ramifiée aux nombres premiers p ne divisant pas $M\ell$.
- (ii) Pour tout p ne divisant pas M , il existe un polynôme $\Xi_p(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $\Xi_p(X) = X^n + (-1)^n a_p X^{n-1} + \dots$, tel que pour tout $\ell \neq p$, le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)$ soit Ξ_p .
- (iii) Il existe un entier $w < 0$ tel que pour tout p ne divisant pas M , les racines de $\Xi_p(x)$ dans \mathbb{C} soient toutes de module $p^{-w/2}$.

Il est clair que les polynômes $\Xi_p(X)$ et l'entier w sont déterminés uniquement par les données (a), (b), (c). L'entier w s'appelle le poids du système compatible. L'application qui à tout premier p ne divisant pas M associe l'entier a_p (cf. (ii)) tel que pour tout $\ell \neq p$, $a_p = \mathrm{tr} \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)$ jouera un rôle essentiel. Par Chebotarev, elle détermine le système compatible à un isomorphisme près.

Nous supposons également que le système compatible satisfait la propriété suivante, qui est conjecturée pour tout système compatible attachée à un motif pur

- (iv) Il existe un entier $N \geq 1$, et un sous-schéma en groupes réductif G de GL_n défini sur $\mathbb{Z}[1/N]$, contenant le centre de GL_n , tel que pour tout ℓ ne divisant pas N , $\rho_\ell(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ est contenu dans $G(\mathbb{Z}_\ell)$, Zariski-dense dans $G(\mathbb{Q}_\ell)$, et est un sous-groupe ouvert d'indice borné indépendamment de ℓ de $G(\mathbb{Z}_\ell)$.

L'entier N et le schéma en groupes G sont essentiellement bien déterminés : si N' est un autre entier ≥ 1 et G' un autre sous-schéma en groupes satisfaisant la condition (iv), il existe un N'' divisible par N et N' tels que $G \simeq G'$ sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[1/N'']$. On fixe dorénavant un tel N et G , et on notera $G_{\mathbb{Q}}$ la fibre générique de G et $G_{\mathbb{F}_\ell}$ pour $\ell \nmid N$ ses fibres spéciales. La dimension des groupes $G_{\mathbb{F}_\ell}$ et de $G_{\mathbb{Q}}$ est constante, de même que leur rang (dimension d'un tore maximale, non nécessairement déployé), et on les notera d et r respectivement.

La propriété (iv) est une combinaison de plusieurs conjectures faites dans [24] (et qui pour la plupart, faisaient déjà partie du folklore : voir l'introduction de [24]). Plus précisément, l'existence du groupe $G_{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout ℓ , $\rho_\ell(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ est Zariski-dense dans $G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_\ell)$ est [24, 3.2], le fait que $G_{\mathbb{Q}}$ contienne le centre de GL_n résulte de l'existence de l'homomorphisme $\mathbf{w} : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{Q}}$ associé à la gradation par le poids (cf. [24, § 5]) et de

notre hypothèse $w < 0$ (en fait, ce qui compte est $w \neq 0$), l'existence de la forme entière G résulte de la théorie des \mathbb{Z} -formes exposée au [24, § 10] et la dernière assertion est [24, 10.3].

- EXEMPLE 2. – Si $f = \sum a_n q^n \in \mathbb{Z}[q]$ est une forme modulaire parabolique de niveau $\Gamma_0(M)$, poids $k \geq 1$, et propre pour les opérateurs de Hecke T_p avec $p \nmid M$, alors il existe d'après Eichler-Shimura (si $k = 2$) et Deligne (si $k > 2$) un système compatible attaché à f , de dimension $n = 2$, de poids $w = 1 - k$, de déterminant réduit le radical de M et dont les a_p sont les coefficients a_p de f . Un tel système satisfait toujours (iv) et le groupe G est GL_2 si f n'a pas de multiplication complexe.
- Si A est une variété abélienne sur \mathbb{Q} ayant bonne réduction en dehors de M (un entier sans facteurs carrés), la famille des représentations sur les modules de Tate de A est un système compatible associé à A de dimension $2g$, poids $w = -1$, discriminant réduit M . On sait que ce système satisfait (iv) pour un groupe G tel que $G_{\mathbb{Q}}$ est le groupe de Mumford-Tate de A . Dans le cas particulier où A est la jacobienne d'une courbe propre lisse et géométriquement connexe C/\mathbb{Q} , les a_p du système compatible ont l'interprétation arithmétique bien connue depuis Weil : $a_p = |C(\mathbb{F}_p)| - 1 - p$.

