ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD GOURSAT

Sur les transformations rationnelles des équations différentielles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 37-66
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__37_0>

SUR LES

TRANSFORMATIONS RATIONNELLES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. E. GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Dans un article inséré aux *Mathematische Annalen* (Band XXIV) et dans un Mémoire développé qui paraîtra prochainement dans les *Acta Societatis Fennicæ*, je me suis proposé d'étudier les intégrales rationnelles de l'équation du troisième ordre, due à M. Kummer, qui se présente dans l'étude de la transformation des séries hypergéométriques. Le problème d'Algèbre auquel on est conduit offre plus d'une analogie avec le problème célèbre de la transformation des intégrales elliptiques, tel qu'il a été traité dans toute sa généralité par Jacobi au début des *Fundamenta nova*. Les deux questions ne sont, d'ailleurs, que des cas particuliers d'un problème très général relatif aux transformations rationnelles des équations différentielles linéaires, et ce problème comprend aussi toutes les questions que l'on peut se proposer sur la réduction des intégrales ultra-elliptiques au moyen de substitutions rationnelles. C'est l'étude de ce problème général qui fait l'objet du présent Mémoire. Je m'attache surtout à montrer comment la question dépend de la recherche des solutions en nombres entiers et positifs de certaines équations indéterminées. Une fois ces systèmes de solutions connus, la détermination effective des substitutions rationnelles exige l'emploi de calculs par la méthode des coefficients indéterminés, calculs qui peuvent être très compliqués, mais il ne semble pas qu'on puisse s'en affranchir d'une manière générale. Comme application, je montre comment on peut toujours ramener à une question d'élimination le problème suivant : *Une équation linéaire du second ordre étant* DONNÉE, *reconnaître si son intégrale générale est une fonction algébrique.*

Pour fixer les idées et abréger les raisonnements, j'ai constamment supposé que les équations linéaires étaient du second ordre, mais il est visible que la méthode reste la même, quel que soit l'ordre de ces équations.

I.

1. Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, je commencerai par établir un lemme dont nous aurons besoin par la suite.

Soit $x = \varphi(t)$ une fonction rationnelle quelconque d'une variable t, et désignons en général par $P(t-\alpha)$ une fonction rationnelle qui n'est ni nulle, ni infinie pour $t=\alpha$, $t-\infty$ devant être remplacé par $\frac{1}{t}$. Soient a et α deux quantités finies; d'après la théorie des racines égales, on peut dire que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=a$, si l'on a

$$x - a = (t-\alpha)^m P(t-\alpha).$$

On dira de même que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=\infty$ ou que $t=\infty$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=a$, si l'on a dans le premier cas

$$\frac{1}{x} = (t-\alpha)^m P(t-\alpha)$$

et dans le second cas

$$x - a = \left(\frac{1}{t}\right)^m P\left(\frac{1}{t}\right).$$

Enfin $t=\infty$ sera racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=\infty$, si l'on a

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{t}\right)^m P\left(\frac{1}{t}\right).$$

Supposons que l'on fasse à la fois sur x et sur t une substitution linéaire

$$x = \frac{AX+B}{CX+D}, \quad t = \frac{A'T+B'}{C'T+D'};$$

si t_0 est racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=x_0$, en appelant

X_0 et T_0 les valeurs correspondantes de X et de T, T_0 sera dans tous les cas racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi\left(\frac{A'T+B'}{C'T+D'}\right)=X_0$. Par exemple, si $\varphi(t)$ se réduit à un polynôme entier d'ordre m, $t=\infty$ devra être regardé comme une racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=\infty$.

Imaginons que l'on considère toutes les valeurs de x pour lesquelles l'équation $\varphi(t)=x$ a des racines multiples, finies ou infinies, et soit r l'ordre de multiplicité de l'une quelconque de ces racines. Si le degré de la fonction $\varphi(t)$ est égal à n, on a la formule absolument générale

$$\Sigma(r-1)=2n-2, \tag{1}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines multiples, finies ou infinies, de l'équation $\varphi(t)=x$, pour toutes les valeurs de x. D'après ce qui précède, on peut toujours supposer que l'équation $\varphi(t)=\infty$ admet la racine simple $t=\infty$ et $n-1$ autres racines simples. Si ces conditions n'étaient pas remplies, on n'aurait qu'à considérer une valeur finie x_0 pour laquelle l'équation $\varphi(t)=x_0$ ait n racines simples finies $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, et à faire les substitutions linéaires

$$x=x_0+\frac{1}{X}, \quad t=t_0+\frac{1}{T},$$

qui ne changent ni le degré n, ni la somme $\Sigma(r-1)$. On pourra donc toujours supposer la fonction rationnelle $\varphi(t)$ mise sous la forme

$$x=\varphi(t)=\frac{P}{Q},$$

P et Q étant des polynômes sans facteurs communs, le premier de degré n, le second de degré $n-1$, et le second n'ayant que des facteurs simples. Grâce aux substitutions précédentes, l'équation $\varphi(t)=a$ ne pourra avoir de racines multiples que pour des valeurs finies de a et ces racines multiples auront elles-mêmes des valeurs finies. De l'équation précédente, on tire

$$\frac{dx}{dt}=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2},$$

et le numérateur est un polynôme de degré $2n-2$ n'ayant aucune racine commune avec le dénominateur. Si $t = \alpha$ est une racine d'ordre $r - 1$ de l'équation $P'Q - PQ' = 0$ et a la valeur correspondante de x, on voit facilement que $t = \alpha$ sera racine multiple d'ordre r de l'équation $\varphi(t) = a$; et réciproquement, si $t = \alpha$ est racine multiple d'ordre r de l'équation $P - aQ = 0$, $t = \alpha$ sera racine multiple d'ordre $r - 1$ de l'équation $PQ' - QP' = 0$, comme cela résulte de l'identité

$$P'Q - Q'P = (P' - aQ')Q - Q'(P - aQ).$$

On en déduit précisément la formule (1) qui est, par suite, absolument générale.

On peut établir cette formule autrement. Considérons la fonction algébrique t de x définie par l'équation $\varphi(t) = x$, et la surface de Riemann correspondante, qui se composera de n feuillets, si $\varphi(t)$ est de degré n. Les points de ramification de cette surface correspondent aux valeurs de x pour lesquelles plusieurs valeurs de t deviennent égales, c'est-à-dire aux valeurs telles que l'équation $\varphi(t) = a$ ait des racines multiples. Or, d'après la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine, on reconnaît immédiatement qu'à une racine multiple d'ordre r correspond toujours un point de ramification d'ordre $r - 1$. La formule générale, qui donne le genre d'une relation algébrique

$$\frac{\Sigma(r-1)}{2} - (n-1) = p,$$

devient ici, puisque $p = 0$,

$$\Sigma(r-1) = 2n - 2,$$

c'est-à-dire la formule (1).

