JULES TANNERY

# Deux leçons de Cinématique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 3 (1886), p. 43-80
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__43_0>

# DEUX LEÇONS DE CINÉMATIQUE,

PAR M. JULES TANNERY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE [1].

Les formules et les constructions qui permettent de calculer ou de construire les éléments relatifs à la courbure des trajectoires des points d'un corps solide dont un plan glisse sur un plan fixe ou dont un point reste fixe s'établissent habituellement par des procédés qui ne mettent pas nettement en évidence la généralité de ces formules ou de ces constructions. Il en est tout autrement quand on déduit celles-ci des propriétés relatives à l'accélération. Au point de vue cinématique, cette voie est d'ailleurs la plus naturelle. Dans cet ordre d'idées, les démonstrations se font parallèlement et d'une façon très simple, soit qu'on interprète les formules analytiques, soit qu'on reste dans le domaine de la pure Géométrie, en s'appuyant sur quelques principes de la Géométrie des segments de droite. Ces principes, dont la généralité ressort facilement, sont bien connus; ils ont été développés par différents auteurs, principalement par Möbius. Toutefois, j'ai cru devoir en reprendre ici l'exposé systématique, afin de bien fixer le sens des notations que j'emploierai. J'ai d'ailleurs, dans cette première Partie, supprimé celles des démonstrations qui ne présentaient aucune difficulté.

## I.

Un segment de droite est entièrement défini si l'on se donne son origine A et son extrémité B; le sens de ce segment est le sens dans

---

(1) Cet article a été rédigé pour répondre à une question posée dans le programme d'agrégation pour 1886. Il est, sauf de légères modifications, la reproduction de Leçons faites à la Sorbonne en 1880.

lequel il serait parcouru par un mobile allant du point A au point B; un tel segment se représente par AB ou $+$ AB; les symboles $-$AB, BA, $+$BA ont la même signification, ils représentent un segment dont l'origine est B et l'extrémité A. La droite indéfinie sur laquelle est situé le segment AB est dite sa ligne d'action. Deux segments sont équipollents si leurs lignes d'action sont parallèles, si leurs sens sont les mêmes, si enfin ils sont égaux. L'égalité

$$AB = A'B'$$

veut dire que les deux segments AB, A'B' sont équipollents.

En désignant par $n$ un nombre positif ou négatif, je représenterai par $n$AB l'un quelconque des segments équipollents au segment AB' ayant même ligne d'action que le segment AB, même sens ou sens contraire, suivant que $n$ est positif ou négatif, tel enfin que le rapport des longueurs AB' et AB soit égal à la valeur absolue de $n$.

Si la ligne d'action d'un segment est parallèle à une droite OX, sur laquelle on ait choisi une *direction* positive, si l'on a en outre choisi une unité de longueur, on peut représenter ce segment et tous les segments équipollents par un *nombre* dont la valeur absolue est la mesure de la longueur du segment considéré, et le signe $+$ ou $-$ selon que le sens de ce segment est ou non le sens de la direction positive. Si $a$ est le nombre qui représente ainsi le segment considéré et si PQ est un segment dont la ligne d'action soit OX, dont le sens soit celui de la direction positive choisie sur OX, qui enfin soit égal à l'unité de longueur, les segments représentés d'après ces conventions par le nombre $a$ et par le symbole $a$PQ sont équipollents. Le nombre $a$ représente ainsi des unités d'une espèce particulière qui ne peuvent se réduire avec des unités d'une autre espèce. Si $a$ désigne un nombre quelconque, positif ou négatif, en parlant d'un segment égal à $a$ porté sur une direction déterminée ou parallèlement à cette direction, j'entendrai parler d'un segment AB qui, d'après les conventions précédentes et en regardant la direction considérée comme la direction positive, soit représenté ou *mesuré* par le nombre $a$. Inversement, quand aucune ambiguïté n'est à craindre, on peut désigner par AB non le segment lui-même, mais le nombre positif ou négatif qui le mesure.

Un segment dont l'origine se confond avec l'extrémité est dit *nul*;

sa direction n'est pas déterminée; on le représente par le nombre zéro.

Si AA′, BB′ sont deux segments quelconques; si *oa* est un segment équipollent à AA′, *ab* un segment équipollent à BB′, le segment *ob* ou tout segment équipollent est dit la *somme géométrique des segments* AA′, BB′; cette somme se représente par le symbole

$$AA' + BB';$$

on a d'ailleurs

$$AA' + BB' = BB' + AA'.$$

Le symbole

$$AA' - BB'$$

représente la somme géométrique des segments AA′ et $-BB' = B'B$; cette somme est aussi ce qu'on appelle la *différence géométrique des deux segments* AA′, BB′. On a

$$AA' - AA' = AA' + A'A = 0.$$

De la notion de somme géométrique de deux segments, on s'élève à la notion de somme géométrique de trois, quatre, ... segments. La somme géométrique d'un nombre quelconque d'éléments ne change pas quand on modifie l'ordre de ces éléments; au lieu d'ajouter géométriquement à un segment la somme géométrique de plusieurs segments, on peut lui ajouter successivement ces divers segments.

Si AA′, BB′, CC′, ... sont des segments quelconques et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... des nombres abstraits quelconques, le symbole

$$\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \ldots$$

représentera la somme géométrique des segments $\alpha AA'$, $\beta BB'$, $\gamma CC'$, ... définis comme précédemment. Étant donnée une égalité géométrique (ou équipollence) exprimant qu'un certain segment géométrique est équipollent à un autre segment ou à la somme géométrique de plusieurs autres, on peut toujours faire passer tous les termes dans un même membre et écrire ainsi cette égalité sous la forme

$$(1) \qquad \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \ldots = 0;$$

elle exprime alors qu'un certain polygone, dont les côtés sont équipollents aux segments $\alpha AA'$, $\beta BB'$, $\gamma CC'$, ..., est fermé. Si cette égalité est vraie, il en est de même de l'égalité

$$\lambda\alpha AA' + \lambda\beta BB' + \lambda\gamma CC' + \ldots = 0,$$

où $\lambda$ désigne un nombre abstrait quelconque et où $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$, ... désignent les nombres abstraits, positifs ou négatifs, obtenus en multipliant, suivant les règles de l'Algèbre, les nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... par $\lambda$; cela résulte de la considération de deux figures homothétiques, directement ou inversement, selon que $\lambda$ est positif ou négatif.

Une égalité telle que (1) a un sens purement géométrique; si les lignes d'action des segments AA′, BB′, CC′, ... sont toutes parallèles à une même droite sur laquelle on a choisi une direction positive, les segments AA′, BB′, CC′, ... pourront être représentés par des nombres, en remplaçant les symboles AA′, BB′, CC′, ... par ces nombres; en effectuant, au sens de l'Algèbre, les multiplications et les additions, l'égalité subsistera au sens algébrique.

Si l'on projette tous les segments AA′, BB′, CC′, ... sur un axe quelconque OX, au moyen de plans parallèles entre eux et non parallèles à cet axe; si l'on désigne par $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$, ... les projections des points A, A′, B, B′, C, C′, .. ; les segments $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, ..., dont la ligne d'action est OX, sont dits les projections sur cet axe des segments AA,′ BB′, CC′, ...; une relation géométrique entre ces segments, telle que la relation

$$\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \ldots = 0,$$

entraîne la relation suivante entre les projections

$$\alpha\overline{aa'} + \beta\overline{bb'} + \gamma\overline{cc'} + \ldots = 0;$$

cette dernière relation peut prendre un sens algébrique si l'on a choisi sur l'axe OX une direction positive, si l'on remplace les segments $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, ... par les nombres qui les mesurent, et si l'on effectue, au sens algébrique, les opérations indiquées.

Si l'on prend dans l'espace trois axes de coordonnées $ox$, $oy$, $oz$, en parlant de la projection d'un segment sur l'un de ces axes, on entend que cette projection est effectuée au moyen de plans parallèles aux deux autres. Un segment quelconque est la somme géométrique de ses projections sur ces trois axes; si $a, b, c$ sont trois nombres représentant trois segments portés respectivement sur les directions $ox$, $oy$, $oz$, la somme géométrique de ces trois segments est un segment équipollent au segment dont l'origine est le point $o$, et l'extrémité le point dont les coordonnées sont $a, b, c$; en parlant de la direction définie par les trois nombres $a, b, c$, on entend la direction de ce dernier segment. Des conventions analogues, sur lesquelles il est inutile d'insister, sont adoptées en Géométrie plane.

Si l'on désigne les projections des segments AA′, BB′, CC′, ... sur les trois axes de coordonnées $ox$, $oy$, $oz$, respectivement par $a, b, c, \ldots$ pour l'axe des $x$, par $a_1, b_1, c_1, \ldots$ pour l'axe des $y$, par $a_2, b_2, c_2, \ldots$ pour l'axe des $z$, l'égalité géométrique

$$(1) \qquad \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \ldots$$

entraîne les égalités (géométriques ou algébriques)

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha a \ + \beta b \ + \gamma c \ + \ldots = 0, \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 + \ldots = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, ces trois égalités entraînent l'égalité géométrique (1); il suffit, pour le voir, de donner aux égalités (2) la signification géométrique et de les ajouter géométriquement en remarquant que la somme géométrique des segments $\alpha a$, $\alpha a_1$, $\alpha a_2$ est le segment $\alpha . AA' \ldots$

On dit qu'un plan est orienté [1] si l'on a choisi dans ce plan un sens pour les rotations positives. Ayant pris dans le plan un point arbitraire et considérant une demi-droite [2], limitée à ce point et tournant autour en restant dans le plan, on définit l'un des deux sens dans lesquels elle peut tourner comme étant le sens positif; on con-

[1] Cette dénomination a été introduite par M. Darboux; *voir* à ce sujet, dans le Tome XXIII des *Mathematische Annalen*, un article de M. Stephanos, *Mémoire sur la représentation*, etc., p. 337. Il convient aussi de rappeler les notions de *semi-plan*, *semi-droite*, *cycle*, etc., introduites et développées par M. Laguerre dans de nombreuses et intéressantes Communications.

