ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Généralisation de la série de Taylor

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 61-64
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__61_0>

GÉNÉRALISATION

DE

LA SÉRIE DE TAYLOR,

PAR M. C. GUICHARD,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

I. — Préliminaires.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans tout le plan; je désignerai par $f_n(z)$ la dérivée d'ordre n de la fonction $f(z)$, par $f_{-n}(z)$ celle des intégrales d'ordre n, qui s'annule n fois pour $z = 0$.

Si l'on a

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{A_p}{1.2\ldots p} z^p,$$

on aura

$$f_{-n}(z) = \sum_0^\infty \frac{A_p}{1.2\ldots(n+p)} z^{n+p}.$$

Soit C une aire fermée quelconque; on aura à l'intérieur de cette aire

$$\sum_0^\infty \operatorname{mod} \frac{A_p}{1.2\ldots p} z^p < M,$$

M étant un nombre positif convenablement choisi; il en résulte

$$\operatorname{mod} f_{-n}(z) < \frac{M\rho^n}{1.2\ldots n} \quad (\rho = \operatorname{mod} z)$$

pour toutes les valeurs de z, intérieures à C.

II. — Étude de la série $\Pi(z, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z)\,R_{-n}(x)$.

Si f et R sont deux fonctions entières, la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z)\,R_{-n}(x) \tag{1}$$

représente une fonction holomorphe des variables x et z, pour toutes les valeurs de x et de z.

En effet, plaçons le point x à l'intérieur d'une aire C, le point z à l'intérieur d'une aire C'.

On aura, pour ces valeurs de x et z,

$$\operatorname{mod} f_{-n}(z) < \frac{M\rho^n}{1.2\ldots n}, \qquad \operatorname{mod} R_{-n}(x) < \frac{M r^n}{1.2\ldots n}$$

$$r = \operatorname{mod} x.$$

Cela posé, la série (1) peut se décomposer en deux parties :

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z)\,R_{-n}(x), \tag{2}$$

$$\sum_{1}^{\infty} f_{-n}(z)\,R_n(x). \tag{3}$$

Les modules des termes de ces séries sont respectivement moindres que ceux des termes correspondants des séries

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{M r^n}{1.2\ldots n} \operatorname{mod} f_n(z), \tag{2'}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{M \rho^n}{1.2\ldots n} \operatorname{mod} R_n(x), \tag{3'}$$

qui sont convergentes et à termes positifs.

III. — Propriété de la fonction Π.

On voit tout de suite que la fonction Π vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Il en résulte que Π est fonction de $x + z$.

IV. — Calcul des coefficients de la fonction Π.

Nous poserons

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{A_p}{1.2\ldots p} z^p,$$

$$R(x) = \sum_0^\infty \frac{B_p}{1.2\ldots p} x^p,$$

$$\Pi(x+z) = \sum_0^\infty \frac{C_p}{1.2\ldots p} (x+z)^p.$$

Si, dans la série (1), on fait $x = 0$, toutes les intégrales de $R(x)$ sont nulles; les dérivées se réduisent aux coefficients B. On aura alors

$$\Pi(z) = \sum_0^\infty B_n f_{-n}(z)$$

ou

$$\Pi(z+x) = \sum_0^\infty B_n f_{-n}(z+x) = \sum_0^\infty A_n R_{-n}(x+z).$$

Cette relation permet de calculer les coefficients C. Elle donne

(4) $$C_p = A_0 B_p + A_1 B_{p-1} + \ldots + A_p B_0.$$

Si l'on considère maintenant les séries suivantes :

(5) $$f = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots,$$

(6) $$R = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots,$$

(7) $$\Pi = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots,$$

les formules (4) montrent que la série (7) est le produit des séries (5) et (6). Il peut se faire, d'ailleurs, que ces séries soient divergentes pour toutes les valeurs de t; mais cela importe peu; la série Π s'obtient en appliquant la règle de la multiplication des séries à f et R.

Cela posé, supposons la série R convergente pour toutes les valeurs de t; supposons de plus qu'elle représente une fonction de t n'ayant pas de zéros. R sera de la forme $e^{\varphi(t)}$.

Posons

$$R' = e^{-\varphi(t)} = B'_0 + B'_1 t + B'_2 t^2 + \ldots$$

et

$$R'(x) = \sum_0^\infty \frac{B'_p}{1.2\ldots p} x^p.$$

La série f sera le produit des séries Π et R'. On en conclut

$$f(x) = \sum_0^\infty C_n R'_{-n}(x).$$

Ainsi une fonction entière quelconque est développable en séries contenant les intégrales successives de la fonction $R'(x)$.

Si, en particulier, on suppose $R(x) = 1$, les séries Π et f sont identiques; la série (1) donne

$$f(x+z) = \sum_0^\infty f_n(z) \frac{x^n}{1.2\ldots p};$$

c'est la série de Taylor.