2. Soient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + P\frac{dz}{dt} + Qz = 0 \tag{3}$$

deux équations linéaires du second ordre, où p et q sont des fonctions de x, P et Q des fonctions de t. On peut toujours, comme il est bien connu, passer de l'équation (2) à l'équation (3) en posant

$$x = \varphi(t), \quad z = \varpi y,$$

φ et ϖ étant des fonctions convenablement choisies de t; on n'aura, en effet, que deux conditions à remplir et l'on dispose de deux fonctions arbitraires φ et ϖ. Ces fonctions seront déterminées par les équations simultanées

$$(4) \qquad p x' - \frac{x''}{x'} = 2\frac{\varpi'}{\varpi} + \mathrm{P},$$

$$(5) \qquad q x'^2 = \frac{\varpi''}{\varpi} + \mathrm{P}\frac{\varpi'}{\varpi} + \mathrm{Q},$$

et l'élimination de ϖ conduit à une équation du troisième ordre pour déterminer la fonction inconnue $x = \varphi(t)$

$$(6) \qquad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \left(2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}\right)x'^2 = 2\mathrm{Q} - \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 - \frac{d\mathrm{P}}{dt},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$x' = \frac{d\varphi}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad x''' = \frac{d^3\varphi}{dt^3}.$$

L'équation de Kummer est un cas particulier de l'équation (6), que l'on obtient en supposant que les équations proposées (2) et (3) se réduisent à deux équations hypergéométriques. Dans ce qui va suivre, je supposerai que p et q sont des fonctions rationnelles de x, P et Q des fonctions rationnelles de t, et, de plus, que les équations (2) et (3) ont toutes leurs intégrales régulières; je me propose de montrer comment on peut étendre à l'étude des intégrales rationnelles de l'équation (6) les considérations dont je me suis déjà servi dans le cas particulier de l'équation de Kummer, et cela sans autre difficulté nouvelle que la complication des calculs.

Je remarque en premier lieu que, si l'équation (6) admet pour intégrale une fonction rationnelle de t, l'équation (4) donnera pour la valeur correspondante de $\frac{\varpi'}{\varpi}$ une fonction rationnelle, et il est aisé de vérifier que w sera de la forme

$$(7)\qquad w = \prod_{i=1}^{i=k} (t - t_k)^{r_k};$$

l'intégration de l'équation (3) sera donc ramenée à l'intégration de l'équation (2) ou inversement.

3. Un point ordinaire a d'une équation linéaire du second ordre, telle que l'équation (2), peut être caractérisé par la propriété suivante : dans le domaine de ce point, l'équation admet deux intégrales particulières distinctes de la forme suivante :

$$y_1 = 1 + \alpha_0(x - a) + \alpha_1(x - a)^2 + \ldots,$$
$$y_2 = (x - a) + \beta_1(x - a)^2 + \ldots.$$

Il résulte des expressions de p et de q au moyen des intégrales y_1, y_2, que ces coefficients sont holomorphes dans le voisinage du point a. Inversement, si p et q sont holomorphes pour $x = a$, le théorème fondamental de M. Fuchs nous apprend que le point a sera un point ordinaire. Tout point non ordinaire est un point singulier; j'emploierai la classification suivante, qui est basée principalement sur la différence δ des racines de l'équation déterminante fondamentale relative à ce point.

1° δ n'est pas un nombre entier, ou bien, δ étant un nombre entier, l'intégrale générale contient un logarithme dans le domaine du point considéré; je réserverai aux valeurs de la variable de cette nature le nom de *points véritablement singuliers* ou, plus simplement, de *points singuliers*. J'appellerai a_1, a_2, ..., a_p les points singuliers de cette espèce de l'équation (2), que je suppose en nombre p.

2° δ est un nombre entier supérieur à l'unité, sans que l'intégrale générale contienne de logarithme dans le voisinage de ce point. Je donnerai aux points de cette nature le nom de points *à apparence singulière,* et je désignerai par la lettre b un quelconque des points de cette espèce de l'équation (2).

3° δ est égal à l'unité, sans que l'intégrale générale contienne de logarithme dans le domaine du point correspondant. Je considérerai ces valeurs de la variable comme des points ordinaires.

Je désignerai de même par la lettre α un quelconque des points véritablement singuliers de l'équation (3), et par la lettre β un quelconque des points à apparence singulière de la même équation.

Il est bien facile de saisir la raison de ces dénominations. En effet, les deux expressions $2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$, $2Q - \frac{1}{2}P^2 - \frac{dP}{dt}$ sont des invariants, relativement au changement de fonction inconnue, c'est-à-dire que ces expressions ne varient pas quand on multiplie toutes les intégrales de la première équation par une même fonction de x, ou les intégrales de la seconde par une même fonction de t; on pourra toujours choisir ce multiplicateur de façon à ramener les points singuliers de la seconde catégorie à des points singuliers apparents (au sens propre du mot), et ceux de la troisième catégorie à des points ordinaires. Dans le problème qui nous occupe, il n'y a donc aucun inconvénient à employer ces dénominations, ni aucune ambiguïté à craindre.

Ces distinctions bien établies, le problème que je me propose d'étudier peut se formuler ainsi :

Étant donnée une équation qui a p points singuliers (non apparents), trouver toutes les fonctions rationnelles $\varphi(t)$, telles qu'en faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$ dans cette équation la nouvelle équation obtenue ait seulement q points singuliers (non apparents).

4. J'étudierai pour cela les propriétés de l'équation différentielle que l'on déduit de l'équation proposée en faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$, où $\varphi(t)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de t. Il est clair d'abord que cette équation sera à coefficients rationnels, et qu'elle aura toutes ses intégrales régulières. Soit α une valeur quelconque de t, a la valeur correspondante de x, et m l'ordre de multiplicité de la racine $t = \alpha$ de l'équation $\varphi(t) = a$. Si la valeur $x = a$ est un point singulier logarithmique pour l'équation proposée, il est évident que toutes les valeurs correspondantes α de t seront des points singuliers logarithmiques pour la nouvelle équation. Si a est un point ordinaire ou un point singulier non logarithmique, l'équation proposée admet, dans le domaine du point $x = a$, deux intégrales appar-

tenant à des exposants dont la différence est égale à une certaine quantité δ, différente de zéro; la nouvelle équation admettra, dans le domaine du point $t=\alpha$, deux intégrales appartenant à des exposants dont la différence sera $m\delta$. On aura à distinguer plusieurs cas :

1° *Le point a est un point ordinaire :* On a alors

$$\delta = 1, \quad m\delta = m;$$

le point α sera un point ordinaire si $m=1$, et un point à apparence singulière si $m>1$.

2° *Le point a est un point à apparence singulière :* Dans ce cas, δ sera un nombre entier supérieur à l'unité et, à plus forte raison, $m\delta$. Le point $t=\alpha$ sera *toujours* un point à apparence singulière.

3° *Le point a est un point véritablement singulier, et δ est imaginaire ou incommensurable :* Alors $m\delta$ sera lui-même imaginaire ou incommensurable, et le point $t=\alpha$ sera *toujours* un point véritablement singulier.