Fixons donc un système de représentations galoisiennes comme ci-dessus. Fixons par ailleurs un entier $a \in \mathbb{Z}$. Soit

$$\pi(a, x) = |\{p \mid p < x \text{ et } a_p = a\}|.$$

Quand le système compatible est associé à une forme modulaire f ou une variété abélienne A , on écrira souvent $\pi_f(a, x)$ ou $\pi_A(a, x)$.

Déterminer l'ordre de grandeur de $\pi(a, x)$ quand x tend vers l'infini est une vaste question ouverte généralisant la conjecture de Lang-Trotter, dont on ne connaît même pas de réponse conjecturale en général (cf. la discussion de [12, page 423 et suivantes]). Rappelons seulement la majoration conjecturale bien connue suivante :

CONJECTURE 1 (cf. [16, 23]). – *Si le système compatible (ρ_ℓ) est attaché à une forme modulaire $f = \sum a_n q^n$ à coefficients entiers, non CM, propre pour les opérateurs de Hecke, de poids k , on a, quel que soit $a \in \mathbb{Z}$,*

$$\pi(a, x) = \begin{cases} O(x^{1/2} / \log x) & \text{si } w = -1 \\ O(\log \log x) & \text{si } w = -2 \\ O(1) & \text{si } w \leq -3. \end{cases}$$

Rappelons que le poids w du système compatible attaché à f est $w = 1 - k$.

QUESTION 2. – *Est-il raisonnable de généraliser la conjecture 1 à tout système compatible tel que G est connexe ?*

En tout cas, Katz énonce une conjecture qui implique celle-ci dans le cas où le système est attaché à une courbe propre et lisse de genre g de groupe de Mumford-Tate GSP_{2g} .

Quoi qu'il en soit, nous sommes très loin de démontrer ces conjectures. Le but de ce § est seulement de prouver en supposant vraies GRH et la conjecture d'Artin, et sous certaines hypothèses sur le système compatible, des majorations de $\pi(a, x)$ qui sont meilleures que celles obtenues jusqu'ici dans la littérature.

5.2.2. *Majoration en fonction de la complexité de Littlewood des matrices de trace a dans $G(\mathbb{F}_\ell)$.* – Notre premier résultat est une application directe du théorème 13 :

THÉORÈME 18. – *Soit (ρ_ℓ) un système compatible comme ci-dessus, vérifiant les propriétés (i) à (iv). On suppose de plus que le groupe G est connexe, et que sa dimension d est ≥ 1 . Soit β un nombre réel tel qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $\ell \nmid N$,*

$$\lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a}) \leq R|G(\mathbb{F}_\ell)|^\beta.$$

Alors, sous GRH et la conjecture d'Artin, on a

$$\pi(a, x) = O\left(x^{\frac{2\beta d+1}{2\beta d+2}}(\log x)^{\frac{1-\beta d}{1+\beta d}}\right).$$

Démonstration. – Pour appliquer le théorème 13, il nous faut définir un ensemble d'indices Λ , des groupes de Galois G_ν pour $\nu \in \Lambda$, des sous-ensembles invariants par conjugaisons D_ν de G_ν , et vérifier les hypothèses (a), (b) et (c) de ce théorème. On prend pour Λ l'ensemble des nombre premiers ne divisant pas N , et pour $\ell \in \Lambda$, on définit G_ℓ comme l'image de $\rho_\ell(\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ par l'application $G(\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow G(\mathbb{F}_\ell)$. Comme cette application est surjective pour presque tout ℓ , il résulte de l'hypothèse (iv) que G_ℓ est d'indice borné dans $G(\mathbb{F}_\ell)$. On prend pour D_ℓ l'ensemble $G_\ell^{\text{tr}=a} = G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a} \cap G_\ell$, ou ce qui revient au même, $G_\ell^{\text{tr}=a}$ est l'ensemble des matrices de trace $a \pmod{\ell}$ dans $G_\ell \subset G(\mathbb{F}_\ell) \subset \text{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$. L'ensemble \tilde{D} associée à ces $D_\ell = G_\ell^{\text{tr}=a}$ comme en (23) est alors l'ensemble des $p \nmid M$ tels que $a_p \equiv a \pmod{\ell}$ pour presque tout ℓ , i.e., l'ensemble des $p \nmid M$ tels que $a_p = a$. En d'autres termes, la quantité $\pi(D, x)$ estimée dans le théorème 13 n'est autre que $\pi(a, x)$.