[2] L'expression *demi-droite* sera employée dans la suite pour désigner une droite indéfinie dans un sens et limitée de l'autre à un point; une demi-droite définit une direction.

De même l'expression *demi-plan* désignera une portion de plan s'étendant indéfiniment d'un côté d'une droite.

vient, en outre, de dire de deux demi-droites situées dans le même plan qui tournent autour de leurs extrémités, en restant parallèles et de même sens, qu'elles tournent dans le même sens; le sens des rotations positives est alors défini pour tous les points du plan. Si l'on veut, on peut imaginer un observateur, les pieds appuyés sur le plan et regardant tourner une demi-droite à ses pieds; lorsqu'elle passe devant lui, elle va de sa droite vers sa gauche, ou de sa gauche vers sa droite; l'un de ces deux sens correspond aux rotations positives; si l'observateur se transporte en un autre point du plan, en restant sur la même face du plan, le sens des rotations positives reste le même pour lui.

Étant donné dans un plan l'angle AOB, j'appellerai sens de OA vers OB le sens dans lequel une demi-droite limitée au point O, coïncidant d'abord avec OA, doit tourner autour du point O pour venir coïncider avec OB, en décrivant l'angle AOB (moindre que deux droits). Deux angles AOB, A′O′B′, situés dans le même plan, ont la même disposition si le sens de OA vers OB est le même que le sens de O′A′ vers O′B′; dans ce cas, on peut déplacer et déformer d'une façon continue l'angle A′O′B′, sans le faire sortir du plan, sans que ses côtés viennent se placer l'un sur l'autre ou dans le prolongement l'un de l'autre, de manière à le faire coïncider avec AOB, le côté O′A′ coïncidant avec OA, et le côté O′B′ avec OB.

Si le plan qui contient l'angle AOB est orienté, on dit que cet angle a la disposition directe ou la disposition inverse suivant que le sens de OA vers OB est ou non le sens des rotations positives.

Si un plan est rapporté à un système d'axes coordonnés $ox$, $oy$, il est, par cela même, orienté; le sens des rotations positives est le sens de $ox$ vers $oy$; si les deux directions $o$A, $o$A′, dont l'origine coïncide avec l'origine des coordonnées, sont définies, comme il a été expliqué plus haut, par les quantités $a$, $b$, d'une part, $a'$, $b'$, de l'autre, l'angle A$o$A′ aura la disposition directe ou la disposition inverse (la disposition de l'angle $xoy$ ou de l'angle $yox$) suivant que le déterminant $ab' - a'b$ sera positif ou négatif.

Si A, B sont deux directions situées dans un plan orienté, pour définir l'angle (A, B) de ces deux directions, on procède comme il suit : on mènera par un point arbitraire $o$ du plan deux demi-droites $oa$, $ob$ parallèles aux deux directions A, B et de même sens; qu'on imagine ensuite une demi-droite ayant son origine en $o$ et coïncidant d'abord avec $oa$, et sur cette demi-droite un point $m$ tel que le segment $om$ ait la direction $oa$ et soit égal à l'unité de longueur; si cette demi-droite tourne toujours dans le même sens autour du point $o$, et si on l'arrête à un moment où elle coïncide avec la direction $ob$, le nombre qui mesure la longueur de l'arc décrit par le point $m$, affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'on a tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif, est ce que l'on appelle l'angle $(A, B)$. Cet angle admet une infinité de déterminations; toutes ces déterminations forment une progression arithmétique, indéfinie dans les deux sens, dont la raison est $2\pi$; l'une d'elles est en valeur absolue moindre que $\pi$; cette valeur absolue est la mesure de l'angle des deux directions, tel qu'on le considère en Géométrie. J'emploierai le symbole $(A, B)$ pour désigner l'une quelconque des déterminations précédemment définies; on a alors

$$(A, B) + (B, A) = 2n\pi,$$

en désignant par $n$ un nombre entier positif ou négatif.

Si l'angle $(A, B)$ n'est pas un multiple de $\pi$, l'angle $aob$, défini plus haut et considéré au point de vue géométrique, a la disposition directe ou inverse, suivant que celle des déterminations de $(A, B)$, qui a la plus petite valeur absolue, est un nombre positif ou négatif; on peut dire alors que l'angle $(A, B)$, considéré non comme un nombre, mais comme une figure, a, suivant les cas, la disposition directe ou la disposition inverse.

Si l'on se donne la figure $(A, B)$, les lignes trigonométriques de l'angle $(A, B)$ sont entièrement déterminées.

En considérant trois directions quelconques A, B, C dans un plan orienté, on a

$$(A, B) + (B, C) + (C, A) = 2n\pi,$$

$n$ étant un nombre entier positif ou négatif.

Lorsqu'un plan (P) est rapporté à des axes coordonnés $ox$, $oy$, on rapporte souvent les directions contenues dans ce plan à la direction $ox$; on dit, dans ce sens, qu'une direction $oA$ est définie par l'angle $\theta$, quand l'angle $(ox, oA)$ est égal à $\theta$.

Si les deux directions A, B, sans être situées dans un plan orienté, sont parallèles à un tel plan, on peut conserver, pour l'angle (A, B) de ces deux directions, la définition précédente.

Si, dans l'espace, les deux directions A, B ne sont pas parallèles à un plan orienté, l'angle de ces deux directions devra encore être regardé comme admettant une infinité de déterminations; on les obtiendra toutes en orientant un plan parallèle à ces deux directions, d'abord d'une façon, puis de l'autre; en désignant l'une quelconque de ces déterminations par $\alpha$, elles seront toutes comprises dans la formule

$$2n\pi \pm \alpha,$$

où le nombre $n$ doit prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives. Il n'y a pas lieu, dans ce cas, de distinguer l'angle des deux directions A, B de l'angle des deux directions B, A; le cosinus de l'angle de ces deux directions, supposées données, est entièrement déterminé; le sinus et la tangente sont déterminés au signe près.

Considérons deux droites sur lesquelles on ait respectivement choisi deux directions positives OX, O′X′; imaginons un segment égal à l'unité de longueur porté sur OX, dont le sens, enfin, soit celui de la direction OX; soit $i$ le nombre positif ou négatif qui mesure la projection de ce segment sur O′X′, projection effectuée au moyen de plans parallèles à un plan fixe P. Si un segment porté sur OX ou parallèlement à OX est mesuré par le nombre $a$, le nombre $a'$ qui mesure la projection de ce segment sur O′X′, faite parallèlement au plan P, sera lié au nombre $a$ par la relation

$$a' = ai.$$

En particulier, si les projections sont orthogonales, le nombre $i$ sera le cosinus de l'angle des deux directions OX, O′X′.

On dit que l'espace est *orienté* si l'on a choisi un sens pour les *rotations directes*.

Supposons que sur une droite on ait choisi une direction; imaginons un observateur couché sur la droite, traversé des pieds à la tête par cette direction et enfin un demi-plan limité à la droite et tournant autour; quand l'observateur voit ce plan passer devant lui, il peut le voir aller de sa droite vers sa gauche ou de sa gauche vers sa droite; l'un de ces deux sens sera dit *direct;* dès que ce sens aura été choisi, une direction quelconque étant donnée sur une droite quelconque, on saura ce qu'il faut entendre par un plan qui tourne autour de cette droite dans le sens direct ou dans le sens indirect, relativement à cette direction; si, sur une même droite, on considère deux directions opposées, les sens des rotations directes qui leur correspondent sont évidemment contraires.

Considérons un trièdre OABC et imaginons un observateur ayant les pieds en O, traversé des pieds à la tête par la direction OC et regardant la face AOB; imaginons enfin un demi-plan limité à la droite indéfinie (C) sur laquelle se trouve la direction OC, et s'appuyant d'abord sur la face AOC; lorsque ce plan tourne autour de la droite (C) de manière à venir s'appliquer sur la face BOC en décrivant l'angle dièdre OC, moindre que deux droits, l'observateur le voit tourner dans un certain sens (de gauche à droite ou de droite à gauche); c'est le sens que j'appellerai sens de OA vers OB pour l'observateur couché sur la direction OC. Pour le même observateur, le sens de OB vers OA est contraire au sens de OA vers OB; pour les observateurs couchés suivant les directions OA, OB, OC, les sens respectifs de OB vers OC, de OC vers OA, de OA vers OB sont les mêmes.

Deux trièdres OABC, O′A′B′C′ ont la même disposition si, pour l'observateur couché suivant OC, le sens de OA vers OB est le même que le sens de O′A′ vers O′B′ pour l'observateur couché suivant O′C′; s'il en est ainsi, on peut, en déplaçant et en déformant d'une manière continue le trièdre O′A′B′C′, sans que les trois arêtes soient jamais dans un même plan, l'amener à coïncider avec le trièdre OABC, O′A′ coïncidant avec OA, O′B′ avec OB, O′C′ avec OC; réciproquement, si cette coïncidence est possible de cette manière, les deux trièdres ont même disposition.

Les trois trièdres OABC, OBCA, OCAB ont une même disposition, différente de celle des trièdres OACB, OCBA, OBAC.

Si l'espace est orienté, on dira que le trièdre OABC a la disposition directe ou inverse, suivant que, pour l'observateur couché suivant OC, le sens de OA vers OB est direct ou non.

Si l'espace est rapporté à trois axes de coordonnées $ox$, $oy$, $oz$, il est orienté par cela même; le sens des rotations directes est le sens de OX vers OY pour l'observateur couché suivant OZ.

Un trièdre a la disposition directe ou inverse, suivant qu'il a ou non la disposition du trièdre $oxyz$; si les trois directions OA, OA′, OA″, dont l'origine est à l'origine des coordonnées, sont définies respectivement par les quantités $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$, la disposition du trièdre OAA′A″ sera directe ou inverse suivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

sera positif ou négatif. Si, en effet, on déplace d'une façon continue les directions OA, OA′, OA″, les quantités $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$ varieront d'une façon continue; le déterminant précédent ne pourra changer de signe et s'annuler que si les trois directions viennent dans un même plan; enfin, il est positif quand OA, OA′, OA″ coïncident respectivement avec $ox$, $oy$, $oz$. En particulier, si ces axes sont rectangulaires et si les trois directions OA, OA′, OA″ forment un trièdre trirectangle à disposition directe, si les neuf quantités $a, b, c, \ldots$ sont les cosinus directeurs de ces directions, le déterminant sera égal à $+1$, et chacun de ses éléments sera égal au mineur correspondant.