4° *Le point a est un point véritablement singulier, et δ est commensurable :* Supposons-le réduit à sa plus simple expression, $\delta=\frac{\lambda}{\mu}$; si m n'est pas un multiple de μ, $\frac{\lambda m}{\mu}$ sera fractionnaire et la valeur $t=\alpha$ sera un point véritablement singulier. Mais, si m est égal à μ ou à un multiple d μ, $\frac{\lambda m}{\mu}$ sera un nombre entier, et $t=\alpha$ sera un point à apparence singulière ou même un point ordinaire; cette dernière circonstance ne pouvant se présenter que si l'on a à la fois

$$\lambda = 1, \quad m = \mu.$$

En résumé, les points singuliers non apparents de la nouvelle équation proviennent : 1° des valeurs de t correspondant aux points singuliers logarithmiques de la première équation; 2° des valeurs de t correspondant aux points singuliers pour lesquels δ est imaginaire ou incommensurable; 3° des valeurs de t correspondant aux points singuliers pour lesquels δ est commensurable, sans que l'ordre de multiplicité de la racine soit un multiple du dénominateur de δ, supposé réduit à sa plus simple expression.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ les q points singuliers non apparents de la nouvelle équation. Admettons, ce qu'on peut toujours faire, que l'on a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_p = \infty.$$

Soit δ_i la valeur de δ relative au point critique $x = a_i$, et soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ p nombres entiers positifs supérieurs à l'unité, tels que μ_i soit égal au dénominateur de δ_i réduit à sa plus simple expression lorsque δ_i est commensurable, et μ_i étant pris arbitrairement si le point singulier a_i est logarithmique ou si δ_i est imaginaire ou incommensurable. Désignons par Π_i un produit de la forme

$$\Pi_i = \prod_{k=1}^{k=q} (t - \alpha_k)^{r_i^k},$$

où r_i^k est un nombre entier positif, qui peut être nul, et par P_i un polynôme en t de degré n_i, ne contenant aucun des facteurs $t - \alpha_1$, $t - \alpha_2$, $t - \alpha_q$. On devra avoir, en général,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\Pi_1 (P_1)^{\mu_1}}{\Pi_p (P_p)^{\mu_p}}, \quad x - 1 = \dfrac{\Pi_2 (P_2)^{\mu_2}}{\Pi_p (P_p)^{\mu_p}}, \quad \ldots, \\ x - a_i = \dfrac{\Pi_i (P_i)^{\mu_i}}{\Pi_p (P_p)^{\mu_p}}, \quad \ldots, \quad x - a_{p-1} = \dfrac{\Pi_{p-1} (P_{p-1})^{\mu_{p-1}}}{\Pi_p (P_p)^{\mu_p}}; \end{array} \right.$$

cela est évident pour les points a_i pour lesquels δ_i est commensurable.

Si a_i est un point singulier logarithmique ou que δ_i soit imaginaire ou incommensurable, il faudra, en outre, supposer que le degré n_i du polynôme P_i correspondant est égal à zéro. Toutefois je conserverai la notation précédente qui présente plus d'uniformité; mais il sera toujours sous-entendu que $n_i = 0$, si μ_i est pris arbitrairement.

Les formules (8) subissent des modifications bien faciles à apercevoir lorsque l'une des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est supposée infinie, ou que $t = \infty$ est racine d'ordre μ_i de l'équation $\varphi(t) = a_i$. Afin de ne pas multiplier les distinctions, je supposerai qu'on a ramené, par une substitution linéaire effectuée sur t, la valeur $t = \infty$ à correspondre à une valeur de x différente de $a_1, a_2, \ldots, a_p$; de sorte que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ auront des valeurs finies et les polynômes P_i seront bien de degré n_i. Il sera facile de passer de ce cas général aux autres cas particuliers. On voit, par conséquent, que, si une fonction $\varphi(t)$ répond à la question, elle jouit des propriétés suivantes :

Les racines de l'équation $\varphi(t) = a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$, qui n'ont aucune des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, doivent être racines d'un ordre de multiplicité égal à μ_i ou à un multiple de μ_i.

Il faut de plus que, dans certains cas que nous avons spécifiés, toutes les racines aient l'une des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Inversement, il résulte de l'étude qui vient d'être faite que ces conditions nécessaires sont suffisantes. Si l'on veut, en outre, que l'équation (3) obtenue par le changement de variable $x = \varphi(t)$ ne présente pas de points à apparence singulière, il y aura un certain nombre de conditions à remplir : 1° l'équation proposée (2) ne devra pas avoir de points singuliers apparents; 2° toute équation $\varphi(t) = \mathrm{A}$, où A n'a aucune des valeurs a_1, $a_2, \ldots, a_p$ ne devra avoir que des racines simples; 3° les racines de l'équation $\varphi(t) = a_i$ devront toutes avoir une des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, si ce point est un point singulier logarithmique ou si δ_i n'est pas l'inverse d'un nombre entier; 4° si δ_i est l'inverse d'un nombre entier μ_i, les racines de l'équation $\varphi(t) = a_i$, qui n'ont aucune des valeurs α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$, devront être racines multiples d'ordre μ_i; 5° si α_h est racine d'ordre h d'une équation $\varphi(t) = a_i$, où δ_i est une fraction ayant pour dénominateur μ_i et un numérateur > 1, h ne devra pas être égal à μ_i ni à un multiple de μ_i; sans quoi le point α_h ne serait pas un point singulier.

5. Revenant au cas général, je désigne par D le degré de la fraction rationnelle $\varphi(t)$, par N_i la somme $\sum_{k=1}^{k=q} r_i^k$, et par V_i le nombre des facteurs linéaires distincts qui figurent dans Π_i; comme chaque facteur $t - \alpha_k$ figure dans un des produits Π_i et dans un seul, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{V}_i = q.$$

Entre les différents nombres qui viennent d'être définis on a d'abord les relations évidentes

$$(9)\qquad D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 + n_2\mu_2 = \ldots = N_i + n_i\mu_i = \ldots = N_p + n_p\mu_p,$$

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} N_i \geqq q.$$

La formule (1) établie plus haut fournit une autre relation; dans $\Sigma(r-1)$ les termes qui proviennent du facteur Π_i ont pour somme $N_i - V_i$ et la somme des termes analogues sera

$$\sum_{i=1}^{i=p} N_i - \sum_{i=1}^{i=p} V_i = \sum_{i=1}^{i=p} N_i - q.$$

De même, le terme qui provient des racines de l'équation $\varphi(t) = a_i$, communes avec l'équation $P_i = 0$, sera, en supposant toutes ces racines simples, $n_i(\mu_i - 1)$ et aura une valeur plus grande si l'équation $P_i = 0$ a des racines multiples, comme il est aisé de s'en assurer par un calcul facile. La somme des termes analogues sera donc au moins égale à

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_i(\mu_i - 1).$$

Enfin, la somme $\Sigma(r-1)$ pourra contenir d'autres termes provenant des racines multiples de l'équation $\varphi(t) = A$, s'il en existe pour d'autres valeurs de A; de sorte que l'on aura, en général, d'après la formule (1),

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} n_i(\mu_i - 1) + \sum_{i=1}^{i=p} N_i - q + \Delta = 2D - 2.$$

Δ désigne un nombre entier positif qui sera nul si tous les polynômes P_i n'ont que des facteurs simples, et si l'équation $\varphi(t) = A$ n'a que des racines simples, tant que A n'a pas l'une des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et dans ce cas seulement. En particulier, on voit que Δ sera toujours nul, si l'équation (3) n'a pas de points à apparence singulière.

L'équation (2) étant donnée, les équations (9), (10), (11) contiennent les indéterminées D, Δ, $N_1, N_2, \ldots, N_p$ et certains des nombres n_i, ceux pour lesquels la valeur correspondante de δ_i est commensurable. Les autres doivent être supposés nuls, comme on l'a expliqué plus haut.

Pour traiter le cas particulier où l'on suppose que les équations (2) et (3) n'ont pas de points singuliers apparents, on devra faire $\Delta = 0$, et supposer nuls tous les nombres n_i pour lesquels le nombre correspondant δ_i n'est pas l'inverse d'un nombre entier.