Vérifions les hypothèses (a), (b), et (c) du théorème 13. Puisque $G_{\mathbb{Q}}$ est connexe de dimension d , et G de type fini sur $\mathbb{Z}[1/N]$, $|G(\mathbb{F}_\ell)| \sim \ell^d$ quand ℓ tend vers l'infini. Comme G_ℓ est d'indice borné dans $G(\mathbb{F}_\ell)$, il suit que $\log |G_\ell| \sim d \log \ell$ quand ℓ tend vers l'infini, ce qui implique (a). Pour prouver (b) avec $\alpha = 1/d$, il suffit de voir que le sous-schéma fermé de G définie par l'équation $\text{tr} = a$ a sa fibre générique de dimension (au plus) $d-1$. Comme $G_{\mathbb{Q}}$ est connexe, donc géométriquement irréductible, il suffit de voir que $G(\mathbb{C})^{\text{tr}=a} \neq G(\mathbb{C})$. Mais $G(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice de trace $n > 0$ (l'identité) donc une matrice de toute trace non nulle (puisque G contient le centre de GL_n), et donc il est clair que quelle que soit la valeur de a , on a bien $G(\mathbb{C})^{\text{tr}=a} \neq G(\mathbb{C})$, d'où (b). Quant à l'hypothèse (c), elle est vérifiée avec le même β que dans l'énoncé du théorème, puisque $\lambda_{G_\ell}(G_\ell^{\text{tr}=a}) \leq \lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a})$ par la proposition 8.

Le théorème résulte maintenant de la formule (25) du théorème 13 en y faisant $\alpha = 1/d$. □

REMARQUE 22. – On remarquera que sans l'hypothèse G connexe, l'hypothèse (b) du théorème 13 peut être mise en défaut, en prenant par exemple pour G le normalisateur d'un tore dans GL_2 et $a = 0$.

COROLLAIRE 15. – *Soit (ρ_ℓ) un système compatible comme ci-dessus, vérifiant les propriétés (i) à (iv). On suppose de plus que le groupe G est connexe, et de dimension $d \geq 1$.*

Alors, sous GRH et la conjecture d'Artin, on a

$$\pi(a, x) = \begin{cases} O\left(x^{\frac{d}{d+1}} (\log x)^{\frac{3-d}{d+1}}\right) & \text{si } a \neq 0 \\ O\left(x^{\frac{d-1}{d}} (\log x)^{\frac{4-d}{d}}\right) & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Démonstration. – En effet, on peut prendre dans le théorème précédent $\beta = (1 - 1/d)/2$ d'après la majoration de Cauchy-Schwarz si $a \neq 0$, $\beta = (1 - 2/d)/2$ si $a = 0$ en utilisant la majoration de Cauchy-Schwarz après avoir quotienté par les homothéties. \square

Ce corollaire est prouvé dans [19] dans le cas d'un système compatible attaché à une forme modulaire parabolique propre pour les opérateurs de Hecke non CM à coefficients entiers de poids $k \geq 2$ (dans ce cas on a $d = 4$: cf. [19, page 254]). Bien qu'il ne soit pas énoncé dans cette généralité dans [19], il résulte facilement des méthodes employées dans cet article. Pour que le théorème 18 donne un meilleur résultat que son corollaire, c'est-à-dire pour qu'il donne un résultat vraiment nouveau par rapport à [19], il faut disposer d'une estimation de la complexité de Littlewood $\lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a})$ asymptotiquement meilleure que celle donnée par Cauchy-Schwarz. Malheureusement, nous ne savons pour l'instant prouver de telles estimations dans aucun cas. Dans le seul cas où nous pouvons estimer l'ordre de grandeur de $\lambda(G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a})$, i.e., pour $G = \text{GL}_n$, on voit que celui-ci est le même que celui donné par la majoration de Cauchy-Schwarz (théorème 11).

5.2.3. *Majoration en fonction de la complexité de Littlewood des matrices de trace a dans $T(\mathbb{F}_\ell)$.* – Le but de cette partie est de montrer sur un exemple (celui des courbes de genre 2) qu'on peut obtenir des résultats meilleurs que ceux du théorème précédent quand l'on dispose de réponses à la question 1, i.e., d'estimations meilleures que celles de Cauchy-Schwarz de la complexité de Littlewood de certains sous-ensembles de tores.