Supposons toujours l'espace orienté. Considérons un plan (P) et une direction (D) non parallèle au plan; imaginons un demi-plan limité à la droite sur laquelle se trouve la direction (D) et tournant autour de cette droite, relativement à cette direction, dans le sens direct; la trace de ce plan mobile sur le plan (P) tournera dans un certain sens autour d'un point de (P); ce sens pourra être pris pour le sens des rotations positives dans le plan (P); si l'on a fait cette convention, on dira que l'orientation du (P) correspond à la direction (D). Le cas le plus utile à considérer est celui où la direction (D) est perpendiculaire au plan. Par exemple, on peut orienter tous les plans tangents à une sphère par cette condition que, pour chacun d'eux, l'orientation corresponde à la direction qui va du centre de la sphère au point de contact.

Inversement, si l'on se donne un plan orienté (P), on pourra, sur chaque droite ($d$) non parallèle au plan (P), choisir une direction déterminée (D), qui corresponde à l'orientation du plan. Si l'on marche dans une telle direction en partant d'un point du plan (P), on pourra dire que l'on va au-dessus du plan (P); les deux régions de l'espace situées l'une au-dessus du plan orienté (P), l'autre au-dessous, se trouvent ainsi nettement distinguées.

Si OA, OB sont deux directions situées dans un plan orienté (P), si OC est une direction qui corresponde à l'orientation du plan (P), le trièdre OABC aura ou non la disposition directe suivant que, dans le plan (P), l'angle AOB a ou non la disposition directe.

Étant donnés deux plans orientés (P), (Q), non perpendiculaires entre eux, on dira que les orientations de ces deux plans sont les mêmes, si les directions perpendiculaires aux plans (P), (Q) qui correspondent aux orientations de ces plans font entre elles un angle aigu.

Soient AB un segment et O un point : le segment OC, dont la ligne d'action est perpendiculaire au plan qui passe par le point O et la droite AB, dont la direction OC est telle que le trièdre OABC ait la disposition directe, dont la longueur enfin est mesurée par un nombre (positif) égal au produit des deux nombres (positifs) qui mesurent l'un la longueur du segment AB, l'autre la distance du point O à la ligne d'action de ce segment, est dit le moment du segment AB par rapport au point O; la même dénomination s'applique à tout segment équipollent à OC. On peut dire que le nombre (positif) qui mesure la longueur OC est égal au double du nombre qui mesure l'aire du triangle AOB.

Les moments des segments AB, BA, par rapport au point O, sont égaux et opposés.

Supposons que sur la ligne d'action du segment AB on ait choisi une direction positive ; soit $a$ le nombre positif ou négatif qui mesure le segment AB. Si du point O on abaisse, sur la ligne d'action du segment AB, une perpendiculaire OO′, puis que l'on fasse tourner, d'un angle droit, autour de la ligne d'action de AB, dans le sens direct correspondant à la direction positive choisie sur cette ligne, le demi-plan que limite cette ligne et qui contient le point O, le segment O′O viendra occuper une position $O'O_1$ ; le moment du segment AB par rapport au point O sera équipollent au segment $a \,.\, O'O_1$.

Le moment de AB par rapport au point O est nul si le point O est situé sur la ligne d'action du segment AB, ou si le segment AB est nul; il ne peut être nul que dans ces deux cas.

Si un segment se déplace sur sa ligne d'action, en restant d'ailleurs équipollent à lui-même, son moment par rapport à un point fixe quelconque ne change pas.

Si le plan des trois points AOB est orienté et si sur la perpendiculaire à ce plan on prend comme direction positive la direction correspondante à l'orientation du plan, le nombre positif ou négatif qui mesure alors le moment de AB par rapport au point O n'est autre chose que ce qu'on appelle, dans les Traités élémentaires, *moment du segment* AB par rapport au point O.

Lorsqu'il s'agira de points situés dans un plan orienté, il n'y a aucun inconvénient à employer le mot *moment* pour désigner soit un segment de droite, comme dans la première définition adoptée, soit un nombre positif ou négatif, comme on le fait habituellement. Si l'on sous-entend, comme on le fera dans la suite, que la direction positive, perpendiculaire au plan, sur laquelle est porté le segment, correspond à l'orientation du plan, cela revient à n'employer qu'un même symbole pour désigner un segment et le nombre positif ou négatif qui le représente, d'après les conventions antérieurement adoptées.

Je désignerai dans ce qui suit par le symbole (ABO) le moment du segment AB par rapport au point O; les trois segments (ABO), (BOA), (OAB) sont équipollents; il en est de même des segments (BAO), (AOB), (OBA), qui sont égaux et opposés aux précédents.

Le moment d'un segment AB par rapport à une droite D est la projection orthogonale sur cette droite du moment du segment AB par rapport à l'un quelconque O de ses points; c'est encore, si l'on veut, le moment par rapport au point O de la projection orthogonale A′ B′ du segment AB sur un plan mené par le point O perpendiculairement à la droite D; l'équivalence manifeste de ces deux définitions montre bien que la première est, comme la seconde, indépendante du point O. Si l'on a choisi sur la droite D une direction positive, le moment de AB par rapport à la droite D sera mesuré par un nombre positif ou négatif. Le moment d'un segment par rapport à un point O est la somme géométrique des moments de ce segment par rapport à trois droites rectangulaires passant par ce point.

Étant donnés dans l'espace un système quelconque de segments et un point O, on appelle *moment résultant* du système par rapport au point O la somme géométrique des moments par rapport à ce point des divers segments qui composent le système.

Considérons d'abord un système de segments tels que leurs lignes d'action passent par un même point; je conviendrai d'appeler *résultante* de ces segments un segment équipollent à la somme géométrique des segments donnés et dont la ligne d'action passe par le point commun aux lignes d'action de tous ces segments.

Étant donné un système de segments, tels que leurs lignes d'action passent par un même point, le moment résultant de ce système par rapport à un point quelconque est équipollent au moment, par rapport au même point, de la résultante du système.

Si l'on admet ce théorème, on voit, en projetant orthogonalement les moments sur une droite passant par le point par rapport auquel on prend les moments, que la somme géométrique des moments des segments du système considéré, par rapport à une droite quelconque, est égale au moment, par rapport à la même droite, de la résultante du système.

Inversement, si ce second théorème était établi, le premier en résulterait immédiatement, puisqu'il serait prouvé que les projections sur une droite de direction quelconque des deux segments dont on a à prouver l'équipollence sont deux segments équipollents. La démonstration du premier théorème est donc ramenée à celle du second, qui va résulter facilement de la remarque suivante.

Soit (P) un plan orienté, soient dans ce plan $AA_1$ un segment et O un point; soit, toujours dans le plan, OX une direction telle que l'angle (OA, OX) soit égale à $+\frac{\pi}{2}$; considérons OX comme la direction positive choisie sur la perpendiculaire à OA; la projection $Oa_1$ du segment $AA_1$ sur cette droite sera représentée d'après nos conventions par un nombre positif ou négatif; soit enfin $r$ le nombre positif qui mesure la longueur OA; on aura

$$(AA_1O) = r \times Oa_1,$$

en désignant par $(AA_1O)$, $Oa_1$ les *nombres* positifs ou négatifs qui représentent, d'après nos conventions, les segments que désignent les mêmes symboles.

Ceci posé, considérons dans le plan (P) des segments en nombre quelconque dont les lignes d'action passent par un même point A ; on peut, pour l'évaluation de leurs moments, supposer que tous ces segments aient pour origine le point A ; désignons-les alors par $AA_1$, $AA_2$, ..., $AA_n$ ; soit AS leur résultante ; soient toujours O le point par rapport auquel on prend les moments et OX la direction telle que l'angle (OA, OX) soit égal à $+\frac{\pi}{2}$ ; on aura, en adoptant toujours les mêmes conventions et en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n, s$ les projections sur OX des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, S,

$$\begin{aligned}
(AA_1O) &= r \times Oa_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(AA_nO) &= r \times Oa_n,\\
(ASO) &= r \times Os,\\
Os &= Oa_1 + Oa_2 + \ldots + Oa_n.
\end{aligned}$$

On en conclut

$$(ASO) = (AA_1O) + (AA_2O) + \ldots + (AA_nO).$$

Cette égalité est une égalité entre des nombres ; elle exprime ce fait géométrique que le moment de la résultante par rapport à la perpendiculaire au plan (P) menée par le point O est égale à la somme géométrique des moments par rapport à la même droite des éléments du système. C'est, dans le cas particulier où tous les segments sont dans un même plan, le théorème dont on a besoin.

Si l'on considère maintenant un système quelconque de segments dont les lignes d'action passent par un même point A et une droite quelconque (D), il suffira, pour obtenir le théorème général, d'appliquer le théorème particulier que l'on vient de démontrer au système de segments formés par les projections orthogonales des segments donnés sur un plan (P) perpendiculaire à la droite (D), en prenant les moments par rapport au point O où la droite (D) perce le plan (P).

Soient $AA_1$ un segment, O, O′ deux points quelconques ; la différence géométrique $(AA_1O') - (AA_1O)$ entre les moments du segment $AA_1$ par rapport aux points O′ et O est égale au moment $(Oa_1O')$ par rapport au point O′ d'un segment $O\alpha_1$ équipollent à $AA_1$ et ayant le point O pour origine.

Soit en effet $A\omega$ un segment équipollent à OO′ et ayant pour origine le point A; AO′ étant la résultante des deux segments $A\omega$ et AO, on aura, en donnant aux signes $=$, $+$, $-$ le sens géométrique,

$$(AO'A_1) = (A\omega A_1) + (AOA_1);$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned}(AA_1O') &= -(AO'A_1),\\ (AA_1O) &= -(AOA_1),\\ (AA_1\omega) &= -(A\omega A_1):\end{aligned}$$

donc

$$(AA_1O') - (AA_1O) = (AA_1\omega).$$

Mais, comme on peut passer de la figure formée par les trois points A, $A_1$, $\omega$ à la figure formée par les trois points O, $\alpha_1$, O′ par une translation égale à AO, il est clair que le segment $(AA_1\omega)$ est équipollent au segment $(O\alpha_1 O')$ et le théorème est démontré.