Toute fonction rationnelle répondant à la question fournit évidemment une solution des équations précédentes en nombres entiers et positifs. Inversement supposons que l'on connaisse une solution de ces équations en nombres entiers et positifs; connaissant les nombres N_i, on pourra déterminer les nombres r_i^k par les relations

$$N_i = \sum_{k=1}^{k=q} r_i^k, \tag{12}$$

et, d'après l'équation (10), on pourra déterminer ces nombres r_i^k de façon que chaque facteur $t - \alpha_k$ figure dans un produit Π_i et dans un seul, et cela d'un nombre limité de manières. Les nombres n_i et r_i^k étant ainsi déterminés, supposons que l'on veuille calculer la fonction $\varphi(t)$ par la méthode des coefficients indéterminés. Les équations (8) fournissent $p-2$ identités de degré D en t et par suite $(p-2)(D+1)$ équations de condition; or, dans ces identités, on dispose des q arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et des coefficients des polynômes P_i. Comme on peut toujours supposer un de ces coefficients égal à l'unité, le nombre total des paramètres arbitraires sera

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_i + p + q - 1.$$

Or l'équation (11) peut s'écrire, en tenant compte des relations (9),

$$pD - \sum_{i=1}^{i=p} n_i - q + \Delta = 2D - 2$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_i + p + q - 1 = (p-2)(D+1) + \Delta + 3, \tag{13}$$

et cette nouvelle formule exprime précisément que le nombre des coefficients indéterminés surpasse le nombre des équations de condition de $\Delta + 3$ unités. On en déduira donc, en général, une fonction rationnelle répondant à la question et renfermant $\Delta + 3$ paramètres arbitraires.

Je considérerai toutes ces fonctions rationnelles comme appartenant à un même *type*. Comme à tout système de solutions des équations (9), (10), (11) correspond un nombre limité de solutions pour les équations (12), on arrive aux conclusions suivantes :

A tout système de solutions des équations (9), (10), (11) *correspondent en général une infinité de fonctions rationnelles répondant à la question, qui appartiennent à un nombre limite de types distincts.*

Chacun de ces types contient le même nombre ($\Delta + 3$) *de paramètres arbitraires.*

Pour achever de déterminer le problème, on pourra se proposer de disposer de ces $\Delta + 3$ paramètres, de façon que $\Delta + 3$ des quantités α_1, α_2, ..., α_q aient des valeurs données à l'avance si $\Delta + 3 \leqq q$.

Pour passer du cas général au cas particulier de l'équation de Kummer, il faudra faire $p = q = 3$, $\Delta = 0$; on retrouve ainsi un système d'équations équivalent à celui que j'avais obtenu directement (voir *Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 450). Chaque solution contiendra trois paramètres arbitraires dont on pourra disposer de façon que les points α_1, α_2, α_3 coïncident avec les trois points 0, 1, ∞, et le problème devient alors complètement déterminé, comme je l'ai déjà établi dans le travail cité tout à l'heure.

6. On voit par là le rôle important que jouent, dans le problème dont je m'occupe, les équations (9), (10), (11); dans toute application de ce problème, on devra commencer par rechercher les solutions de ces équations en nombres entiers et positifs. On peut déduire de ces relations d'autres formules susceptibles d'interprétations intéressantes. Ainsi des équations (9) on tire

$$\mathrm{D} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i \mu_i + \sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{N}_i\right),$$

et, en remplaçant D par cette valeur dans l'équation (9), il vient

$$(14)\quad \sum_{i=1}^{i=p}[p(\mu_i-1)-2\mu_i]\,n_i+(p-2)\left(\sum_{i=1}^{i=p}\mathrm{N}_i-q\right)=2(q-p)-\Delta p.$$

Supposons p supérieur à 4; le premier membre de la formule précédente ne peut être négatif, et il ne sera nul que si chaque terme est séparément nul, c'est-à-dire si l'on a $n_i=0$, $\mathrm{N}_i=1$. Par conséquent le second membre ne peut être que positif ou nul; on en déduit qu'on ne peut avoir $q<p$, et l'on n'aura $q=p$ que si l'on a en même temps $\Delta=0, n_i=0, \mathrm{N}_i=1$, et la substitution sera du premier degré. Ainsi :

Lorsque le nombre des points singuliers non apparents de la première équation linéaire est supérieur à quatre, le nombre des points singuliers non apparents de la seconde équation ne peut être inférieur au nombre des points singuliers de la première, et, s'il lui est égal, elles se déduisent l'une de l'autre par une substitution linéaire.

Si $p=4$, le premier membre de l'équation (14) ne peut pas non plus être négatif; donc on ne peut avoir $q<p$; mais on pourra avoir $p=q$ si $\Delta=0$ et si le premier membre est nul, ce qui aura lieu si l'on a

$$n_i=0,\quad \mathrm{N}_i=1,$$

c'est-à-dire dans le cas d'une substitution linéaire et, en outre, si l'on a

$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=2,\quad \sum_{i=1}^{i=4}\mathrm{N}_i=4.$$

Dans ce dernier cas, la détermination de la fonction $\varphi(t)$ revient précisément au problème traité par Jacobi au début des *Fundamenta nova*. Ainsi :

Lorsque le nombre des points singuliers non apparents de la première équation est égal à quatre, le nombre des points singuliers de la nouvelle équation ne peut être inférieur à quatre et, s'il est égal à quatre, la transformation est linéaire ou est une transformation de Jacobi.

Dans ce cas particulier, l'équation (2) aura quatre points singuliers non apparents, et la différence δ relative à ces quatre points sera commensurable et, réduite à sa plus simple expression, aura pour dénominateur 2. Telle est l'équation de Lamé et l'équation plus générale de M. Darboux (*Comptes rendus*, juin 1882); l'intégrale générale de ces deux équations s'exprime, comme on sait, au moyen des fonctions Θ de Jacobi. Il en serait encore de même si l'on ajoutait aux quatre points singuliers non apparents un nombre quelconque de points à apparence singulière. Il suffit, pour le voir, de se reporter à un petit travail que j'ai publié dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XII, p. 97).

Nous avons en même temps le résultat suivant :

Les seules transformations rationnelles, telles que les équations (2) *et* (3) *aient le même nombre de points singuliers non apparents, sont les transformations de Jacobi et les transformations qui résultent des intégrales rationnelles de l'équation de Kummer.*

On voit, en outre, qu'on ne pourra avoir $q < p$ que si $p = 3$, et l'on retrouve précisément les quatre types d'équations hypergéométriques qui s'intègrent algébriquement.

Je laisse de côté le cas singulier de $p = 2$.

7. L'équation (2) étant donnée, ainsi que le nombre entier q, il est très important de rechercher si les équations (9), (10) et (11) admettent un nombre limité ou une infinité de solutions. Des équations (9), je tire

$$n_i = \frac{N_p - N_i + n_p \mu_p}{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, p - 1),$$

$$D = N_p + n_p \mu_p;$$

l'équation (11) peut alors s'écrire

$$n_p(\mu_p - 1) + \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)(N_p - N_i + n_p \mu_p) + \sum_{i=1}^{i=p} N_i - q + \Delta = 2N_p + 2n_p\mu_p - 2$$

ou bien

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{N_i}{\mu_i} + N_p\left(p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{1}{\mu_i}\right) + n_p\mu_p\left(p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}\right) + \Delta = q - 2.$$

Plusieurs cas sont à distinguer suivant le signe du coefficient de $n_p\mu_p$.

