P. PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 267-284
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__267_0>

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

(SUITE),

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

CHAPITRE IV.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE N'ADMET QU'UN NOMBRE DONNÉ n DE DÉTERMINATIONS SE PERMUTANT AUTOUR DES POINTS CRITIQUES MOBILES.

1. Les résultats que nous avons obtenus dans le Chapitre précédent ne s'appliquent jamais au cas où le genre p de l'équation différentielle

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

est nul. Nous allons maintenant traiter un problème dont la solution embrasse les équations (1) de genre quelconque, en particulier les équations de premier degré en y'

$$y' = R[y, (x)].$$

Nous nous proposons de *reconnaître si l'intégrale générale de* (1) *n'admet qu'un nombre donné n de valeurs se permutant autour des points critiques mobiles*.

Rappelons-nous, pour traiter cette question, les propositions générales établies dans le premier Chapitre :

Si l'intégrale est de l'espèce indiquée, elle se laisse définir par la relation

$$(2)\quad X[y, y_0, y'_0, (x)] = y^n + y^{n-1}R_{n-1}[y_0, y'_0, (x)] + \ldots + R^0[y_0, y'_0, (x)] = 0;$$

dans cette égalité, R_i désigne une fonction rationnelle de y_0, y'_0; quant à y_0, y'_0, ce sont les valeurs pour x_0 de l'intégrale particulière et de sa dérivée; ces valeurs vérifient la condition

$$(1)'\quad F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0.$$

Les R_i, R_j d'une part, les R_i, $\frac{dR_i}{dx}$ d'autre part, sont liés par des relations algébriques qu'on forme en éliminant y_0, y'_0 entre ces quantités et l'équation (1). Par exemple, si R_i dépend effectivement de la constante d'intégration (y_0, y'_0), on peut donner à ces équations la forme

$$\begin{aligned} R'_i &= \varphi[R_i, (x)], \\ R_1 &= \Psi_1[R_i, (x)], \\ R_2 &= \Psi_2[R_i, (x)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_n &= \Psi_n[R_i, (x)], \end{aligned}$$

les Ψ, φ étant algébriques en R_i.

Quand n est le nombre exact des branches de y qui se permutent autour des points critiques mobiles, nous savons qu'il n'existe qu'un système distinct de telles relations.

Les fonctions $R_i(x)$ ont leurs points critiques fixes. D'autre part, on a

$$R_i = R_i[y_0, y'_0, (x)] = y'^{m-1}_0 A^1_i[y_0, (x)] + y'^{m-2}_0 A^2_i[y_0, (x)] + \ldots + A^m_i[y_0, (x)].$$

Dans cette égalité, les quantités A^j_i sont des fonctions rationnelles en y_0. Nous allons chercher à déterminer une limite supérieure du degré en y_0 des deux polynômes dont A^j_i est le quotient.

Pour cela, nous ferons usage d'une seconde forme de l'intégrale de l'équation (1)

$$f[y, y_0, (x)] = 0,$$

dans laquelle f est, comme l'on sait, un polynôme de degré mn par rapport à chacune des lettres y et y_0. Supposons qu'on ait ramené à l'unité le coefficient de y^{mn} dans

$$f[y, y_0, (x)];$$

désignons par f_1 ce que devient f; nous pouvons écrire

$$f_1[y, y_0, (x)] = y^{mn} + B_1[y_0, (x)]y^{mn-1} + \ldots + B_{mn}[y_0, (x)] = 0.$$

Dans cette équation, les B_i^j sont des fractions rationnelles dont les deux termes sont au plus de degré mn en y_0.