Il résulte de là que, si l'on considère un système quelconque $(\Sigma)$ de segments et deux points O et O′, la différence géométrique entre les moments résultants de ce système par rapport aux points O′ et O sera égale au moment par rapport à O′ d'un segment équipollent à la somme géométrique des éléments de $(\Sigma)$ et dont la ligne d'action passe par le point O. En particulier, si la somme géométrique des éléments de $(\Sigma)$ est nulle, le moment résultant de $(\Sigma)$ par rapport à un point est indépendant de ce point. C'est ce qui arrive, lorsque $(\Sigma)$ se réduit à un *couple*, c'est-à-dire à deux segments dont les lignes d'action sont parallèles, qui ont des longueurs égales et des sens opposés. Les moments résultants d'un couple par rapport à deux points quelconques sont équipollents; ce moment constant, équipollent par exemple au moment de l'un des éléments du couple par rapport à un point situé sur la ligne d'action de l'autre, est ce qu'on appelle l'*axe* du couple.

Deux systèmes de segments $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ sont dits *équivalents* si la somme géométrique des éléments de l'un est équipollente à la somme géométrique des éléments de l'autre, et si, en outre, le moment résultant de l'un par rapport à un point O est équipollent au moment résultant de l'autre par rapport au même point.

Il résulte du théorème précédent que cette définition ne dépend pas du choix du point O.

Deux couples dont les axes sont équipollents constituent deux systèmes équivalents.

Un ensemble de couples est équivalent à un couple dont l'axe serait la somme géométrique des axes des couples donnés.

Enfin un système quelconque est équivalent au système que forment, d'une part, un couple dont l'axe est le moment résultant du système par rapport à un point arbitraire O, de l'autre, un segment équipollent à la somme géométrique des éléments du système et dont la ligne d'action passe par le point O. Si ce point peut être pris de manière que le moment résultant soit nul, le système est équivalent à un segment unique qui est dit la *résultante* du système.

Supposons que l'espace soit rapporté à des axes coordonnés rectangulaires $ox$, $oy$, $oz$, et soient $A_1$, $A_2$ deux points ayant pour coordonnées respectives $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2$, $y_2$, $z_2$ : le moment du segment $A_1A_2$ par rapport à l'origine $o$ sera le segment qui va du point $o$ au point I dont les coordonnées sont

$$y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad z_1 x_2 - z_2 x_1, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

la direction $o$I est en effet perpendiculaire aux deux directions $oA_1$, $oA_2$, le trièdre $oA_1A_2$I a la disposition directe, puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ y_1 & y_2 & z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ z_1 & z_2 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$$

est positif; enfin le nombre qui mesure OI est bien, comme il est aisé de le voir, le double du nombre qui mesure l'aire du triangle $oA_1A_2$. Les nombres $y_1 z_2 - y_2 z_1$, $z_1 x_2 - z_2 x_1$, $x_1 y_2 - x_2 y_1$ mesureront les moments du segment $A_1A_2$ par rapport aux droites $ox$, $oy$, $oz$.

Considérons un corps solide (S) qui tourne autour d'une droite (D) et un demi-plan limité à la droite (D), invariablement lié au corps (S) ; soit $\Delta\alpha$ la valeur absolue de l'angle infiniment petit décrit par le demi-plan, à partir de l'époque $t$ pendant l'intervalle de temps infiniment petit $\Delta t$; la vitesse angulaire du corps solide à l'époque $t$ est un segment dont la longueur est mesurée par le nombre positif qui est la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, dont la ligne d'action est la droite (D), dont le sens est tel, que l'observateur couché sur la droite (D), traversé des pieds à la tête par la direction du segment, voie la rotation s'effectuer dans le sens direct. Si sur la droite (D) on a choisi une direction positive, le segment qui représente la vitesse angulaire sera mesuré par un nombre positif ou négatif; on donne aussi à ce nombre le nom de *vitesse angulaire*.

Quand un corps solide tourne autour d'une droite (D), la vitesse d'un quelconque de ses points, à l'époque $t$, est le moment par rapport à ce point de la vitesse angulaire à l'époque $t$.

Cette remarque, les théorèmes précédents sur les moments et la proposition relative à la composition des vitesses dans le mouvement relatif permettent de constituer toute la théorie de la composition des rotations.

Un segment peut être variable; il peut être regardé comme une fonction d'une variable numérique, si, pour chaque valeur de cette variable, il est déterminé, au moins en grandeur et en direction. Si l'on désigne par $t$ la variable numérique, on peut représenter par $f(t)$ un segment qui dépend de cette variable; ce symbole désigne, bien entendu, non une fonction numérique, mais une fonction géométrique.

Si à chaque longueur donnée $\delta$ correspond un nombre positif $\varepsilon$, tel que la différence géométrique $f(t_0+h)-f(t_0)$ ait une longueur moindre que $\delta$, pourvu que le nombre $h$ soit en valeur absolue moindre que $\varepsilon$, la fonction géométrique $f(t)$ sera dite continue pour $t=t_0$.

D'après les conventions adoptées au début, le symbole

$$\frac{1}{h}[f(t+h)-f(t)],$$

où $h$ est un nombre et où le signe — a le sens géométrique, désigne un certain segment; s'il existe un segment $f'(t)$, tel que, à chaque longueur donnée $\delta$ corresponde un nombre positif $\varepsilon$, tel que la longueur de la différence géométrique

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)$$

soit moindre que $\delta$, pourvu que le nombre $h$ soit, en valeur absolue, moindre que $\varepsilon$, on dit que le segment $f(t)$ admet une dérivée géométrique. Cette dérivée géométrique est le segment $f'(t)$. De la notion de dérivée géométrique première on passe à la notion de dérivées géométriques seconde, troisième, etc....

Dans le cas où la ligne d'action du segment $f(t)$ reste parallèle à une droite fixe, sur laquelle on a choisi une direction positive, on peut donner, d'après les conventions expliquées au début, une signification numérique au symbole $f(t)$ ; la dérivée numérique de la fonction numérique $f(t)$ représente alors, d'après les mêmes conventions, la dérivée géométrique du segment $f(t)$.

Si A, B, C, ... désignent des segments géométriques, fonctions d'une variable $t$, admettant des dérivées géométriques A′, B′, C′, ..., et si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... désignent des nombres constants, la somme géométrique

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots$$

des segments $\alpha A$, $\beta B$, $\gamma C$, ... admettra pour dérivée géométrique la somme géométrique

$$\alpha A' + \beta B' + \gamma C' + \ldots$$

des segments $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$, ..., dérivées géométriques des segments $\alpha A$, $\beta B$, $\gamma C$, ... ; la démonstration est identique à la démonstration du théorème correspondant d'Analyse. On peut même supposer que les nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., au lieu d'être des constantes, sont des fonction numériques de la variable $t$; en désignant alors par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ leurs dérivées numériques, la dérivée géométrique du segment $\alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots$ serait le segment

$$\alpha' A + \beta' B + \gamma' C + \ldots + \alpha A' + \beta B' + \gamma C' + \ldots,$$

le signe + se rapportant toujours à l'addition géométrique.

Il résulte de ce théorème et de ce que, si l'on a pris trois axes coordonnés $ox$, $oy$, $oz$, tout segment peut être regardé comme la somme géométrique de ses trois projections sur ces axes, que si les projections sur ces trois axes d'un segment variable ont des dérivées (géométriques ou numériques), le segment a une dérivée égale à la somme géométrique des dérivées de ces projections; inversement ces dérivées sont les projections sur les axes de la dérivée géométrique du segment.

On voit de même que, si l'on projette le segment sur le plan des $xy$

par exemple, au moyen de parallèles à l'axe des $z$, la dérivée géométrique de la projection est la projection de la dérivée géométrique du segment considéré.

La vitesse d'un point mobile est la dérivée géométrique, par rapport au temps, du segment qui va d'un point fixe quelconque au point mobile, l'accélération est la dérivée géométrique de la vitesse.

Supposons que le segment $f(t)$ admette pour dérivée géométrique le segment $f'(t)$ et que, lorsque $t$ varie de $a$ à $b$, la longueur de ce dernier segment reste inférieure ou égale à une longueur fixe L, la longueur du segment

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

sera au plus égale à L ; dans cette formule le signe — au numérateur a le sens géométrique ; le numérateur est un segment qui doit être multiplié, au sens expliqué plus haut, par le nombre $\frac{1}{b-a}$. Si l'on suppose que le segment $f(t)$ ait une origine fixe et que l'on regarde la variable $t$ comme représentant le temps, cela revient à dire que, pendant un intervalle fini, la vitesse moyenne d'un mobile ne peut pas être constamment supérieure à la vitesse de ce mobile; sans insister davantage sur cette proposition, dont il serait bien facile de rendre la démonstration rigoureuse en supposant que la fonction géométrique $f'(t)$ soit continue, je remarquerai qu'elle peut jouer, dans bien des cas, le même rôle que, dans l'Analyse, la formule des accroissements finis.

On trouvera, de même, une interprétation géométrique de la formule de Taylor et du terme complémentaire (¹) ou de diverses formules analogues.

Je me contenterai de renvoyer le lecteur au Mémoire de M. Darboux *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable* (*Journal de Liouville*, 3e série, t. II, p. 291). Sans doute les problèmes qu'a traités M. Darboux paraissent très différents de ceux que je signale, mais la méthode qu'il a suivie s'applique à ces derniers, avec des modifications insignifiantes.

(¹) La signification cinématique de la série de Taylor a été signalée par Möbius, *Journal de Crelle*, t. 36.