Premier cas. — Supposons ce coefficient négatif : le premier membre de l'équation aura à la fois des termes positifs et des termes négatifs, et cette formule ne nous fournit aucune limite pour les nombres N_i et n_i. Or la quantité $p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$ ne peut être négative que dans les quatre cas suivants :

$p=3$.	μ_1.	μ_2.	μ_3.
....	2	2	n
....	2	3	3
....	2	3	4
....	2	3	5

qui correspondent aux quatre types d'équations hypergéométriques s'intégrant algébriquement. Dans chacun de ces cas, les équations (9), (10), (11) admettent, en effet, une infinité de solutions, quel que soit q. Il n'y a de limites ni pour les nombres n_i, ni pour les nombres N_i.

Deuxième cas. — Supposons $p - 2 = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$; ceci aura lieu dans quatre cas seulement :

p.	μ_1.	μ_2.	μ_3.	μ_4.
4	2	2	2	2
3	2	4	4	.
3	2	3	6	.
3	3	3	3	.

Dans chacun de ces quatre cas, l'intégrale générale de l'équation proposée s'exprime au moyen de fonctions doublement périodiques de première ou de seconde espèce. Les équations (9), (10), (11) admettent une infinité de solutions, pourvu que q ne soit pas inférieur à p. Il n'y a pas de limite pour les nombres n_i; mais l'équation (15) se réduit ici à

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{N_i}{\mu_i} + \Delta = q - 2,$$

et l'on voit que les nombres N_i n'admettent qu'un nombre limité de valeurs.

Troisième cas. — Supposons, ce qui est le cas général, $p - 2 > \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$. Tous les termes du premier membre de l'équation (15) seront positifs, et, comme le second membre a une valeur déterminée, il en résulte que tous les nombres $N_1, N_2, \ldots, N_p, n_p$ devront être inférieurs à une limite déterminée. Comme il existe $p-1$ équations analogues où l'on aurait remplacé successivement l'indice p par $p-1, p-2, \ldots, 1$, on verrait de même que les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ doivent tous rester inférieurs à certaines limites, et, par suite, les équations (9), (10), (11) admettent un nombre limité de systèmes de solutions en nombres entiers et positifs. Il suit de là que *toutes les substitutions rationnelles permettent de passer de l'équation proposée à une équation ayant un nombre déterminé q de points singuliers non apparents appartiennent à un nombre limité de types différents.*

On peut aller plus loin et regarder dans les équations (9), (10), (11) tous les nombres N_i, n_i, μ_i, D, Δ comme indéterminés, p et q seulement étant donnés. Si on laisse systématiquement de côté les cas qui pourraient se présenter où la somme $\sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$ pourrait être égale ou supérieure à $p-2$, le coefficient $p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$ restera supérieur à une limite déterminée; par exemple, si $p > 4$, ce coefficient sera supérieur à $\frac{p}{2} - 2$; si $p = 4$, il sera supérieur à $\frac{1}{6}$; si $p = 3$, il sera supérieur à $\frac{1}{42}$. Donc, d'après l'équation (15), tous les nombres $N_1, N_2, \ldots, N_p, \Delta, n_p \mu_p$ devront rester inférieurs à une certaine limite, et l'on démontrerait qu'il en est de même des produits $n_1 \mu_1, \ldots, n_{p-1} \mu_{p-1}$. Par suite, les nombres n_i et μ_i auront eux-mêmes une limite; il y aurait exception pour le nombre entier μ_i, si l'on supposait $n_i = 0$; mais on sait que, dans ce cas, le nombre μ_i ne figure pas dans les équations.

Il y aura donc un nombre *fini* de solutions pour les équations (9), (10), (11), et l'on arrive à cette conclusion que, abstraction faite des huit cas particuliers énumérés plus haut, *toutes les substitutions rationnelles conduisant d'une équation qui a p points singuliers non apparents à une équation qui en a q appartiennent à un nombre limité de types distincts.*

Cette conclusion est tout à fait analogue, comme on le voit, à celle que j'avais obtenue pour l'équation de Kummer, mais beaucoup plus générale.

8. Les principes précédents conduisent sans peine à la solution de ce problème : *Les équations* (2) *et* (3) *étant données, reconnaître si elles peuvent se déduire l'une de l'autre par une substitution rationnelle.*

Les explications données plus haut nous dispensent d'entrer dans un grand nombre de détails. On reconnaît d'abord qu'un certain nombre de conditions préalables doivent être remplies : l'équation (3) doit avoir au moins autant de points singuliers logarithmiques et de points à apparence singulière que l'équation (2); la différence δ_h relative à un point critique α_h doit être multiple d'une des différences δ_i relative à un point critique a_i, ... Ces conditions étant supposées remplies, les nombre $N_1, N_2, \ldots, N_p$ auront un nombre limité de systèmes de valeurs positives. Quant à Δ, on obtiendra comme il suit la valeur de ce nombre ou du moins une limite supérieure. Si l'équation (3) n'a pas de points à apparence singulière, l'équation (2) ne pourra pas non plus en avoir, et l'on aura

$$\Delta = 0,$$

comme on l'a vu plus haut. Si les deux équations ont des points à apparence singulière, nous désignerons par Δ_1 et Δ_2 les différences des exposants de discontinuité des intégrales de la première et de la seconde équation dans le domaine d'un de ces points, par A_1, et A_2 le nombre des points à apparence singulière des deux équations. Dans le cas où $A_1 = 0$, on trouve aisément

$$\Delta = \Sigma\Delta_2 - A_2;$$

mais, si A_1 n'est pas nul, on a les deux inégalités

$$D\,\Sigma\,\Delta_1 \leqq \Sigma\Delta_2, \quad \Delta \leqq A_1 D + \Sigma\Delta_2 - A_2,$$

qui fournissent à la fois des limites pour D et Δ, et il est aisé, dans chaque cas particulier, d'obtenir des limites beaucoup moins élevées par d'autres considérations. Quoi qu'il en soit, une fois qu'on aura choisi un système de valeurs admissibles pour les nombres N_i et Δ, l'équation (15) et les équations analogues donneront les valeurs des nombres n_i, pourvu que l'on n'ait pas

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i} = p - 2.$$

Écartons d'abord cette hypothèse; les valeurs que l'on trouve pour les nombres n_i devront être entières et positives, ou nulles dans certains cas.

On aura donc tous les éléments nécessaires pour effectuer le calcul, et l'on voit que la question se ramène dans tous les cas à un nombre limité d'essais.

Les calculs pourront sans doute être très compliqués, mais il me suffit pour le moment d'avoir montré que le problème est susceptible d'une solution complète. J'étudie plus spécialement ci-dessous le cas où $p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i} < 0$, qui présente un intérêt particulier.

Il en est tout autrement dans les quatre cas où l'on a

$$p - 2 = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i};$$

l'équation (15) ne nous donne plus les valeurs de n_i, et il peut y avoir une infinité de solutions des équations (9), (10), (11). Il est aisé de se rendre compte de cette circonstance par un exemple; si l'on cherche toutes les fonctions rationnelles $x = \varphi(t)$ vérifiant une équation de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{g\, dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}},$$

on sait que, pour un degré donné n de $\varphi(t)$, il devra y avoir une relation algébrique entre k^2 et k'^2. Si k^2 et k'^2 sont donnés, on pourra vérifier si cette relation est vérifiée ou non pour $n = 2, 3, 5, \ldots$; mais, aussi loin qu'on aille dans la série des essais, on ne pourra jamais affirmer que la transformation n'est pas possible par cette seule considération des équations modulaires.

Le problème qui nous occupe dans ces quatre cas particuliers est lié à la réduction des intégrales abéliennes, et je me propose d'y revenir dans un autre travail.

II.