Les mn valeurs de y qui correspondent à chaque valeur de y_0 se décomposent de la manière suivante en m groupes formés chacun de n valeurs :

A chaque valeur de y_0 correspondent m valeurs de y'_0. Soient z_1, z_2, ..., z_m ces m valeurs. A chaque système de valeurs de (y_0, y'_0) correspondent les déterminations d'une même intégrale. Appelons R_i^1, R_i^2, ..., R_i^m les valeurs de R_i qui correspondent à y_0; en d'autres termes, posons

$$R_i^j = R_i[y_0, z_i, (x)].$$

Posons encore

$$\begin{aligned} X_1 = X[y, y_0, z_1, (x)] &= y^n + y^{n-1}R_1^1 + y^{n-2}R_2^1 + \ldots + R_n^1 \\ &= y^n + y^{n-1}(A_1^2 z_1^{m-1} + \ldots + A_1^m) + \ldots + (A_n^1 z_1^{m-1} + A_n^2 z_1^{m-1} + \ldots + A_n^m) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} X_2 = X[y, y_0, z_2, (x)] &= y^n + y^{n-1}R_1^2 + y^{n-2}R_2^2 + \ldots + R_n^2 \\ &= y^n + y^{n-1}(A_1^2 z_2^{m-1} + \ldots + A_1^m) + \ldots + (A_n^1 z_2^{m-1} + \ldots + A_n^m), \end{aligned}$$

....

On a identiquement

$$f_1[y, y_0, (x)] = X_1 X_2 \ldots X_n. \tag{3}$$

Les coefficients des puissances de y sont, dans le premier membre de l'équation (3), des fonctions de y_0 qui sont au plus de degré mn en y_0; dans le second membre, ce sont des fonctions entières des quantités A_i^j, et les coefficients de ces fonctions sont eux-mêmes des fonctions symétriques de z_1, z_2, ..., z_m, et, par suite, s'expriment rationnellement en fonction des coefficients α de l'équation

$$F[y_0, z, (x_0)] = z^m + \alpha_1[y_0, (x_0)]z^{n-1} + \ldots + \alpha_m[y_0, (x_0)] = 0.$$

On peut aisément, pour chaque valeur donnée de m, calculer ces fonctions symétriques en fonction des α. Elles sont de la forme

$$S = \sum z_i^{\mu} z_j^{\mu'} \ldots,$$

chacun des nombres μ, μ', ...; étant au plus égal à $(m-1)$ il nous suffit, pour le but que nous nous proposons d'atteindre, de calculer une limite supérieure de leur degré en y_0. D'après la théorie des fonctions symétriques, une telle fonction S est une fonction entière des quantités α, et cette fonction entière est au plus de degré $m(m-1)$ par rapport aux α. Si n' désigne le degré le plus élevé auquel y_0 figure dans l'expression des quantités α, les quantités S seront au plus de degré

$$\nu = m(m-1)n'$$

en y_0.

Dans chacun des deux membres de l'équation (3), le coefficient de y^{mn} est égal à l'unité. En égalant respectivement les coefficients de y^{mn-1}, y^{mn-2}, ..., y^0 dans le premier membre de l'équation (3), aux coefficients de y^{mn-1}, y^{mn-2}, ..., y^0 dans le second membre, nous obtenons mn équations, liant entre elles les mn quantités A_i^j. Chacune de ces équations peut s'écrire sous la forme suivante

$$(4) \qquad \sum_k S_k[y_0, (x_0)]\varphi_k(A_1^1, \ldots A_i^j \ldots A_n^m) = B[y_0, (x)],$$

les φ_k désignant des fonctions entières des A_i^j.

Parmi ces équations, les $(m-1)$ premières sont respectivement de degré 1, 2, ..., $(m-1)$ par rapport aux A_i^j. Toutes les autres sont de degré m.

Par rapport aux quantités y_0, les coefficients S_k sont au plus de degré ν, et les quantités B sont au plus de degré mn.

D'ailleurs, le système des équations (4) n'est jamais indéterminé, sinon on pourrait trouver, pour chaque valeur de y_0 et de x, une infinité de valeurs des quantités A_i^j vérifiant les équations (4), et la quantité

$$f_1[y, y_0, (x)],$$

qui est un polynôme en y, serait, par suite, décomposable d'une infinité de manières en un produit

$$X_1 X_2 \dots X_m$$

de m facteurs de degré n en y, ce qui est absurde.

Si donc, entre les équations (4), nous éliminons $(mn-1)$ des quantités A_i^j, nous obtenons une relation de la forme

$$G[A_i^j, y_0, (x)] = 0,$$

qui, pour chaque valeur de x, lie à y_0 la quantité A_i^j restante.