THÉORÈME 19. – *Soit (ρ_ℓ) un système compatible comme ci-dessus, vérifiant les propriétés (i) à (iv). On pose $\pi^{\text{reg}}(a, x) = |\{p < x, p \nmid M, a_p = a, \Xi_p(x) \text{ est à racines simples dans } \mathbb{C}\}|$. On suppose de plus que le groupe G est connexe, et de dimension $d \geq 1$. Soit T un tore maximal de G défini sur $\mathbb{Z}[1/N]$. Soit $0 \leq \gamma < 1$ un réel tel qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $\ell \nmid N$, on ait*

$$\lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a, \text{dr}}) < R|T(\mathbb{F}_\ell)|^\gamma.$$

Alors, sous GRH et la conjecture d'Artin, on a

$$(46) \quad \pi^{\text{reg}}(a, x) = O\left(x^{\frac{2\beta d+1}{2\beta d+2}} (\log x)^{\frac{1-\beta d}{1+\beta d}}\right) \text{ où l'on a posé } \beta = \frac{2\gamma r + d - r}{2d}.$$

Démonstration. – Pour ℓ premier, on pose $\pi(a, \ell, x) = |\{p \leq x, p \nmid N, a_p = a, \text{ et le polynôme } \Xi_p(X) \text{ est scindé à racines simples modulo } \ell\}|$.

Le lemme crucial, inspiré de [19, lemma 4.4] mais utilisé ici dans un but différent, est le suivant :

LEMME 7. – *Il existe deux constantes $c_{29} > 0$ et $c_{30} > 0$, dépendant seulement du système compatible considéré, telles que, pour tout $x > 2$, $y > c_{30}$, et tout u tel que $y^{1/2}(\log xy)(\log y)^2 \leq u \leq y$, on ait sous GRH,*

$$\pi^{\text{reg}}(a, x) \leq c_{29} \max_{\ell \in I} \pi(a, \ell, x),$$

où le maximum est pris sur les nombres premiers ℓ appartenant à l'intervalle $I = [y, y + u]$.

Démonstration. – Dans toute cette preuve les constantes c_{31} , etc. dépendront du système compatible fixé (et donc de sa dimension n et son poids w), mais pas de x , y , ou u .

Posons

$$\begin{aligned}\pi_p(I) &= |\{\ell \in I, \Xi_p(X) \text{ est scindé à racines simples modulo } \ell\}| \\ \pi_p(y) &= |\{\ell \leq y, \Xi_p(X) \text{ est scindé à racines simples modulo } \ell\}|.\end{aligned}$$

Fixons $x \geq 3$. Soit p un nombre premier $< x$ ne divisant pas M , et tel que Ξ_p est à racines simples dans \mathbb{C} . D'après l'hypothèse de pureté (iii) des systèmes compatibles, les racines de $\Xi_p(X)$ sont de modules complexes au plus $x^{-w/2}$, donc leurs différences sont de modules au plus $2x^{-w/2}$, et le discriminant d_{Ξ_p} du polynôme $\Xi_p(X)$ est donc majoré par $(2x)^{-n(n-1)w/2}$. Comme ce discriminant est non nul, le produit M_p des nombres premiers ℓ qui divisent d_{Ξ_p} est tel que $\log M_p \leq c_{31} \log x$. Soit L_p le corps de décomposition de $\Xi_p(x)$, G_p son groupe de Galois. Tout nombre premier ramifié dans L_p divise M_p , et un nombre premier ℓ est tel que $\Xi_p(X)$ est scindé à racines simples modulo ℓ si et seulement si ℓ ne divise pas M_p et $\text{Frob}_{\ell, L_p} = 1$. Par le théorème de Chebotarev effectif de Lagarias-Odlyzko-Serre sous GRH (17), on a donc pour $y \geq 2$

$$|\pi_p(y) - \frac{1}{|G_p|} \text{Li}(y)| \leq c_8 y^{1/2} (\log y + \log |G_p| + \log M_p)$$

et donc, comme $\log |G_p| \leq \log n!$,

$$|\pi_p(y) - \frac{1}{|G_p|} \text{Li}(y)| \leq c_{32} y^{1/2} \log(xy)$$

et de même, pour $u \leq y$

$$|\pi_p(y+u) - \frac{1}{|G_p|} \text{Li}(y+u)| \leq c_{33} y^{1/2} \log(xy).$$

Si $\pi(I)$ est le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $I = [y, y + u]$, le théorème des nombres premiers (sous sa forme usuelle sous l'hypothèse de Riemann) donne donc pour y assez grand et u comme dans dans l'énoncé

$$\pi_p(I) > c_{30} \pi(I), \quad \text{pour tout } p \text{ tel que } \Xi_p(X) \text{ est à racines simples dans } \mathbb{C}.$$