9. Pour donner un exemple de discussion du système des équations (9), (10), (11), je me propose d'étudier ici le cas de $p = 3$, $q = 4$, qui peut être regardé comme le plus simple après celui de $p = q = 3$.

J'observe d'abord que, dans le cas particulier en question, les équations (9), (10) et (11) sont équivalentes aux suivantes :

$$D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 + n_2\mu_2 = N_3 + n_3\mu_3, \tag{16}$$

$$N_1 + N_2 + N_3 \geqq 4, \tag{17}$$

$$n_1(\mu_1 - 2) + n_2(\mu_2 - 2) + N_1 + N_2 = 2n_3 + 4 - 2\Delta; \tag{18}$$

l'équation (18) s'obtient en remplaçant, dans l'équation (11), $D - \sum_{i=1}^{i=3} n_i$ par la valeur $2 - \Delta$ tirée de la formule (13). La discussion comprend plusieurs cas.

Premier cas. — Soit $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. La seule solution est

$$N_1 = N_2 = N_3 = 2, \quad D = 2, \quad \Delta = 0.$$

La substitution correspondante sera du second degré, et l'on peut prendre comme type de cette substitution $x = t^2$; si les points singuliers de la première équation sont, comme nous le supposons toujours, $0, 1, \infty$, ceux de la seconde équation seront $0, 1, -1, \infty$; μ_1, μ_2, μ_3 sont arbitraires.

Deuxième cas. — Soient $n_2 = n_3 = 0$, $n_1 \neq 0$. Les équations deviennent

$$D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 = N_3, \quad N_1 + N_2 + N_3 \geqq 4, \quad 2N_1 + 2n_1(\mu_1 - 1) = 4 - 2\Delta;$$

elles admettent les systèmes de solutions suivants :

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.	Δ.
2	»	»	1	0	0	1	3	3	3	0
2	»	»	2	0	0	0	4	4	4	0
3	»	»	1	0	0	0	3	3	3	0
2	»	»	1	0	0	0	2	2	2	1

On peut prendre comme types de substitutions correspondantes les substitutions ci-dessous :

$$x = \frac{t(4t-3)^2}{(t-1)(4t-1)^2}, \tag{19}$$

$$x = \frac{(t^2-6t+1)^2}{(t+1)^4}, \tag{20}$$

$$x = \frac{(8t^2-36t+27)^2}{(9-8t)^3}, \tag{21}$$

$$x = \frac{(2t^2-2t+1)^2}{(2t-1)^2}, \tag{22}$$

$$x = \frac{(t-\alpha)^2}{t(t-1)}. \tag{23}$$

Troisième cas. — Soient $n_3 = 0$, $n_1 n_2 \neq 0$. Les équations deviennent

$$D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 + n_2\mu_2 = N_3,$$
$$n_1(\mu_1 - 2) + n_2(\mu_2 - 2) + N_1 + N_2 = 4 - 2\Delta,$$
$$N_1 + N_2 + N_3 \geqq 4.$$

Les substitutions correspondantes peuvent se déduire des intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. En effet, toute fonction rationnelle provenant d'un système de solutions du système précédent donnera lieu à une identité de la forme

$$\Pi_1 P_1^{\mu_1} - \Pi_2 P_2^{\mu_2} = \Pi_3,$$

où Π_i est de la forme

$$(t-\alpha_1)^{r_i^1}(t-\alpha_2)^{r_i^2}(t-\alpha_3)^{r_i^3}(t-\alpha_4)^{r_i^4}.$$

Prenons, par exemple,

$$\Pi_3 = (t-\alpha_1)^{m_1}(t-\alpha_2)^{m_2}(t-\alpha_3)^{m_3}(t-\alpha_4)^{m_4};$$

supposons m_4 supérieur à l'unité. Par une substitution linéaire convenable, on pourra remplacer α_1, α_2, α_3 par les valeurs 0, 1, ∞ et l'on aura précisément une de ces identités d'où se déduisent les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. La réciproque est aisée à démontrer.

Quatrième cas. — Soit $n_1 n_2 n_3 \neq 0$. On a encore plusieurs hypothèses à examiner, suivant le signe de $1 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3}$.

Dans les quatre cas où la somme $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$ est supérieure à l'unité, les équations (16), (17), (18) admettent une infinité de systèmes de solutions; il n'y a aucune limite, ni pour les nombres n_i ni pour les nombres N_i.

Dans les trois cas où la somme $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$ est égale à l'unité, il y a encore une infinité de solutions, toutes comprises dans les suivantes, où h désigne un nombre entier positif arbitraire :

$\Delta = 0.$

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.
3	3	3	h	h	h	2	2	2	$3h+2$
»	»	»	h	$h+2$	$h+2$	6	0	0	$3h+6$
2	4	4	$2h+4$	$h+2$	h	0	0	8	$4h+8$
»	»	»	$2h+3$	$h+1$	h	0	2	6	$4h+6$
»	»	»	$2h+2$	h	h	0	4	4	$4h+4$
»	»	»	$2h+2$	$h+1$	h	1	1	5	$4h+5$
»	»	»	$2h+1$	h	h	1	3	3	$4h+3$
»	»	»	$2h+1$	$h+1$	h	2	0	4	$4h+4$
»	»	»	$2h$	h	h	2	2	2	$4h+2$
»	»	»	$2h-2$	h	h	4	0	0	$4h$
2	3	6	$3h+6$	$2h+4$	h	0	0	12	$6h+12$
»	»	»	$3h+5$	$2h+3$	h	0	1	10	$6h+10$
»	»	»	$3h+4$	$2h+2$	h	0	2	8	$6h+8$
»	»	»	$3h+3$	$2h+1$	h	0	3	6	$6h+6$
»	»	»	$3h+2$	$2h$	h	0	4	4	$6h+4$
»	»	»	$3h+1$	$2h-1$	h	0	5	2	$6h+2$
»	»	»	$3h$	$2h-2$	h	0	6	0	$6h$
»	»	»	$3h+4$	$2h+3$	h	1	0	9	$6h+9$
»	»	»	$3h+3$	$2h+2$	h	1	1	7	$6h+7$
»	»	»	$3h+2$	$2h+1$	h	1	2	5	$6h+5$
»	»	»	$3h+1$	$2h$	h	1	3	3	$6h+3$
»	»	»	$3h$	$2h-1$	h	1	4	1	$6h+1$
»	»	»	$3h+2$	$2h+2$	h	2	0	6	$6h+6$
»	»	»	$3h+1$	$2h+1$	h	2	1	4	$6h+4$
»	»	»	$3h$	$2h$	h	2	2	2	$6h+2$
»	»	»	$3h-1$	$2h-1$	h	2	3	0	$6h$
»	»	»	$3h$	$2h+1$	h	3	0	3	$6h+3$
»	»	»	$3h-1$	$2h$	h	3	1	1	$6h+1$
»	»	»	$3h-2$	$2h$	h	4	0	0	$6h$

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\Delta = 1.}$$

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.
2	3	6	$3h+3$	$2h+2$	h	0	0	6	$6h+6$
»	»	»	$3h+2$	$2h+1$	h	0	1	4	$6h+4$
»	»	»	$3h+1$	$2h$	h	0	2	2	$6h+2$
»	»	»	$3h+1$	$2h+1$	h	1	0	3	$6h+3$

A chacune de ces solutions correspond une infinité de différentielles de la forme

$$\frac{dt}{(t-\alpha_1)^{\lambda_1}(t-\alpha_2)^{\lambda_2}(t-\alpha_3)^{\lambda_3}(t-\alpha_4)^{\lambda_4}},$$

qui se ramènent par un changement de variable à des différentielles elliptiques.