G est un polynôme en A_i^j et en y_0. Son degré en A_i^j est au plus égal à

$$1.2.3\dots m\, m^{m(n-1)}.$$

Mais, ce qui nous importe, c'est de trouver une limite supérieure de son degré en y_0.

Pour l'obtenir, nous remarquerons que toutes les équations (4) sont au plus de degré N par rapport aux variables A_i^j et y_0, N désignant le plus grand des deux nombres

$$mn \quad \text{et} \quad m+\nu = m(n'+1) - n'.$$

Le degré auquel figure y_0 dans le polynôme

$$G[A_i^j, y_0, (x)]$$

est donc au plus égal à

$$P = N^{mn}.$$

J'ajoute que, si $(m+\nu)$ est supérieur à mn, cas auquel N est égal à $(m+\nu)$, on peut remplacer N par un nombre moindre, pour les $(m-1)$ premières équations, ce qui conduit à prendre pour P une valeur moindre.

La fraction rationnelle $A_i^j\,[y^0, (x)]$ doit donc vérifier une équation

$$G[A_i^j, y_0, (x)] = 0,$$

où y figure au plus au degré P.

Mettons G sous forme entière par rapport aux A_i^j et aux y_0 : le numérateur et le dénominateur de A_i^j doivent diviser les deux coefficients extrêmes du polynôme en A_i^j. *Les deux termes de la fraction rationnelle* $A_i^j(y_0, x)$ *sont donc au plus de degré* P *en* y_0.

Cette limite supérieure de P est très élevée : dans chaque cas particulier, on pourra l'abaisser notablement. Pour deux nombres donnés, m et n, sans rien supposer sur l'équation (1), on obtiendrait une limite très inférieure à la précédente en opérant ainsi.

On forme facilement, pour m et n donnés, les quantités

$$\varphi_k(\ldots A_i^j \ldots)$$

qui figurent dans les relations (4). Entre ces équations (4) on effectue l'élimination de $(mn-1)$ des quantités A_i^j en traitant les quantités $S_k(y_0)$ comme des constantes quelconques. On arrive ainsi à une relation où figure celle des quantités A_i^j que l'on n'a pas éliminée, A_1^1 par exemple, et les quantités S_k, B_i. On connaît une limite supérieure des degrés des S_k, B_i en y_0 ; on connaîtra, par suite, une limite supérieure du degré en y_0 de l'équation qui donne A_1^1 ; cette limite est aussi celle du degré des deux termes de A_1^1 ; on opérera de même pour toutes les quantités A_i^j.

La nouvelle limite ainsi trouvée vaut pour toutes les équations de degré m en y', dont l'intégrale prend n valeurs autour des points critiques mobiles. Pour une équation différentielle particulière donnée, en exprimant les S_k en fonction de y_0, on abaissera encore cette limite.

Mais le fait important qu'il nous faut retenir pour l'instant, c'est qu'*on peut toujours déterminer une limite supérieure* P *du degré auquel* y_0 *figure dans les* A_i^j. Il suffit de prendre

$$P = N^{mn};$$

N désigne le plus grand des deux nombres

$$mn \quad \text{et} \quad m(n'+1) - n';$$

n' est le degré en y de l'équation (1) pour $x = x_0$.

Revenons maintenant à l'étude des quantités

$$R_i[y_0, y'_0, (x)] = y_0'^{m-1} A_i^1[y_0, (x)] + \ldots + A_i^m[y_0, (x)].$$

D'après ce qui précède, elles sont au plus de degré P en y_0.

Si donc on élimine y_0 et y'_0 entre les trois relations

$$R_i = R_i[y_0, y'_0, (x)],$$
$$\frac{dR_i}{dx} = \frac{d}{dx} R_i[y_0, y'_0, (x)],$$
$$F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

l'équation algébrique et entière en R, $\frac{dR}{dx}$ à laquelle on parvient est au plus de degré Q_i, Q_i se calculant aussitôt à l'aide de P.

De même, si l'on élimine y_0, y'_0 entre les relations

$$R_i = R_i[y_0, y'_0, (x)],$$
$$R_j = R_j[y_0, y'_0, (x)],$$
$$F[y_0, y'_0, (x_0)],$$

on obtient une équation

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = 0,$$

dont le premier membre est de degré au plus égal à Q_{ij}.