On a

$$\begin{aligned}\max_{\ell \in I} \pi(a, \ell, x) &\geq \frac{1}{\pi(I)} \sum_{\ell \in I} \pi(a, \ell, x) \\ &= \frac{1}{\pi(I)} \sum_{p \leq x, a_p = a} \pi_p(I), \quad \text{d'après les définitions} \\ &\geq \frac{1}{\pi(I)} \sum_{\substack{p \leq x, a_p = a \\ \Xi_p(X) \text{ à racines simples dans } \mathbb{C}}} c_{29} \pi(I) \\ &= c_{30} \pi^{\text{reg}}(a, x)\end{aligned}$$

et le lemme suit. \square

Revenons à la preuve du théorème 19. Posons $G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}} = G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}} \cap G_\ell$

$$\pi(a, \ell, x) \leq \pi(G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}, x).$$

En effet le membre de gauche compte les nombres premiers $p < x$, $p \nmid M$, avec $a_p = a$ et $\Xi_p(x)$ scindé à racines simples modulo ℓ , donc tels que Frob_{p,G_ℓ} est diagonalisable régulier dans $\text{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$ tandis que le terme de droite compte les nombres premiers satisfaisant la même condition avec $a_p = a$ remplacée par $a_p \equiv a \pmod{\ell}$.

La preuve est alors basée sur le même principe que celle du théorème 13. Posons $\alpha = 1/d$, et $\beta = \frac{2\gamma r + d - r}{2d}$ afin que les formules qui suivent ressemblent à celles de cette preuve. On prend $y = y(x) = x^{\alpha/(2\alpha+2\beta)}(\log x)^{-2\alpha/(\alpha+\beta)}$ et $u = y$. Pour x assez grand, u satisfait bien les hypothèses du lemme, et il existe un $\ell = \ell(x) \in [y, 2y]$ tel que $\pi(a, x) < c_{34}\pi(a, \ell, x) \leq c_{34}\pi(G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}, x)$. On supposera dorénavant que x est assez grand pour que $\pi^{\text{reg}}(a, x) > 0$ (c'est possible sauf si $\pi^{\text{reg}}(a, x)$ est identiquement nul, auquel cas il n'y a rien à prouver), ce qui implique $\pi(a, \ell, x) > 0$ et donc que $T_{\mathbb{F}_\ell}$ est un tore déployé.

On a alors $|G_\ell| \asymp |G(\mathbb{F}_\ell)| \asymp x^{1/(2\alpha+2\beta)}(\log x)^{-2/(\alpha+\beta)}$ quand x tend vers l'infini (avec $u = y = y(x)$ comme ci-dessus et ℓ arbitraire entre y et $2y$) d'après l'hypothèse (iv) des systèmes compatibles.

Le théorème de Chebotarev 2 donne, en admettant GRH et la conjecture d'Artin pour les fonctions L d'Artin des représentations π dans le support spectral de la fonction indicatrice de $G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}$:

$$(47) \quad \pi(G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}, x) = \frac{|G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}|}{|G_\ell|} \text{Li}(x) + O\left(x^{1/2}(\log x)\lambda_{G_\ell}(G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}})\right),$$

d'où

$$\pi^{\text{reg}}(a, x) = O\left(\frac{|G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}|}{|G_\ell|} \text{Li}(x)\right) + O\left(x^{1/2}(\log x)\lambda_{G_\ell}(G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}})\right)$$

et pour prouver le théorème il suffit de voir que chacun des deux termes $O(\dots)$ dans la formule ci-dessus est $O\left(x^{\frac{2\beta d + 1}{2\beta d + 2}}(\log x)^{\frac{1-\beta d}{1+\beta d}}\right)$. Pour le premier, cela résulte simplement de ce que $G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}} \subset G_\ell^{\text{tr}=a}$ et de la majoration $|G_\ell^{\text{tr}=a}| = O(\ell^{d-1})$ obtenue dans la preuve du théorème 18. Pour le second, on observe que quand x tend vers l'infini, et $\ell = \ell(x)$ avec lui,