Si l'on suppose $\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}<1$, on n'a qu'un nombre limité de solutions, où aucun des nombres μ_1, μ_2, μ_3 ne peut dépasser 14. Le nombre Δ ne peut être supérieur à l'unité; il ne pourra donc prendre que les deux valeurs $\Delta=0$ et $\Delta=1$. Je citerai comme exemples les solutions suivantes :

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.	Δ.
2	3	14	9	6	1	0	0	4	18	0
2	3	13	9	6	1	0	0	5	18	0
2	3	13	8	5	1	0	1	3	16	0
2	3	12	9	6	1	0	0	6	18	0
2	3	12	8	5	1	0	1	4	16	0

....

III.

10. Une application importante des précédentes recherches est relative à l'étude des intégrales algébriques des équations linéaires du second ordre. On sait, en effet, d'après un beau résultat dû à M. Klein (*Société de Physique d'Erlangen*, juin 1876), que l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2}+P\frac{dy}{dt}+Qy=0, \tag{24}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de t, aura son intégrale algébrique si les deux conditions suivantes, qui sont d'ailleurs nécessaires, sont remplies : 1° $e^{\int P dt}$ est une fonction algébrique de t; 2° l'équation du troisième ordre

$$(25)\quad \frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2+\frac{(1-\nu^2)x^2+(\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1)x+1-\lambda^2}{2x^2(x-1)^2}x'^2=2Q-\frac{1}{2}P^2-\frac{dP}{dt},$$

où λ, μ, ν ont l'un des systèmes de valeurs ci-dessous :

λ.	μ.	ν.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

admet pour intégrale une fonction rationnelle de t.

Laissant de côté la première condition que nous supposons remplie, proposons-nous de voir comment on pourra reconnaître si la seconde l'est également. Le problème qu'il s'agit de résoudre est évidemment un cas particulier du problème général dont il a été question plus haut, et l'on obtient ce cas particulier en supposant que l'équation (2) est une des quatre équations hypergéométriques dont l'intégrale générale est algébrique et pour lesquelles λ, μ, ν ont un des systèmes de valeurs ci-dessus.

Pour fixer les idées, je suppose que l'on prenne

$$\lambda=\tfrac{1}{2},\quad \mu=\tfrac{1}{3},\quad \nu=\tfrac{1}{5};$$

l'équation (24) ne devra pas avoir de point singulier logarithmique, et la différence des exposants de discontinuité relative à un point critique non apparent sera un nombre commensurable qui, réduit à sa plus simple expression, aura pour dénominateur l'un des nombres 2, 3, 5. Supposons qu'il existe une fonction rationnelle $\varphi(t)$ répondant à la question. Soit $t=\alpha$ un point singulier non apparent de l'équation (24) et δ la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale relative à ce point. Si δ est de la forme $\frac{m}{2}$, on en conclura que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=0$; de même, si l'on a $\delta=\frac{m}{3}$ ou $\delta=\frac{m}{5}$, on en conclura que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 1$ ou de l'équation $\varphi(t) = \infty$. C'est ce qui résulte bien clairement du n° 4. On partagera, d'après cela, les points singuliers non apparents de l'équation (24) en trois groupes, suivant que le dénominateur de δ est l'un des nombres 2, 3, 5. Je désignerai par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ les points singuliers du premier groupe, et par $\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\lambda_h}{2}$ les valeurs correspondantes de δ; par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$ les points du second groupe, et par $\frac{\mu_1}{3}, \frac{\mu_2}{3}, \ldots, \frac{\mu_i}{3}$ les valeurs correspondantes de δ; enfin par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ les points du troisième groupe et par $\frac{\nu_1}{5}, \frac{\nu_2}{5}, \ldots, \frac{\nu_k}{5}$ les valeurs correspondantes de δ. Je suppose que tous ces points singuliers sont à distance finie; ce qu'on peut toujours réaliser par un changement linéaire de variable. Posons

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= (t-\alpha_1)^{\lambda_1}(t-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(t-\alpha_h)^{\lambda_h},\\
\Pi_2 &= (t-\beta_1)^{\mu_1}(t-\beta_2)^{\mu_2}\ldots(t-\beta_i)^{\mu_i},\\
\Pi_3 &= (t-\gamma_1)^{\nu_1}(t-\gamma_2)^{\nu_2}\ldots(t-\gamma_k)^{\nu_k},\\
N_1 &= \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_h,\\
N_2 &= \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_i,\\
N_3 &= \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k.
\end{aligned}$$

S'il existe une fonction rationnelle $x = \varphi(t)$ vérifiant l'équation (25), on aura les deux expressions

$$x = \frac{\Pi_1 P^2}{\Pi_3 R^5}, \quad x - 1 = \frac{\Pi_2 Q^3}{\Pi_3 R^5};$$

ce qui donnera lieu à l'identité

$$\Pi_1 P^2 - \Pi_2 Q^3 = \Pi_3 R^5, \tag{26}$$

P, Q, R étant trois fonctions entières de degrés inconnus pour le moment.

Soient n_1, n_2, n_3 ces degrés; les équations générales (9) et (11) deviennent ici

$$D = N_1 + 2n_1 = N_2 + 3n_2 = N_3 + 5n_3, \tag{27}$$

$$n_1 + 2n_2 + 4n_3 + N_1 + N_2 + N_3 - (h+i+k) + \Delta = 2D - 2, \tag{28}$$

et ces équations résolues nous donnent pour n_1, n_2, n_3 les valeurs suivantes :

$$(29)\qquad \begin{cases} -\dfrac{n_1}{15}+\dfrac{7N_1}{15}+\dfrac{N_2}{3}+\dfrac{N_3}{5}+\Delta=(h+i+k)-2, \\ -\dfrac{n_2}{10}+\dfrac{N_1}{2}+\dfrac{3N_2}{10}+\dfrac{N_3}{5}+\Delta=(h+i+k)-2, \\ -\dfrac{n_3}{6}+\dfrac{N_1}{2}+\dfrac{N_2}{3}+\dfrac{N_3}{6}+\Delta=(h+i+k)-2. \end{cases}$$

Ces formules ne contiennent d'indéterminé que le nombre Δ. Bornons-nous d'abord au cas le plus simple, celui où l'équation (24) n'a pas de points singuliers apparents. On aura alors forcément, d'après ce qu'on a vu, $\Delta = 0$, et les équations (29) nous donnent sans aucune ambiguïté les valeurs de n_1, n_2, n_3. Si les valeurs ainsi obtenues ne sont pas toutes des nombres entiers positifs, il est inutile de continuer le calcul, et l'on pourra affirmer que l'équation (25) n'admet pas d'intégrale rationnelle. Si l'on trouve ainsi pour n_1, n_2, n_3 des nombres entiers positifs (pouvant être nuls), on aura tous les éléments nécessaires au calcul de l'identité (26). Le nombre d'équations de condition fournies par cette identité est égal à $D+1$ et l'on dispose de $n_1+n_2+n_3+2$ coefficients indéterminés. Or des équations (27) et (28) on déduit sans peine, en supposant $\Delta = 0$,

$$n_1+n_2+n_3+2 = D+4-(h+i+k);$$

le nombre des coefficients indéterminés est donc inférieur au nombre des équations de condition et la différence est $h+i+k-3$, nombre positif, sauf dans le cas où l'équation (24) elle-même serait une équation hypergéométrique. Dans ce cas, qui a été traité si complètement par M. Schwarz (*Journal de Borchardt,* t. 75), on connaît, d'après le Tableau donné par ce géomètre, les valeurs admissibles pour N_1, N_2, N_3 et la méthode précédente fournit un procédé de calcul régulier pour trouver l'intégrale elle-même. Si $h+i+k$ est supérieur à trois, l'identité (26) ne pourra avoir lieu que si les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \ldots, \beta_i, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ satisfont à certaines conditions. La détermination de ces équations de condition est un problème d'élimination, qui n'offre que des difficultés algébriques. Si ces équations de condition ne sont pas remplies, l'équation (25) n'admettra pas d'intégrale rationnelle. Si elles sont remplies, on en déduira une identité de la forme (26) et une fonction rationnelle $\varphi(t)$ qui est la seule pouvant répondre à la question. Il restera à vérifier si elle satisfait ou non à l'équation (25).