Nous pouvons donc écrire un système de relations

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi[R_i, R'_i, (x)] = 0, \\ \psi_{i,1}[R_i, R_1, (x)] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{i,n}[R_i, R_n, (x)] = 0, \end{cases}$$

où les polynômes φ, $\psi_{i,j}$ ont des degrés respectivement égaux à Q_i, $Q_{i,j}$.

Exprimons, d'une part, que l'équation

$$\varphi = 0$$

a ses points critiques fixes ; d'autre part, que les équations

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = 0$$

définissent un système de fonctions $R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)$ en fonction de R_i et de x dont les points critiques sont également fixes; enfin que le système des fonctions R_1, R_2, $\ldots$, R_n, transporté dans la relation

$$y^n + R_{(n-1)} y^{n-1} + \ldots + R_0 = 0,$$

définit l'intégrale de l'équation (1). Nous obtenons ainsi un certain nombre de conditions algébriques entre les coefficients indéterminés $a(x)$, $b(x)$, ... des polynômes φ, ψ et leurs dérivées $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, ...

On reconnaît, par des opérations purement algébriques, si ces conditions sont compatibles. Quand elles le sont, par quelles opérations sont déterminés des coefficients $a(x)$, $b(x)$, ...?

Rappelons-nous que, si n valeurs se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, il ne saurait exister deux systèmes distincts de relations (5). Pour éviter toute ambiguïté, supposons que, dans $\psi_{i,j}$, le terme de degré le plus élevé en R_i, R_j ait pour coefficient l'unité, de même que dans φ le terme de degré le plus élevé en R_i, R'_i. Dans ces conditions, on a

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = \Pi_i^p[R_i, R_j, (x)],$$

p étant un certain entier et Π_i une fonction de R_i, R_j, (x) bien déterminée, entière et irréductible par rapport à R_i, R_j. Il en est de même pour φ.

D'après cela, si les conditions qui assujettissent les a_i sont compatibles et indéterminées, c'est que l'intégrale des (1) prend un nombre n' de valeurs inférieur à n autour des points critiques mobiles. Il faut donc essayer les nombres n' plus petits que n.

Quand les conditions sont compatibles et déterminées, il peut arriver que plusieurs systèmes a, b, ..., les vérifient. Mais il suffit de chercher les polynômes φ, Ψ_{ij} de degré minimum. Leurs coefficients s'obtiennent par des opérations linéaires, puisqu'il ne saurait exister qu'un seul système de tels polynômes.

Nous arrivons ainsi à ce théorème :

On reconnaît par des opérations purement algébriques si l'intégrale d'une équation (1) *donnée ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles. Dans ce cas, l'équation se ramène, par des opérations également linéaires, à une équation différentielle dont les points critiques sont fixes.*

A cette dernière équation

$$\varphi\left[R, \frac{dR}{dx}, (x)\right] = 0$$

s'appliquent les résultats de M. Poincaré. Si son genre p' est nul, elle se ramène à une équation de Riccati

$$t' = \mathrm{M}t^2 + \mathrm{N}t + \mathrm{P}; \tag{6}$$

s'il est égal à l'unité, elle s'intègre par une quadrature; s'il est supérieur à 1, elle s'intègre algébriquement.

Il faut de plus que les fonctions R_j de x, définies par les relations

$$\psi_{i,j}[\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_j, (x)] = 0,$$

n'aient elles-mêmes que des points critiques fixes. Cette condition met souvent en évidence des intégrales de l'équation de Riccati (6), quand $p' = 0$.

Si R_j, en effet, ne s'exprime pas rationnellement en fonction de R_i, R'_i, par suite en fonction de t, elle admet, pour chaque valeur de x, au moins deux points critiques

$$t_0 = \mathrm{K}_0(x), \qquad t_1 = \mathrm{K}_1(x),$$

et t_0, t_1 doivent être intégrales de (6) pour que R_j n'ait pas de points critiques variables.

Quand les R_j ont trois points critiques distincts

$$t_0 = \mathrm{K}_0, \qquad t_1 = \mathrm{K}_1, \qquad t_2 = \mathrm{K}_2,$$

l'équation de Riccati s'intègre algébriquement.