## II.

Considérons un plan fixe $(p)$ et un plan mobile (P), qui se meut sur le plan $(p)$ en coïncidant constamment avec lui ; supposons le plan $(p)$ rapporté à un système d'axes coordonnés rectangulaires $ox$, $oy$. Soient, à l'époque $t$, $x, y$ les coordonnées d'un point quelconque M invariablement lié au plan P ; $u$, $v$ les coordonnées du centre instantané de rotation I ; soit enfin $\omega$ la vitesse angulaire de rotation du plan (P). En désignant par AB une direction quelconque invariablement liée au plan (P) et par $\alpha$ l'angle $(ox, \mathrm{AB})$, on a

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt};$$

$\omega$ est un nombre positif ou négatif. Cette définition coïncide avec la définition donnée antérieurement de la vitesse angulaire comme un segment porté sur la direction perpendiculaire au plan (P) qui correspond à l'orientation de ce plan.

Ceci posé, les projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sur les axes $ox$, $oy$ de la vitesse du point M sont données par les formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega(y - v) = \omega r \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= \quad \omega(x - u) = \omega r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

en désignant par $r = +\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$ le nombre positif qui mesure la distance IM et par $\varphi$ l'angle $(ox, \mathrm{IM})$, défini par les égalités

$$(2) \qquad x - u = r\cos\varphi, \qquad y - v = r\sin\varphi.$$

On déduit des équations (1), en prenant les dérivées par rapport à $t$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega'(y - v) + \omega v' - \omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \quad \omega'(x - u) - \omega u' + \omega\frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

où $\omega'$, $u'$, $v'$ sont les dérivées de $\omega$, $u$, $v$ ; en posant

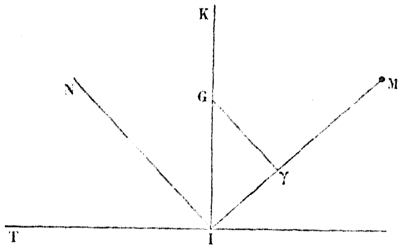
$$(3) \qquad u' = \mathrm{V}\cos\theta, \qquad v' = \mathrm{V}\sin\theta,$$

et en tenant compte des équations (1), les valeurs des projections sur les axes $ox$, $oy$ de l'accélération du point M deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 r \cos(\varphi+\pi) + \omega V \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) + \omega' r \cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 r \sin(\varphi+\pi) + \omega V \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) + \omega' r \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ces formules s'interprètent immédiatement (*fig.* 1) ; la direction définie par l'angle $\varphi+\pi$ est la direction MI ; l'angle $\theta$ définit, sur la tangente

Fig. 1.




commune en I aux deux courbes (C′), (C), lieux du centre instantané dans les plans ($p$) et (P), une direction déterminée IT, telle que l'angle ($ox$, IT) soit égal à $\theta$ ; V est un nombre positif ou négatif qui mesure un segment porté sur cette direction. Ce segment n'est autre que la vitesse avec laquelle se déplace, dans le plan $p$, le centre instantané de rotation ; l'angle $\theta - \frac{\pi}{2}$ définit sur la perpendiculaire à IT une direction IK, telle que l'angle (IK, IT) soit égal à $+\frac{\pi}{2}$; enfin l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$ définit, sur la perpendiculaire à IM, une direction IN telle que l'angle (IM, IN) soit égal à $+\frac{\pi}{2}$ : ceci posé, l'accélération du point M est manifestement la somme géométrique de trois segments ;

1° Le segment $\omega^2$ MI ;

2° Un segment mesuré par le nombre $\omega$V porté sur la direction IK ;

3° Un segment mesuré par le nombre $\omega' r$ porté sur la direction IN.

Cette proposition s'établit facilement par des considérations géométriques qui, si l'on y regarde d'un peu près, sont absolument équivalentes aux calculs d'où on l'a déduite.

Déterminer l'accélération du point M, c'est trouver la dérivée géométrique de sa vitesse.

Soient

$m$, $m'$ deux positions, dans le plan $(p)$, aux époques $t$ et $t+\Delta t$, du point M du plan (P);

$v_m$, $v_{m'}$ les vitesses de ce point;

$\omega$ et $\omega+\Delta\omega$ les vitesses angulaires du plan (P);

I et I' les centres instantanés de rotation aux mêmes époques.

Il s'agit d'avoir la limite, pour $\Delta t = 0$, du segment

$$\frac{v_{m'} - v_m}{\Delta t};$$

soit $v'_{m'}$ la vitesse qu'aurait, au temps $t$, le point du plan (P) qui, à ce moment, coïncide avec le point $m'$ du plan $(p)$ : on a, en donnant aux signes le sens géométrique, comme dans la formule précédente et dans le reste de la démonstration,

$$\frac{v_{m'} - v_m}{\Delta t} = \frac{v_{m'} - v'_{m'}}{\Delta t} + \frac{v'_{m'} - v_m}{\Delta t}.$$

Considérons la deuxième partie : on obtient les segments $v_m$ et $v'_{m'}$ en faisant tourner de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ les segments $\omega \mathrm{I}m$, $\omega \mathrm{I}m'$; leur différence géométrique $v'_{m'} - v_m$ s'obtiendra donc en faisant tourner du même angle le segment

$$\omega(\mathrm{I}m' - \mathrm{I}m) = \omega.\, mm'.$$

D'ailleurs le segment $\frac{mm'}{\Delta t}$ n'est autre que la vitesse moyenne, pendant l'intervalle de temps $\Delta t$, du point M; la limite de ce segment s'obtient en faisant tourner de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ le segment $\omega\,\mathrm{I}m$, par conséquent la limite du segment $\frac{v'_{m'} - v_m}{\Delta t}$ s'obtiendra en faisant tourner de l'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ le segment $\omega^2\,\mathrm{I}m$ : cette limite n'est autre que le segment $\omega^2\, m\mathrm{I}$. Considérons maintenant la première partie

$$\frac{v_{m'} - v'_{m'}}{\Delta t};$$

on obtient $v_{m'}$ en faisant tourner de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ le segment $(\omega+\Delta\omega)\mathrm{I}'m'$, en sorte que le numérateur de l'expression dont on cherche la limite s'obtient en faisant tourner de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ le segment

$$(\omega+\Delta\omega)\mathrm{I}'m' - \omega\,\mathrm{I}m' = \omega(\mathrm{I}'m' - \mathrm{I}m') + \Delta\omega\,\mathrm{I}'m' = \omega\,\mathrm{I}'\mathrm{I} + \Delta\omega\,\mathrm{I}'m';$$

on aura donc à faire tourner de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ la limite du segment

$$\frac{\omega\,\mathrm{I}'\mathrm{I}}{\Delta t} + \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\mathrm{I}'m'.$$

Or $\frac{\mathrm{II}'}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne du centre instantané de rotation pendant l'intervalle $\Delta t$ ; la limite de ce segment n'est autre chose que la vitesse IR du centre instantané ; la ligne d'action de ce dernier segment est la tangente commune en I aux deux courbes (C) et (C′), la limite du segment $\omega\frac{\mathrm{I}'\mathrm{I}}{\Delta t} = -\omega\frac{\mathrm{II}'}{\Delta t}$ sera

$$-\omega\,\mathrm{IR} = \omega\,\mathrm{RI}.$$

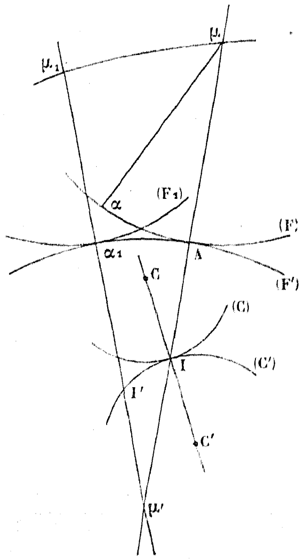
On aura à faire tourner ce dernier segment de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou, si l'on veut, le segment $\omega$IR de l'angle $-\frac{\pi}{2}$ ; enfin le segment $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\mathrm{I}'m'$ aura manifestement pour limite le segment $\omega'\mathrm{I}m$; on aura à le faire tourner de l'angle $+\frac{\pi}{2}$; on a ainsi retrouvé les trois parties dont l'accélération du point M est la somme géométrique.

On observera que la dernière partie n'intervient pas dans l'expression de l'accélération normale du point M. Quant aux deux premières parties, il est naturel de les composer de la façon suivante : soit (*fig.* 1), sur la normale commune aux deux courbes (C), (C′) un segment IG qui, en prenant IK pour direction positive, soit mesuré par le nombre $\frac{\mathrm{V}}{\omega}$ : le point G est dit souvent *pôle des inflexions*. Les deux premières parties dont se compose l'accélération du point M sont les segments $\omega^2$MI, $\omega^2$IG dont la somme géométrique est $\omega^2$MG, en sorte que, si l'on désigne par $\gamma$ la projection orthogonale du point G sur OM, l'accélération normale du point M sera le segment $\omega^2 M\gamma$ ; de la construction de l'accélération normale, il sera bien facile de déduire la construction du centre de courbure de la trajectoire du point M ; mais, avant de m'occuper de ce sujet, j'ai besoin de faire une courte digression.

Supposons que, à l'époque $t$, on fasse correspondre à chaque point M du plan (P) le centre de courbure M' de la trajectoire de ce point. Si l'on considère deux points infiniment voisins M, $M_1$, les points correspondants M', $M'_1$ seront infiniment voisins, puisque, en vertu de ce qui précède, la différence géométrique entre les accélérations normales des points M, $M_1$ est infiniment petite.

Il résulte de là que, si l'on considère une courbe (F), invariable-

Fig. 2.




ment liée au plan (P), et la courbe (F') enveloppe des positions que la courbe (F) vient occuper dans le plan ($p$), en sorte que, d'après une proposition bien connue, la courbe (F) touche à l'époque $t$, la courbe (F') au pied A de la normale IA abaissée du centre instantané de rotation I sur la courbe (F), le centre de courbure M' de la courbe (F'), relatif au point A, correspondra au sens que je viens de dire, au centre de courbure M de la courbe (F) relatif au même point A. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un coup d'œil sur la *fig.* 2.