II. Si l'équation (24) a des points singuliers apparents, Δ ne pourra être nul, mais il est aisé d'avoir la valeur de ce nombre. Soient b un point singulier apparent de cette équation (24) et Δ' la différence des exposants auxquels appartiennent les intégrales dans le domaine de ce point; $t=b$ pourra être racine d'ordre Δ' d'une équation telle que $\varphi(t)=a$, où a est différent de 0, 1, ∞, ou bien racine de l'une des équations $\varphi(t)=0$, $\varphi(t)=1$, $\varphi(t)=\infty$ au degré de multiplicité $2\Delta'$, $3\Delta'$, $5\Delta'$ respectivement.

Si l'on se reporte à la signification de Δ, on voit que le terme qui provient de la racine multiple $t=b$ sera dans tous les cas $\Delta'-1$.

En faisant la somme de tous les termes analogues et en désignant par A le nombre des points singuliers apparents de l'équation (24), on trouve

$$\Delta = \Sigma\,\Delta' - A.$$

On peut, par conséquent, partager les points singuliers apparents de l'équation (24) en plusieurs groupes, suivant que l'on suppose que la valeur correspondante de x est différente de 0, 1, ∞ ou a l'une de ces valeurs.

Ce partage peut être effectué de plusieurs manières, mais le nombre des hypothèses possibles est évidemment limité. Adoptons une de ces hypothèses en particulier; la valeur de Δ est connue, et les équations (29) fourniront les valeurs des nombres entiers n_1, n_2, n_3. On sera encore ramené au calcul d'une identité telle que (26); mais aux équations de condition provenant de cette identité il faudra ajouter d'autres conditions qui expriment que les polynômes P, Q, R contiennent certains facteurs linéaires ou bien que l'équation $\varphi'(t)=0$ admet, outre les racines des trois équations $\Pi_1 P=0$, $\Pi_2 Q=0$, $\Pi_3 R=0$, certaines racines à des degrés de multiplicité déterminés. On reconnaît facilement que le nombre des équations de condition est supérieur à celui des inconnues, si $h+i+k$ est supérieur à trois. Le reste du calcul s'achèvera comme plus haut.

12. Les détails dans lesquels nous sommes entrés pour le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{5}$ nous dispensent d'insister beaucoup sur les deux autres cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{3}$ ou $\nu = \frac{1}{4}$. Il y a, cependant, une complication spéciale relative à ces deux cas que l'on saisira facilement. Ainsi, dans le second cas, si la différence δ relative à un point singulier non apparent α est de la forme $\frac{m}{2}$, on pourra faire les deux hypothèses suivantes : $t = \alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 0$, ou bien $t = \alpha$ est racine d'ordre $2m$ de l'équation $\varphi(t) = \infty$. De même, dans le premier cas, si la différence δ, relative à un point singulier non apparent α, est de la forme $\frac{m}{3}$, on pourra supposer indifféremment que $t = \alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 1$ ou de l'équation $\varphi(t) = \infty$. Une difficulté analogue se présente pour les points singuliers apparents; mais le nombre des combinaisons possibles est toujours limité, et il suffira d'essayer successivement chacune de ces combinaisons comme il a été expliqué tout à l'heure.

On pourrait étudier de la même manière l'équation (25) en supposant $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{n}$. Mais il est à remarquer qu'aussi loin que l'on pousse les essais, en prenant successivement pour n les nombres entiers 2, 3, 4, 5, ..., on ne pourra jamais affirmer sans d'autres considérations que l'intégrale générale de l'équation (24) n'est pas algébrique. Il paraît donc préférable d'employer la méthode suivante. L'équation hypergéométrique que l'on obtient en prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{n}$ est la suivante

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4n^2} = 0; \tag{30}$$

elle admet les deux intégrales particulières distinctes

$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)^{\frac{1}{n}},$$
$$y_2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

dont le produit est égal à l'unité. Par conséquent, si dans l'équation (30) on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$, et qu'on multiplie toutes les intégrales de la nouvelle équation par un facteur de la forme (7), le produit des intégrales correspondant à y_1 et à y_2 aura une différentielle logarithmique rationnelle. Donc, si l'équation (25) admet une intégrale rationnelle pour une valeur convenable de ν, en supposant $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, l'équation linéaire du troisième ordre, qui est vérifiée par le produit de deux intégrales quelconques de (24), admettra une intégrale particulière de la forme (7). Comme il est facile de déterminer *a priori* des valeurs limites pour les exposants qui y figurent, ainsi que pour leur somme, on voit qu'on pourra toujours reconnaître s'il en est ainsi par un nombre *fini* d'essais. S'il arrive que l'on trouve pour une intégrale particulière une expression de la forme W, on commencera par multiplier toutes les intégrales de l'équation (24) par un facteur de même nature, de façon que le produit de deux intégrales particulières de la nouvelle équation soit un polynôme entier entre t, $R(t)$. Cela fait, l'intégration de la nouvelle équation se ramènera à des quadratures (*voir* HERMITE, *Annali di Matematica*, t. IX, 2^e série).

Soit

$$\frac{d^2z}{dt^2} + p\frac{dz}{dt} + qz = 0$$

l'équation dont il s'agit, telle que le produit de deux intégrales particulières distinctes z_1, z_2 soit un polynôme $R(t)$. Admettons que l'équation a une intégrale holomorphe dans le domaine de chaque point critique; on aura

$$p = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

et il est aisé de démontrer que $e^{-\int p\,dt}$ sera de la forme

$$e^{-\int p\,dt} = \frac{F(t)}{\sqrt{f(t)}},$$

F et f étant des fonctions rationnelles de t. Cela posé, des équations

$$z_1 z_2 = R(t),$$
$$z_1\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dz_1}{dt} = Ce^{-\int p\,dt} = \frac{C\,F(t)}{\sqrt{f(t)}},$$

on tire

$$z_1 = \sqrt{R(t)}\, e^{\int \frac{C F(t)}{R(t)\sqrt{f(t)}} dt},$$

$$z_2 = \sqrt{R(t)}\, e^{-\int \frac{C F(t)}{R(t)\sqrt{f(t)}} dt},$$

et la question se ramène à rechercher si l'intégrale

$$\int \frac{F(t)}{R(t)\sqrt{f(t)}}\, dt$$

est égale au logarithme d'une fonction algébrique. Cette question a donné lieu à un grand nombre de recherches, en particulier à des recherches d'Abel et de M. Tchebycheff. Je renverrai à leurs Mémoires pour ce qui concerne cette dernière question.