Si tous les R_j n'ont que deux points critiques qui coïncident, on peut toujours supposer que ces valeurs critiques t_0, t_1 sont 0 et ∞ (car t n'est défini qu'à une transformation homographique près), et l'équation (6) se réduit à

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{N}(x),$$

d'où

$$t = \mathrm{CN}_1(x).$$

Si l'on pose $\mathrm{C}^{\frac{1}{p}} = \gamma$, p étant un entier convenablement choisi, toutes les fonctions R_j dépendront rationnellement de C

$$\mathrm{R}_i = \rho_i[\mathrm{C}, (x)].$$

C'est ce qui a lieu de soi-même quand, p' étant nul, tous les R_j s'expriment rationnellement en fraction de R_i, R'_i.

Une discussion analogue se présente dans le cas où $p' = 1$. Si tous R_j s'expriment rationnellement en R_i, R'_i, l'équation s'intègre par une quadrature, et son intégrale est de la forme

$$\begin{aligned} &y^n + \rho_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + \rho_0(C, x) \\ &\quad + \sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}\,[r_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + r_0(C, x)] = 0. \end{aligned}$$

Au cas contraire, à un point critique de $R_j[R_i, (x)]$, [soit $R_i = a(x)$], correspond une intégrale de l'équation

$$\varphi[R, R', (x)] = 0,$$

qui s'intègre algébriquement.

En définitive, *l'intégrale de* (1), *quand elle prend un nombre donné* n *de valeurs autour des points critiques mobiles, s'obtient algébriquement, à moins qu'elle ne se laisse mettre dans l'une des deux formes suivantes*

$$\begin{aligned} &y^n + \rho_{n-1}(C, x) y^{n-2} + \ldots + \rho^0(C, x) \\ &\quad + \sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}\,[r_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + r_0(C, x)] = 0 \end{aligned}$$

(*auquel cas elle se calcule par une quadrature*), *ou*

$$y^n + R_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + R_0(C, x) = 0$$

(*auquel cas elle dépend de l'intégration d'une équation de Riccati*). Dans ces égalités, les ρ, r, R désignent des fonctions rationnelles de C.

Ajoutons que nous avons dirigé tout le calcul en nous servant de $R_i[y_0, y'_0, (x)]$. Il peut arriver que, dans l'intégrale cherchée, R_i ne dépende pas de (y_0, y'_0). Dans la pratique, il faudrait donner à i successivement les valeurs $i = 1$, $i = 2$, ..., $i = n$, et égaler, dans chaque calcul, à des fonctions de x indépendantes de la constante, les R_i avec lesquels on aurait fait l'essai infructueusement.

Un procédé plus symétrique et plus élégant consiste à introduire la fonction

$$r[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = \Sigma a_i(x) R_i[y_0, y'_0, (x_0)(x)]$$

que nous avons considérée déjà dans le premier Chapitre. Nous savons déterminer une limite supérieure du degré auquel figure y_0 dans r, par suite une limite supérieure du degré en r et r' de l'équation

$$h[r, r', (x)] = 0,$$

qui est, comme nous le savons, *une relation entre les constantes ou fonctions intégrales*. Il faut d'abord que l'intégrale de cette équation ait ses points critiques fixes, quels que soient les $a_i(x)$. Cette condition remplie, les R_i sont liés à r par des relations

$$\psi_j[R_i, r, (x)] = 0$$

dont le degré ne peut dépasser une limite connue. Il suffit d'exprimer que, si l'on substitue les fonctions $R_i[r, (x)]$ dans l'équation

$$y^n + R_{n-1} + y^{n-1} + \ldots + R_0 = 0,$$

cette équation définit l'intégrale de (1). Dans $R_i[r, (x)]$, r représente l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$h[r, r'(x)] = 0.$$

Quand ces conditions sont remplies, si l'on a laissé aux a_i des valeurs quelconques, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ s'expriment toujours rationnellement en r et r'.