(F) et ($F_1$) sont deux positions de la courbe (F) aux époques $t$ et $t+\Delta t$; I et I′ les centres instantanés de rotation aux mêmes époques; IA, I′$\alpha_1$ sont les normales abaissées respectivement des points I, I′ sur les courbes (F), ($F_1$), qui touchent leur enveloppe (F′) en A et $\alpha_1$; $\alpha$ est le point de (F) qui, à l'époque $t+\Delta t$, vient en $\alpha_1$; la normale à (F) en $\alpha$ coupe la normale IA en A au point $\mu$, infiniment voisin du centre de courbure M de la courbe (F) relatif au point A, la normale I′$\alpha_1$ en $\alpha_1$ à la courbe ($F_1$) coupe la droite IA en un point $\mu'$ infiniment voisin du centre de courbure M′ de l'enveloppe (F′), puisque les deux droites IA, I′$\alpha_1$ sont deux normales infiniment voisines à cette enveloppe ; d'ailleurs à l'époque $t+\Delta t$ le segment $\alpha\mu$ vient occuper la position $\alpha_1\mu_1$ sur la normale en $\alpha_1$ à la courbe ($F_1$), en sorte que la droite $\mu_1\alpha_1$I′ est la normale en $\mu_1$ à la trajectoire $\mu\mu_1$ du point $\mu$; par suite, le point $\mu'$ intersection de deux normales infiniment voisines à cette trajectoire est aussi infiniment voisin du centre de courbure de la trajectoire du point M ; par suite enfin, le point M′ correspond bien au point M.

En particulier, le point C centre de courbure de la courbe (C), relatif au point I où cette courbe touche son enveloppe (C′), a pour correspondant le point C′ centre de courbure de la courbe (C′) relatif au même point I.

Ceci posé, conservons dans la *fig.* 3 les mêmes notations que dans la *fig.* 1, en sorte que, M étant un point quelconque du plan (P), I le centre de courbure à l'époque $t$, G le pôle des inflexions, $\gamma$ le pied de la perpendiculaire abaissée du point G sur IM, $\omega^2 M\gamma$ l'accélération normale du point M; soit M′ le centre de courbure de la trajectoire du point M; supposons enfin que sur la droite IM on ait pris une direction positive quelconque. On aura, en écrivant que le produit de l'accélération normale par le rayon de courbure est égal au carré de la vitesse du point M,

$$\omega^2 M\gamma \times MM' = \omega^2 MI^2;$$

dans cette égalité MM′, M$\gamma$, MI représentent, avec leurs signes, les *nombres* qui mesurent les segments de mêmes noms ; cette égalité équivaut à la construction suivante du point M′. Soit S le point où la droite MG rencontre la perpendiculaire IN à IM; par le point S menez une parallèle à IG, le point où elle rencontrera la droite IM sera le point M'; la figure montre en effet que l'on a

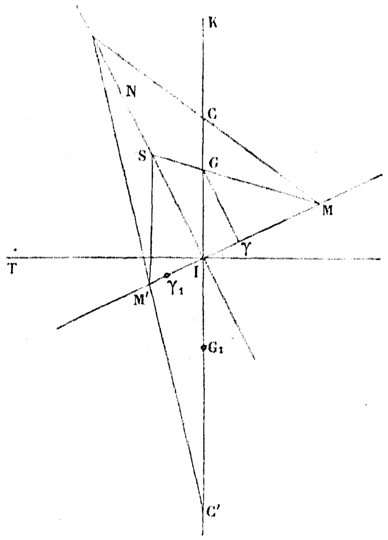
$$\frac{M\gamma}{MI} = \frac{MG}{MS} = \frac{MI}{MM'};$$

d'où

$$M\gamma \times MM' = MI^2. \tag{4}$$

Cette même égalité montre comment le point M' varie quand le point M

Fig. 3.




se déplace sur la droite $I\gamma$; je ne m'y arrêterai que pour remarquer que le point M' est à l'infini lorsque le point M est en $\gamma$; le point $\gamma$ est donc, en général, un point d'inflexion de sa trajectoire; d'où le nom de cercle des inflexions donné au cercle, lieu du point $\gamma$, décrit sur IG comme diamètre.

Si l'on prend le point I pour origine des segments, l'équation (4) prendra la forme

$$(I\gamma - IM)(IM' - IM) = IM^2,$$

ou

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IM'} = \frac{1}{I\gamma}, \tag{5}$$

qui met en évidence le caractère homographique de la correspondance entre les points M′ et M sur la droite IM; les deux points doubles sont confondus avec le point I; au point $\gamma$ correspond le point à l'infini, au point à l'infini correspond le point $\gamma_1$, symétrique du point $\gamma$ par rapport au point I. Si l'on considère une droite quelconque perpendiculaire à IM comme faisant partie du plan (P), elle touchera son enveloppe au point où elle rencontre la droite I$\gamma$: comme son centre de courbure est à l'infini sur cette droite, le centre de courbure de l'enveloppe de cette droite sera le point $\gamma_1$ correspondant à l'infini; en particulier, si la droite passe par le point $\gamma_1$, ce point sera en général un point de rebroussement de l'enveloppe de la droite, d'où le nom de *cercle des rebroussements* donné au cercle, lieu du point $\gamma_1$, symétrique du cercle des inflexions par rapport au point I et le nom de *pôle des rebroussements* donné au point $G_1$ symétrique du point G par rapport au point I.

Une équation analogue à l'équation (5) relie deux points correspondants quelconques, nécessairement situés sur une droite passant par le point I; on peut, en particulier, appliquer l'équation (5) sur la normale commune IK aux deux courbes (C) et (C′); le point G remplace alors le point $\gamma$, c'est le point auquel correspond le point à l'infini sur la droite. A ce point à l'infini correspond le point $G_1$; puis donc que le point C′, centre de courbure de (C′), correspond au point C, centre de courbure de (C), on a

$$\frac{1}{IC} - \frac{1}{IC'} = \frac{1}{IG} = \frac{\omega}{V}; \tag{6}$$

enfin, si l'on désigne par $\varphi$ l'angle de la direction positive choisie sur IM et de la direction positive sur la normale commune; on aura, à cause de la relation

$$I\gamma = IG\cos\varphi,$$

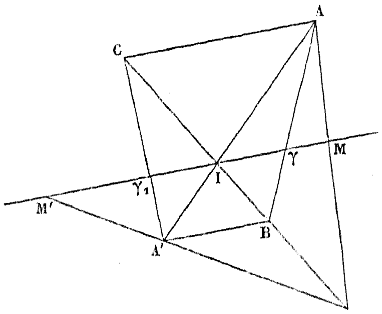
$$\frac{1}{IC} - \frac{1}{IC'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{IM} - \frac{1}{IM'}\right); \tag{7}$$

Ce sont les relations (6) et (7) que j'avais principalement en vue; d'après la façon dont elles ont été établies, elles ne prêtent à aucune équivoque.

A la formule (7) équivaut la construction géométrique connue sous le nom de *Savary*, que je vais développer.

Soient A, A′ deux points correspondants quelconques (*fig.* 4), que je regarderai comme fixes; si les points correspondants M, M′ se déplacent sur la droite $I\gamma$, les deux rayons AM, A′M′ engendreront deux faisceaux homographiques. Puisque deux rayons homologues, à savoir AI et A′I, sont situés sur une même droite, on voit que le lieu des points d'intersection des deux rayons homologues AM, A′M′ est une

Fig. 4.




droite; en particulier, le rayon homologue du rayon $A\gamma B$ sera le rayon A′B parallèle à $I\gamma$, et le rayon homologue du rayon AC parallèle à $I\gamma$ sera le rayon $A'\gamma_1 C$; la droite, lieu des intersections de deux rayons homologues, sera la droite BC, qui, en vertu d'un théorème de Géométrie élémentaire, passe par le milieu I du segment $\gamma\gamma_1$.

Enfin il convient de remarquer qu'on retrouverait la même droite BC si l'on avait remplacé les deux points A, A′ par deux autres points correspondants $A_1$, $A'_1$ situés sur la même droite AIA′; il suffit, pour s'en convaincre, de regarder les points M et M′ comme fixes, les points A, A′ comme variables sur la droite AIA′, les rayons homologues MA, M′A′ devront se couper sur une droite passant par le point I, etc. Une fois qu'on a construit la droite BC, il est aisé d'obtenir le point $M'_1$ correspondant à un autre point $M_1$ de la droite IM; ce point $M'_1$ est le point où la droite IM est rencontrée par la droite qui joint le point A′ au point où la droite $AM_1$ rencontre la droite BC.

La première construction qu'on a indiquée pour déduire le point M′ du point M (*fig.* 3) rentre dans celle que je viens d'indiquer; elle consiste au fond à employer, au lieu des points A et A′, le point G et le point à l'infini sur la droite IG; elle met en évidence ce fait que la droite qui remplace alors la droite BC est la perpendiculaire menée par le point I à IM. Cette remarque faite, on peut remplacer le point G et le point à l'infini par deux points correspondants quelconques sur la normale commune aux deux courbes (C) et (C′), par exemple par les points C, C′ et appliquer la règle suivante : le point M′ est le point où la droite IM est rencontrée par la droite qui joint le point C′ au point où la droite CM rencontre la perpendiculaire en I à la droite IM.

D'après cela, lorsqu'on se donne deux couples de points correspondants M, M′ et A, A′, on peut construire la normale commune aux deux courbes (C) et (C′), sur cette normale deux points correspondants $C_1$, $C'_1$ et, par conséquent, ensuite le point qui correspond à un point donné quelconque.

Soit, en effet, $C_1$ le point cherché où la droite AM rencontre la normale commune; soient $a$ et $m$ les points où la droite AM rencontre les perpendiculaires élevées en I aux droites IA, IM, les droites A′$a$, M′$m$ se couperont aux points $C'_1$ : cette construction a été indiquée par M. Gilbert.

Enfin il convient d'examiner le cas où le point M se trouve sur la tangente commune en I aux deux courbes (C) et (C′). On voit, en se reportant à l'expression ou à la construction de l'accélération normale, que le centre de courbure de la trajectoire est en I; on peut dire, si l'on veut, que la construction de Savary s'applique encore.