$$\begin{aligned} \lambda_{G_\ell}(G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}) &\leq \lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}}) \\ &\asymp \ell^{(d-r)/2} \lambda_{T(\mathbb{F}_\ell)}(T(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}}) \text{ par le corollaire 6} \\ &= O\left(\ell^{(d-r)/2} \ell^{\gamma r}\right) \\ &= O\left(|G(\mathbb{F}_\ell)|^{\gamma r/d + (d-r)/2d}\right) \\ &= O\left(|G(\mathbb{F}_\ell)|^\beta\right) \end{aligned}$$

si bien qu'avec l'estimation de $|G(\mathbb{F}_\ell)|$ donnée plus haut, on voit facilement, que le terme

$$x^{1/2}(\log x)\lambda_{G(\mathbb{F}_\ell)}(G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}})$$

est $O\left(x^{\frac{2\beta d + 1}{2\beta d + 2}}(\log x)^{\frac{1-\beta d}{1+\beta d}}\right)$, ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE 23. – Il n'est pas très difficile de voir que si l'on suppose ρ_ℓ surjectif pour ℓ assez grand, le théorème précédent est valable sans supposer vraie la conjecture d'Artin. En effet celle-ci n'est utilisée qu'une seule fois dans la preuve ci-dessus, pour appliquer le théorème de Chebotarev effectif (47) à l'extension L_ℓ/\mathbb{Q} de groupe de Galois G_ℓ , pour le sous-ensemble $G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}}$. Si ρ_ℓ est surjectif, et si $G(\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow G(\mathbb{F}_\ell)$ l'est aussi (i.e., pour tout ℓ assez grand) on a $G_\ell = G(\mathbb{F}_\ell)$ et donc $G_\ell^{\text{tr}=a,\text{dr}} = G(\mathbb{F}_\ell)^{\text{tr}=a,\text{dr}}$. Il s'agit donc de voir que la formule (47) est vraie sans avoir recours à la conjecture d'Artin, mais cela résulte de la remarque 14.

THÉORÈME 20. – *Soit A une variété abélienne de dimension 2 sur \mathbb{Q} telle que $\text{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(A) = \mathbb{Z}$. Alors sous GRH et Artin on a*

$$\pi_A(0, x) = O\left(x^{9/10}(\log x)^{-3/5}\right).$$

Démonstration. – Soit $(\rho_\ell)_{\ell \text{ premier}}$ le système de représentations galoisiennes attachées à C . Il est bien connu depuis Weil que (ρ_ℓ) est un système compatible, au sens où il satisfait les conditions (i), (ii) et (iii). Sous l'hypothèse $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$, un résultat de Serre ([22]) implique que ce système satisfait également (iv) pour $G = \text{GSP}_4$. Ce groupe est de dimension $d = 11$, et de rang $r = 3$.

On écrit $\pi_C(0, x) = \pi_C^{\text{reg}}(0, x) + \pi_C^{\text{nreg}}(0, x)$, où le premier terme (resp. le second terme) compte les $p < x$, $p \nmid N$ tels que $a_p = 0$ et $\Xi_p(X)$ n'a pas de racine multiple dans \mathbb{C} (resp. a au moins une racine multiple).

Pour le premier terme, on applique le théorème 19 en notant qu'on peut prendre $\gamma = 0$ dans l'énoncé de ce théorème grâce au théorème 9, donc $\beta = 4/11$ et $2\beta d = 8$, si bien que $\pi_C^{\text{reg}}(0, x) = O\left(x^{9/10}(\log x)^{-3/5}\right)$.

Pour le second, on applique le théorème 18 en prenant $D_\ell \subset G(\mathbb{F}_\ell)$ l'ensemble des éléments non réguliers de trace 0. Comme $|D_\ell/Z| = O(\ell^8)$, on peut prendre par Cauchy-Schwarz $\beta = 4/11$, et on obtient la même estimation pour π_C^{nreg} . \square

REMARQUE 24. – En appliquant le corollaire 15, on obtiendrait dans ce cas $\pi(0, x) = O\left(x^{10/11}(\log x)^{-7/11}\right)$.

