F. BRIOSCHI

Sur la réduction de l'intégrale hyperelliptique à l'elliptique par une transformation du troisième degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 227-230

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__227_0>

SUR LA RÉDUCTION

DE

L'INTÉGRALE HYPERELLIPTIQUE A L'ELLIPTIQUE

PAR UNE

TRANSFORMATION DU TROISIÈME DEGRÉ [1],

PAR M. F. BRIOSCHI.

1. Soient $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$ deux formes binaires de l'ordre n, et

$$F(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2)\,\psi(y_1, y_2) - \psi(x_1, x_2)\,\varphi(y_1, y_2);$$

on démontre facilement que chaque invariant de la forme F s'exprime en fonction de covariants et d'invariants simultanés des formes $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

La valeur du discriminant Δ de F s'exprime de la manière suivante

$$\Delta = f^2 P,$$

étant $f = (\varphi\psi)$ covariant simultané de l'ordre $2(n-1)$, et P une fonction de covariants et d'invariants simultanés de l'ordre $2(n-1)(n-2)$.

Pour $n = 3$, on trouve

$$P = -2(kf + 6h),$$

forme du quatrième ordre, étant $k = (\varphi\psi)_3$ invariant, $h = \frac{1}{2}(ff)_2$ covariant, simultanés. En indiquant par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines de

[1] GOURSAT, *Bulletin de la Société mathématique de France*, p. 155; 1885. — BURKHARDT, *Mathematische Annalen*, Band XXXVI, p. 411.

l'équation $\Delta(F) = 0$, on aura, en conséquence,

$$\prod_0^3{}_r (\varphi - \lambda_r \psi) = m f^2(kf + 6h),$$

m constante.

Chacun des facteurs $\varphi - \lambda\psi$ ayant une racine double, on peut poser

$$(1) \qquad \varphi - \lambda\psi = \alpha^2\beta,$$

α, β étant des fonctions linéaires, et α sera un facteur de f, β un facteur de $kf + 6h$. Soit

$$(2) \qquad \varphi - \mu\psi = u,$$

μ constante; de l'équation supérieure, on déduit

$$(\varphi - \mu\psi) \prod_1^3{}_r (\varphi - \lambda_r \psi) = m\left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 (kf + 6h)\frac{u}{\beta} = m\left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 uv,$$

en supposant

$$v\beta = kf + 6h.$$

La transformation $z = \frac{\varphi}{\psi}$ conduit à la réduction d'intégrales due à M. Goursat. L'intégrale hyperelliptique n'est pas générale, ce que je vais démontrer en déterminant d'une manière nouvelle la valeur de la forme v du troisième ordre.

2. En posant $\mu - \lambda = \rho$ des équations (1), (2), on a

$$\rho\varphi = \mu\alpha^2\beta - \lambda u, \qquad \rho\psi = \alpha^2\beta - u,$$

et c'est avec ces valeurs de φ, ψ que je vais calculer celles de f et de $kf + 6h$.

Dans ce but, j'introduis les huit invariants simultanés des formes u, α, β qui suivent :

$$P_0 = (u\alpha^3)_3, \qquad P_1 = (u\alpha^2\beta)_3, \qquad P_2 = (u\alpha\beta^2)_3, \qquad P_3 = (u\beta^3)_3,$$
$$L_0 = (\mathrm{J}\alpha^2)_2, \qquad L_1 = (\mathrm{J}\alpha\beta)^2, \qquad L_2 = (\mathrm{J}\beta^2)_2;$$

$M = (\alpha\beta)$, étant $\text{J} = \frac{1}{2}(uu)_2$. Entre ces invariants, on a les relations suivantes :

$$P_0 P_2 - P_1^2 = M^2 L_0, \qquad P_0 P_3 - P_1 P_2 = 2 M^2 L_1, \qquad P_1 P_3 - P_2^2 = M^2 L_2,$$
$$L_0 L_2 - L_1^2 = \tfrac{1}{2} M^2 A, \tag{3}$$

étant $A = (\text{JJ})_2$, le discriminant de la forme u. En considérant encore les deux covariants simultanés $l = (u\alpha)$, $m = (u\beta)$, on a les trois relations

$$L_2 \alpha^2 - 2 L_1 \alpha\beta + L_0 \beta^2 = M^2 \text{J},$$
$$P_2 \alpha^2 - 2 P_1 \alpha\beta + P_0 \beta^2 = M^2 l,$$
$$P_3 \alpha^2 - 2 P_2 \alpha\beta + P_1 \beta^2 = M^2 m.$$

Cela posé, on trouve

$$3\rho f = \alpha(\alpha m + 2\beta l), \qquad \rho k = P_1,$$
$$36\rho^2 h = 2 P_1 \alpha(\alpha m + 2\beta l) - 4 M^2 \alpha^2 \text{J} - [\beta(l\alpha) + 2\alpha(m\alpha)]^2.$$

Mais

$$(l\alpha)^2 = P_0 l - L_0 \alpha^2, \qquad (m\alpha)^2 = P_1 m - L_2 \alpha^2,$$
$$2(l\alpha)(m\alpha) = P_0 m + P_1 l - 2 L_1 \alpha^2,$$

et, après quelques réductions, on arrive à la seconde équation

$$6\rho^2(kf + 6h) = \beta[12 L_1 \alpha^3 - 3 L_0 \alpha^2 \beta + 6 P_1 \alpha l - P_0(2\alpha m + \beta l)].$$

La forme du troisième ordre v est en conséquence la suivante :

$$M^2 v = 4 P_0 P_3 \alpha^3 - 9 P_1^2 \alpha^2 \beta + 6 P_0 P_1 \alpha\beta^2 - P_0^2 \beta^3.$$

Les invariants simultanés des formes u, v seront donc des fonctions de P_0, P_1, ..., M. En posant $\sigma = \frac{1}{2}(vv)_2$, on a, comme il est connu, les trois invariants

$$A = (\text{JJ})_2, \qquad B = (\text{J}\sigma)_2, \qquad C = (\sigma\sigma)_2;$$

l'invariant $J = (uv)_3$ et le résultant R des formes u, v.

La valeur (3) de A conduit tout de suite à la suivante

$$R = -54 P_0^4 P_3 A,$$

et l'on trouve pour J, C, B les valeurs

$$M^2 J = 3(P_0^2 P_3 - 3P_1^3 + 2P_0P_1P_2),$$
$$M^2 C = 8P_0^4 P_3(P_1^3 - P_0^2 P_3)$$

et, en conséquence,

$$M^2(9C + 8P_0^4 P_3 J) = -48P_0^5 P_3(P_0P_3 - P_1P_2).$$

Enfin le calcul de l'invariant B donne

$$M^4(9B - J^2) = -27P_0^2(P_0P_3 - P_1P_2)^2.$$

Ces deux dernières équations conduisent à la suivante

$$3(9C + 8P_0^4 P_3 J)^2 + 4^4 P_0^8 P_3^2(9B - J^2) = 0,$$

de laquelle, en multipliant par $3^6 A^2$, on arrive à l'équation de condition entre les invariants A, B, C, J, R,

$$3(3^5 AC - 4RJ)^2 + 4^3 R^2(9B - J^2) = 0,$$

déjà calculée par M. Burkhardt.