La transformation qui fait correspondre le point M′ au point M n'est pas homographique; elle appartient à cette classe de transformations auxquelles le nom de M. Cremona est attaché. Si l'on prend pour axe des $x$ la direction à IT (*fig.* 1) et pour axe des $y$ la direction telle que l'angle $(x, y)$ soit égal à $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la direction opposée à IK, on aura, entre les coordonnées $x$, $y$, $x'$, $y'$ de deux points correspondants, les relations

$$x' = \frac{axy}{x^2+y^2+ay}, \qquad y' = \frac{ay^2}{x^2+y^2+ay},$$

$$x = \frac{-ax'y'}{x'^2+y'^2-ay'}, \qquad y = \frac{-ay'^2}{x'^2+y'^2-ay'},$$

en posant

$$\frac{V}{\omega} = a.$$

Les projections de l'accélération totale des points $x$, $y$ sur ces axes sont respectivement $-\omega^2 x - \omega' y$, $-\omega^2 y + \omega' x - \omega V$; celles de l'accélération normale sont $-\omega^2 x$, $-\omega^2\left(y + \frac{V}{\omega}\right)$; ces axes conviennent dans les diverses questions où l'on se propose de déterminer, à l'époque $t$, les points du plan qui jouissent d'une propriété donnée relativement à l'accélération ou à la courbure de leur trajectoire.

J'ajouterai enfin que les formules qui donnent l'accélération d'un point quelconque du plan (P) ou le théorème qui donne les trois composantes de cette accélération montrent que la différence géométrique entre les accélérations de deux points M, $M_1$ est égale à l'accélération qu'aurait le point M si le plan (P) tournait autour du point $M_1$ avec la vitesse angulaire $\omega$. On obtient un résultat particulièrement simple si l'on prend pour le point $M_1$ le point qui a une accélération nulle; ce point, situé sur le cercle des inflexions, a pour coordonnées dans le dernier système d'axes

$$x = \frac{V\omega\omega'}{\omega^4 + \omega'^2}, \qquad y = \frac{-V\omega^3}{\omega^4 + \omega'^2}.$$

Considérons maintenant un corps solide qui se meut autour d'un point fixe O. Soient $Ox$, $Oy$, $Oz$ trois axes coordonnés fixes rectangulaires dont l'origine coïncide avec le point O; soit à l'époque $t$ une direction OJ prise sur l'axe instantané de rotation, direction définie par les trois coordonnées $a$, $b$, $c$ du point J, liées entre elles par la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

en sorte que OJ soit égal à l'unité de longueur. La vitesse angulaire est un segment dont la ligne d'action est la même que celle du segment OJ. Soit $\omega$ le nombre qui mesure ce segment quand on prend la direction OJ pour la direction positive; soit, enfin, M un point invariablement lié au corps solide, dont les coordonnées à l'époque $t$ soient $x$, $y$, $z$. On aura, pour les projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse du point M sur les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \omega(bz - cy), \qquad \frac{dy}{dt} = \omega(cx - az), \qquad \frac{dz}{dt} = \omega(ay - bx);$$

en prenant les dérivées par rapport à $t$, remplaçant ensuite dans les seconds membres $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par les valeurs (1), désignant enfin par $\omega'$, $a'$, $b'$, $c'$ les dérivées de $\omega$, $a$, $b$, $c$, on obtient, pour les projections sur les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ de l'accélération du point M,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega^2[a(ax + by + cz) - x] + \omega(b'z - c'y) + \omega'(bz - cy), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \omega^2[b(ax + by + cz) - y] + \omega(c'x - a'z) + \omega'(cx - az), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \omega^2[c(xx + by + cz) - z] + \omega(a'y - b'x) + \omega'(ay - bx). \end{aligned} \right.$$

Ces formules s'interprètent immédiatement (*fig.* 6); $ax + by + cz$ est le segment OI, projection orthogonale sur OJ du segment OM; par conséquent $a(ax + by + cz)$ est la projection sur $Ox$ du segment OI, et $a(ax + by + cz) - x$ est la projection sur $Ox$ de la différence géométrique

$$\mathrm{OI} - \mathrm{OM} = \mathrm{MI};$$

$b'z - c'y$ est la projection sur le même axe du moment par rapport au point M du segment qui va du point O au point dont les coordonnées sont $a'$, $b'$, $c'$; enfin $\omega'(bz - cy)$ est la projection sur le même axe du moment par rapport au point M d'un segment égal à $\omega'$ porté sur la direction OJ.

En résumé, l'accélération du point M est la somme géométrique de trois segments :

1° Le segment $\omega^2\,\mathrm{MI}$;

2° Le segment $\omega^2(\mathrm{OAM})$, OA étant un segment égal à

$$\frac{\mathrm{V}}{\omega} = \frac{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}{\omega}$$

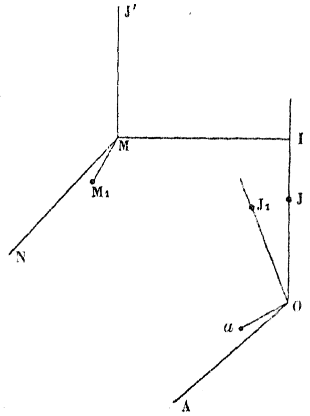
porté sur la direction définie par les trois quantités $a'$, $b'$, $c'$, direction perpendiculaire à OJ; (OAM), conformément aux notations antérieurement expliquées, est le moment par rapport au point M du segment OA;

3° Le segment $\omega'$(OJM).

Ce résultat s'établit facilement par des considérations géométriques.

Soient (*fig.* 5) OJ, $OJ_1$ les directions de l'axe instantané de rotation aux époques $t$, $t+\Delta t$; soient $\omega$, $\omega+\Delta\omega$ les vitesses angulaires correspondantes. Soient M, $M_1$ les positions du point M aux époques

Fig. 5.




$t$, $t+\Delta t$; $v_m$, $v_{m_1}$ les vitesses de ce point aux mêmes époques; soit enfin $v'_{m_1}$ la vitesse, à l'époque $t$, du point du corps solide, qui, à ce moment, coïncide avec le point $M_1$; on aura, en donnant aux signes le sens géométrique,

$$\frac{v_{m_1}-v_m}{\Delta t}=\frac{v_{m_1}-v'_{m_1}}{\Delta t}+\frac{v'_{m_1}-v_m}{\Delta t}.$$

Considérons le second terme du second membre: on a

$$v_m=\omega(\mathrm{OJM}),\qquad v'_{m_1}=\omega(\mathrm{OJM_1});$$

la différence géométrique (OJM) — ($OJM_1$) est équipollente au moment par rapport au point $M_1$ d'un segment MJ' équipollent à OJ; on a ainsi à chercher la limite, pour $\Delta t=0$, de l'expression

$$\frac{\omega(\mathrm{MJ'M_1})}{\Delta t}=-\omega\frac{(\mathrm{MM_1J'})}{\Delta t}.$$

D'ailleurs il est clair que $\frac{(MM_1J')}{\Delta t}$ est équipollent au moment par rapport à J' du segment $\frac{MM_1}{\Delta t}$, segment qui représente la vitesse moyenne du point M pendant l'intervalle de temps $\Delta t$, et dont la limite est le segment $\omega$MN, en supposant MN = (OJM); la limite cherchée est donc $-\omega^2(\mathrm{MNJ'}) = \omega^2(\mathrm{MJ'N})$. Puisque OJ est égal à un, on obtient le segment (OJM) en faisant tourner le segment IM d'un angle droit, dans le sens direct, autour de la direction OJ ou, ce qui revient au même, en faisant tourner le segment MI d'un angle droit, dans le sens indirect, autour de la direction MJ'; le point I, après ce dernier mouvement, vient donc en N; mais, puisque MJ' est égal à un, on obtient le moment (MJ'N) en faisant tourner le segment MN perpendiculaire à MJ', d'un angle droit, dans le sens direct autour de la direction MJ', ce qui ramène le point N en I; finalement la limite cherchée est le segment $\omega^2$MI.

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{v_{m_1} - v'_{m_1}}{\Delta t};$$

elle est égale à

$$\frac{(\omega + \Delta\omega)(\mathrm{OJ_1M_1}) - \omega(\mathrm{OJM_1})}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t}[(\mathrm{OJ_1M_1}) - (\mathrm{OJM_1})] + \frac{\Delta\omega}{\Delta t}(\mathrm{OJ_1M_1}).$$

Si O$a$ est un segment équipollent à $\mathrm{JJ_1}$, on aura

$$(\mathrm{OJ_1M_1}) - (\mathrm{OJM_1}) = (\mathrm{O}a\mathrm{M_1});$$

d'ailleurs la limite du segment $\frac{\mathrm{O}a}{\Delta t}$ n'est autre que le segment $\omega$OA, en conservant à OA la même signification que dans la démonstration analytique; puis donc enfin que la limite du point $\mathrm{M_1}$ est le point M, on voit que le segment

$$\frac{\omega}{\Delta t}[(\mathrm{OJ_1M_1}) - (\mathrm{OJM_1})]$$

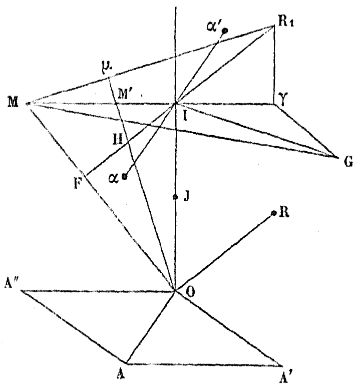
a pour limite le segment $\omega^2$(OAM); enfin le segment $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}(\mathrm{OJ_1M_1})$ a manifestement pour limite $\omega'$(OJM).

On retrouve donc bien les trois parties de l'accélération.

On a ici à faire les mêmes observations que pour le mouvement d'un plan sur un plan ; soit des équations (2), soit de leur interprétation géométrique, on déduit que la différence géométrique entre les accélérations de deux points M, L du corps solide est équipollente à l'accélération qu'aurait le point M si le corps solide tournait autour du point L au lieu de tourner autour du point O, les éléments du mouvement étant d'ailleurs les mêmes. Toutefois, dans le cas actuel, si V et ω' ne sont pas nuls, le point O est le seul à avoir une accélération nulle.