5.3. La conjecture de Koblitz

Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} sans multiplication complexe. Soit M le produit des nombres premiers de mauvaise réduction de E . On suppose que pour tout courbe E' \mathbb{Q} -isogène à E , $E'(\mathbb{Q})$ est sans torsion⁽⁶⁾. La conjecture de Koblitz (cf. [13, 26]) prédit alors que

$$|\{p < x, p \nmid M, |E(\mathbb{F}_p)| \text{ est premier}\}| = C_E x / (\log x)^2,$$

où C_E est une constante > 0 dépendant de E définie comme suit. Pour ℓ un nombre premier, on note $\rho_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ la représentation galoisienne sur les points de ℓ -torsion de E , G_ℓ son image. Soit $N \geq 1$ un entier tel que l'image de $\prod_\ell \rho_\ell$ soit $\prod_{\ell \nmid N} \text{GL}_2(\mathbb{F}_\ell) \times G_N$, où G_N est l'image de $\prod_{\ell \mid N} \rho_\ell$ dans $\prod_{\ell \mid M} \text{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$. Pour $\ell \nmid N$, soit D_ℓ l'ensemble des

⁽⁶⁾ Il existe aussi une conjecture de Koblitz sans cette hypothèse, cf. [26]. Les résultats de cette section s'y appliquent sans changements importants.

matrices dans G_ℓ n'ayant pas de valeurs propres égales à 1, et soit D_N l'ensemble des matrices dans G_N dont la réduction mod ℓ pour tout $\ell \mid N$ n'a pas de valeur propre égale à 1. Alors

$$C_E = \frac{|D_N|}{|G_N| \prod_{\ell \mid N} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)} \prod_{\ell \nmid N} \frac{|D_\ell|}{|G_\ell| \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)}.$$

THÉORÈME 21. – *Sous GRH et Artin, on a*

$$(48) \quad |\{p < x, p \nmid M, |E(\mathbb{F}_p)| \text{ est premier}\}| < (8 + o(1))C_E x / (\log x)^2.$$

Sous GRH seule, on a

$$(49) \quad |\{p < x, p \nmid M, |E(\mathbb{F}_p)| \text{ est premier}\}| < (20 + o(1))C_E x / (\log x)^2.$$

Démonstration. – Prouvons d'abord la première assertion, sous GRH et Artin. On applique le théorème 15, dont les hypothèses sont vérifiées avec $\beta = 1$ puisque $\lambda(D_\ell) \leq 1 + \lambda(G_\ell - D_\ell) = O(\ell)$ d'après la proposition 11 : si $Q = x^{1/4}$ (par exemple),

$$|\{p < x \mid p \nmid M, \forall \ell < Q, \rho_\ell(\text{Frob}_p) \in D_\ell \text{ et } \rho_N(\text{Frob}_p) \in D_N\}| < (8 + o(1))C_E x / (\log x)^2.$$

Le facteur 8 est bien sur $4\beta + 4$ pour $\beta = 1$.

Si $p \nmid M$ et $p > \sqrt{x}$ est tel que $|E(\mathbb{F}_p)|$ est premier, et $p > \sqrt{x}$ ce nombre premier est $> p + 1 - 2\sqrt{p}$ par les estimations de Weil, donc $> Q$ si Q est assez grand. Il est donc différent de tout nombre premier $\ell < Q = x^{1/4}$, donc non nul modulo ℓ , ce qui implique que $\rho_\ell(\text{Frob}_p) \in D_\ell$ (et de même $\rho_N(\text{Frob}_p) \in D_N$). On a donc

$$|\{\sqrt{x} < p < x, p \nmid M, |E(\mathbb{F}_p)| \text{ est premier}\}| < (8 + o(1))C_E x / (\log x)^2$$

et (48) s'en déduit.

Pour prouver (49) sous GRH seule, on observe que dans la preuve du théorème 15 (dont on reprend les notations), si l'on ne dispose pas d'Artin la formule (40) peut être remplacée par la formule suivante, d'après la version de Lagarias-Odlyzko-Serre.

(50)

$$|W(\phi_m, \phi_n) - \delta_{m,n} \text{Li}(x)| < c_{35} \|(\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)\|_1 x^{1/2} (\log x + \log |G_{m \cup n}| + \log M).$$

Pour estimer la norme $\|(\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)\|_1$, on écrit

$$\|(\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)\|_1 \leq \prod_{\ell \in s} \|\phi_\ell \circ \psi_\ell\|_1 \times \prod_{\ell \in i} \|\phi_\ell^2 \circ \psi_\ell\|_1.$$