Dans l'accélération normale du point M (*fig.* 6), les deux premières composantes de l'accélération interviennent seules : si le point M est

Fig. 6.




situé dans le plan AOJ la première intervient seule, en sorte que l'accélération normale du point M s'obtient en projetant le segment $\omega^2$MI sur le plan normal à la trajectoire du point M ; cette accélération normale est donc le segment $\omega^2$MI lui-même : on conclut de là immédiatement que le point I est le centre de courbure de la trajectoire du point M.

Supposons maintenant que le point M soit quelconque : le segment OA, perpendiculaire à OJ, peut être regardé comme la résultante de deux segments OA', OA'', l'un perpendiculaire au plan MOI, l'autre situé dans ce plan ; on a alors

$$(\mathrm{OAM}) = (\mathrm{OA'M}) + (\mathrm{OA''M}),$$

et le second segment (OA''M) n'intervient pas dans l'accélération normale, qui est la somme géométrique des deux segments $\omega^2$ MI et $\omega^2$OR, en supposant OR équipollent à (OA'M); le segment OR est situé dans le plan MOI normal à la trajectoire du point M et est perpendiculaire à OM. Soit $IR_1$ un segment équipollent à OR : l'accélération normale du point M sera

$$\omega^2 MI + \omega^2 IR_1 = \omega^2 MR_1;$$

en écrivant que le produit du nombre qui mesure l'accélération normale par le nombre qui mesure le rayon de courbure est égal au carré du nombre qui mesure la vitesse, on aura, après avoir supprimé le facteur $\omega^2$,

$$M\mu \times MR_1 = MI^2.$$

Dans cette égalité $\mu$ désigne le centre de courbure de la trajectoire du point M; $M\mu$, $MR_1$ sont les nombres qui mesurent les segments de même nom, portés sur une même droite $M\mu R_1$, sur laquelle d'ailleurs la direction positive est arbitraire; MI est aussi le nombre qui mesure la longueur du segment de même nom. Il résulte de cette égalité que la droite $O\mu$ est perpendiculaire sur $MR_1$; si l'on désigne en effet par F, H les points où la droite $IR_1$ rencontre les droites OM, $O\mu$, on aura, puisque IF est la hauteur du triangle rectangle MIO,

$$MI^2 = MF \times MO$$

et, par conséquent,

$$M\mu \times MR_1 = MF \times MO.$$

Les quatre points O, F, $\mu$, $R_1$ sont donc sur un cercle et, puisque l'angle $OFR_1$ est droit, il en est de même de l'angle $O\mu R_1$; $O\mu$ est donc perpendiculaire au plan osculateur, qui n'est autre que le plan qui passe par les lignes d'action de l'accélération normale et de la vitesse, c'est-à-dire le plan mené suivant la droite $MR_1$ perpendiculairement au plan MOJ; $O\mu$ est donc l'axe du cercle osculateur de la trajectoire du point M. C'est aussi l'axe du cercle osculateur de la trajectoire d'un point quelconque invariablement lié au corps solide et situé, au temps $t$, sur la droite OM : cela résulte de la construction précédente; il est d'ailleurs évident *a priori* qu'il en doit être ainsi.

Au lieu de construire ainsi le point $\mu$, on peut procéder de la manière suivante : substituons au segment OA le système équivalent de segments obtenus en lui adjoignant les deux segments égaux et opposés

$I\alpha$, $I\alpha'$, dont le premier est équipollent à OA, en sorte que les deux segments OA, $I\alpha'$ forment un couple. Soit IG l'axe de ce couple; le moment (OAM) sera égal à la somme géométrique du segment IG et du moment ($I\alpha M$); ce dernier segment est perpendiculaire au plan (P) mené par le point M perpendiculairement à l'axe instantané, en sorte que la projection de l'accélération normale sur le plan (P) s'obtiendra en projetant orthogonalement sur le plan normal MOI la somme géométrique des deux segments $\omega^2 MI$ et $\omega^2 IG$ ou le segment $\omega^2 MG$; si donc on abaisse du point G la droite $G\gamma$ perpendiculaire sur MI, la projection sur le plan (P) de l'accélération normale sera $\omega^2 M\gamma$; par conséquent la droite $R_1\gamma$ est perpendiculaire sur la droite $MI\gamma$; si maintenant on désigne par $M'$ le point où la droite $O\mu$ rencontre la droite MI, il est clair que les quatre points $M'$, $\mu$, $R_1$, $\gamma$ sont sur un cercle et que, par conséquent, l'on a

$$MM' \times M\gamma = M\mu \times MR_1 = MI^2,$$

en sorte que, dans le plan (P), le point $M'$ correspond au point M, absolument d'après la même loi qui permet de déduire, dans le mouvement d'un plan sur un plan, de chaque point du plan mobile le centre de courbure de sa trajectoire; dans la *fig.* 6, les points M, $M'$, I, G, $\gamma$ jouent le même rôle que les points de mêmes noms dans la *fig.* 3.

Dès qu'on a le point $M'$, on a l'axe du point osculateur de la trajectoire du point M et le centre de courbure de cette trajectoire.

Imaginons maintenant une sphère (S) de centre O, de rayon égal à un, invariablement liée au corps solide; elle coïncidera constamment avec une sphère fixe ($s$). A l'époque $t$, le point J est, si l'on veut, le *centre instantané de rotation* sur la sphère (S), dont le mouvement, s'il était connu, ferait connaître entièrement le mouvement du corps solide. Les lieux des centres instantanés de rotation sur les sphères (S), ($s$) sont des courbes (C), (C') qui, à l'époque $t$, sont tangentes en J et qui roulent l'une sur l'autre. A chaque point $m$ de la sphère (S), faisons correspondre le centre de courbure sphérique $m'$ de sa trajectoire sphérique; les points $m$, $m'$ seront, en vertu de ce qu'on vient de démontrer, les perspectives sur la sphère (S) de deux points correspondants sur le plan (P), l'œil étant supposé en O; les perspectives sur la même sphère des lignes d'action des segments $I\alpha$, IG sont les grands cercles respectivement tangents et normaux en I aux courbes (C) et (C′). Si l'on désigne par $c$ et $c'$ les centres de courbure sphériques de ces deux courbes relatifs au point J, les deux points $c$ et $c'$ seront, sur la sphère (S), deux points correspondants, comme on le voit par un raisonnement identique à celui qui a été donné dans l'étude du mouvement d'un plan sur un plan. Les deux points C, C′, perspectives sur le plan (P) des points $c$, $c'$, sont donc des points correspondants sur le plan (P); on pourra donc effectuer, sur le plan (P), les constructions de Savary si l'on connaît les deux points C et C′ ou, si l'on veut, les constructions correspondantes sur la sphère (S) si l'on connaît les points $c$, $c'$. Le point $m'$, correspondant au point $m$, sera le point d'intersection du grand cercle J$m$ avec le grand cercle qui joint le point $c'$ au point où le grand cercle, mené par le point J perpendiculairement au grand cercle J$m$, rencontre le grand cercle $cm$. On voit de même comment, connaissant deux couples de points correspondants sur la sphère, on pourra construire le point correspondant à un point quelconque.

Enfin, la propriété des deux figures sur le plan (P) et la sphère (S), d'être en perspective, fournit immédiatement les relations entre la vitesse angulaire $\omega$, la vitesse V avec laquelle se déplace le centre instantané J, les rayons de courbure sphérique J$c$, J$c'$ des deux courbes et les arcs de grands cercles J$m$, J$m'$ qui vont du point J à deux points correspondants.

Supposons, pour simplifier un peu, que le point I coïncide avec le point J, en sorte que le plan (P) soit le plan tangent en J à la sphère (S). On voit sans peine que, si l'orientation de ce plan correspond à la direction OI, l'angle des deux directions (I$\alpha$, IG) est égal à $-\frac{\pi}{2}$. Ceci posé, la ligne d'action du segment I$\alpha$ est la tangente commune aux deux courbes (C) et (C′). Supposons qu'on ait choisi sur cette droite une direction quelconque IT, la vitesse de déplacement du centre instantané de rotation sera représentée alors par un nombre positif ou négatif $v = \pm V$. Si, sur la perpendiculaire à cette droite dans le plan (P), on choisit comme direction positive la direction IK telle que l'angle (IK, IT) soit égal à $+\frac{\pi}{2}$, on aura

$$IG = \frac{v}{\omega};$$

puis, si l'on choisit sur l'arc de grand cercle tangent à IK, c'est-à-dire sur l'arc de grand cercle normal aux deux courbes (C), (C'), la direction positive qui correspond à la direction IK, la formule (6) de la page 69 montre que l'on a

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{I}c} - \frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{I}c'} = \frac{1}{\mathrm{IG}} = \frac{v}{\omega}. \tag{9}$$

Si, enfin, on prend sur le grand cercle I$m$ une direction positive quelconque et que l'on désigne par $\varphi$ l'angle que la tangente à cette direction menée par le point I fait avec la direction IK, on aura

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{I}c} - \frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{I}c'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{I}m} - \frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{I}m'}\right). \tag{10}$$

Les arcs I$c$, I$c'$, I$m$, I$m'$ sont déterminés à un multiple de $\pi$ près.

J'ajouterai enfin que, si l'axe O$z$ coïncide avec la direction OJ, si l'axe O$x$ est parallèle à la direction IT et de même sens, si enfin l'axe O$y$ est déterminé par cette condition que le trièdre O$xyz$ soit trirectangle et ait la disposition directe, en sorte que O$y$ soit parallèle à la direction IK et de sens contraire, les projections sur ces trois axes de l'accélération totale et de l'accélération normale du point, dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$, seront respectivement, en faisant $\lambda = \frac{v}{\omega}$,

$$-\omega' y - \omega^2 x, \quad \omega' x - \omega^2(\lambda z + y), \quad \omega^2 \lambda y;$$
$$-\frac{\omega^2 x}{x^2+y^2}(x^2+y^2+\lambda z y), \quad -\frac{\omega^2 y}{x^2+y^2}(x^2+y^2+\lambda z y), \quad \omega^2 \lambda y.$$

On trouvera aussi facilement l'équation du plan osculateur et les coordonnées du centre de courbure de la trajectoire du même point.