Comme $\phi_\ell \circ \psi_\ell = \sqrt{\frac{|G_\ell| - |D_\ell|}{|D_\ell|}} \mathbf{1}_{D_\ell} + \sqrt{\frac{|D_\ell|}{|G_\ell| - |D_\ell|}} \mathbf{1}_{G_\ell - D_\ell}$, on obtient

$$\|\phi_\ell \circ \psi_\ell\| = O(\ell^{1/2} |G_\ell|) = O(\ell^{4+1/2})$$

et

$$\|\phi_\ell^2 \circ \psi_\ell\| = O(\ell^{1/2} |G_\ell|) = O(\ell^5)$$

d'où l'on déduit

$$\|(\phi_m \circ \psi_m)(\phi_n \circ \psi_n)\|_1 = O(Q^9)$$

puis

$$\Delta(X, \mathcal{L}_Q) < \text{Li}(x) + c_{36} Q^{10} c_{37}^{\log Q / \log \log Q}$$

et l'on termine la preuve comme celle du théorème 15. \square

REMARQUE 25. – Le résultat ci-dessus améliore le théorème 1.3 de [26] (qui lui même améliorerait un résultat de Cojocararu), en remplaçant le facteur 22 sous GRH par un facteur 20. En supposant GRH et Artin, on obtiendrait un facteur 10 par la méthode de [26], que nous remplaçons par 8. Cette amélioration est possible parce qu'on dispose d'une meilleure estimation de la complexité de Littlewood que de celle de Cauchy-Schwarz, qui est implicitement utilisée dans le théorème 3.3 de [26].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. M. ADLEMAN, A. M. ODLYZKO, Irreducibility testing and factorization of polynomials, *Math. Comp.* **41** (1983), 699–709.
- [2] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles **1337**, Hermann, Paris, 1968 ; réédition Springer, 2002.
- [3] R. W. CARTER, *Finite groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [4] H. DAVENPORT, *Multiplicative number theory*, third ed., Graduate Texts in Math. **74**, Springer, New York, 2000.
- [5] P. DELIGNE, G. LUSZTIG, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.* **103** (1976), 103–161.
- [6] M. DEMAZURE, A. GROTHENDIECK, *SGA3 schémas en groupes, 1962–1964*, Lecture Notes in Math. **151, 152 & 153**, 1970.
- [7] P. EYMARD, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France* **92** (1964), 181–236.
- [8] W. FULTON, J. HARRIS, *Representation theory*, Graduate Texts in Math. **129**, Springer, New York, 1991.
- [9] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, fourth ed., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1960.
- [10] K. IRELAND, M. ROSEN, *A classical introduction to modern number theory*, second ed., Graduate Texts in Math. **84**, Springer, New York, 1990.
- [11] H. IWANIEC, E. KOWALSKI, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [12] N. M. KATZ, Lang-Trotter revisited, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **46** (2009), 413–457.
- [13] N. KOBLITZ, Primality of the number of points on an elliptic curve over a finite field, *Pacific J. Math.* **131** (1988), 157–165.
- [14] E. KOWALSKI, *The large sieve and its applications*, Cambridge Tracts in Mathematics **175**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [15] J. C. LAGARIAS, A. M. ODLYZKO, Effective versions of the Chebotarev density theorem, in *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, Academic Press, London, 1977, 409–464.

- [16] S. LANG, H. TROTTER, *Frobenius distributions in GL_2 -extensions*, Lecture Notes in Math. **504**, Springer, Berlin-New York, 1976.
- [17] Y. K. LAU, J. WU, Sums of some multiplicative functions over a special set of integers, *Acta Arith.* **101** (2002), 365–394.
- [18] M. R. MURTY, V. K. MURTY, *Non-vanishing of L -functions and applications*, Progress in Math. **157**, Birkhäuser, 1997.
- [19] M. R. MURTY, V. K. MURTY, N. SARADHA, Modular forms and the Chebotarev density theorem, *Amer. J. Math.* **110** (1988), 253–281.
- [20] T. SANDERS, A quantitative version of the non-abelian idempotent theorem, *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), 141–221.
- [21] J-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1974.
- [22] J-P. SERRE, Lettre à Marie-France Vignéras, in *Œuvres IV, 1985–1998*, Springer, 2000.
- [23] J-P. SERRE, Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, *Publ. Math. IHÉS* **54** (1981), 323–401.
- [24] J-P. SERRE, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations l -adiques, in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 377–400.
- [25] P. J. WEINBERGER, Finding the number of factors of a polynomial, *J. Algorithms* **5** (1984), 180–186.
- [26] D. J. ZYWINA, The large sieve and Galois representations, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 2008.

(Manuscrit reçu le 30 juin 2014 ;
accepté, après révision, le 20 mai 2015.)

Joël BELLAÏCHE
Department of Mathematics
Brandeis University
415 South Street
Waltham, MA 02454-9110, USA
E-mail: jbellaic@brandeis.edu