D'après cela, *l'équation $h = 0$ et, par suite, l'équation* (1) *s'intègrent algébriquement quand le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est supérieur à l'unité.*

Quand ce genre est égal à 1, *l'équation* (1) *s'intègre par une quadrature.*

Quand ce genre est nul, l'équation (1) *se ramène algébriquement à une équation de Riccati.*

Si l'on se reporte aux formes que prend l'intégrale générale dans ces deux cas, formes que nous avons étudiées dans le premier Chapitre, on voit que ces résultats ne diffèrent pas de ceux que nous avons obtenus tout à l'heure.

2. La méthode que nous venons d'exposer démontre d'une façon directe que la question posée au début de ce Chapitre se résout à l'aide d'un nombre limité d'opérations algébriques; mais les calculs auxquels elle conduit seraient la plupart du temps inextricables. Nous allons indiquer un moyen beaucoup plus rapide de résoudre le problème.

Quand l'intégrale y ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales peut être nul, égal à 1, ou plus grand que 1. Nous allons chercher à reconnaître successivement si l'intégrale de (1) est de l'espèce indiquée, ϖ étant d'abord supposé plus grand que l'unité, puis égal à l'unité, puis nul.

En premier lieu, si ϖ est plus grand que 1, on a

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1},$$

p désignant le genre de F. Comme nous l'avons déjà remarqué, n est un diviseur de $(p-1)$. Admettre que la relation entre les constantes intégrales est de genre plus grand que 1, c'est se donner par le point même une limite supérieure de n. Le moyen le plus simple de reconnaître si l'intégrale satisfait à ces conditions, c'est de suivre la marche indiquée au Chapitre III et de déterminer les courbes de degré $\varpi + 1$, qui correspondent rationnellement à (1).

Supposons maintenant que p soit égal à 0 ou à 1. Dans le premier cas, l'intégrale est définie par une relation

$$\text{(6)} \qquad G[y, \gamma, (x)] = P_n[\gamma, (x)] y^n + \ldots + P_0[\gamma, (x)] = 0,$$

où les P_i sont de degré m en γ, si m est le degré de F en y' (γ désigne une constante ou une fonction de x qui vérifie une équation de Riccati). Il existe une correspondance birationnelle entre

$$G[y, \gamma, (x)] = 0$$

et

$$F[y, y', (x)] = 0.$$

Remarquons à ce sujet que le genre d'une courbe de degré n en y et m en γ ne peut dépasser un certain nombre, facile à calculer pour m et n donnés. Si le genre p de (1) est supérieur à ce nombre, ϖ ne saurait être nul.

Par exemple, si $m = 2$, $n = 2$, ϖ étant nul, l'équation différentielle qui admet une intégrale de telle nature est nécessairement de genre nul ou égal à 1.

Dans le cas où $\varpi = 1$, on a

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & y^n + \rho_{n-1}(\gamma, x) y^{n-1} + \ldots + \rho_0[\gamma, (x)] \\ & \quad + \sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}\,[r_{n-1}(\gamma, x) y^{n-1} + \ldots + r_0(\gamma, x)] \\ & \qquad = Q[y, \gamma, (x)] + \sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}\, Q_1[y, \gamma, (x)] \end{aligned} \right.$$

et aussi

$$G[y, \gamma, (x)] = P_{2n}y^{2n} + \ldots + P_0 = 0, \tag{8}$$

les P_i étant des polynômes en γ de degré m. Quant à γ, c'est une fonction de x qui vérifie l'équation

$$\frac{d\gamma}{dx} = N(x)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}.$$

Ceci rappelé, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où ϖ serait nul et servons-nous de l'équation (6) à laquelle il faut joindre la condition

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

L'intégrale est susceptible d'être mise sous la forme (6) d'une infinité de façons : toutes les équations (6) se déduisent de l'une d'entre elles par le changement

$$\gamma = \frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1},$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions de x. Nous pouvons disposer de a, b, a_1, b_1 de façon que les coefficients de l'équation (6) satisfassent à trois conditions qui soient caractéristiques d'une équation (6), ou du moins d'un nombre fini de ces équations. Par exemple, nous pouvons astreindre les P_i à ces conditions que leurs trois racines $\gamma_0 = g(x)$, $\gamma_1 = h(x)$, $\gamma_2 = k(x)$, d'ordre de multiplicité le plus élevé, soient égales à 0, 1, 2. On cherche alors à déterminer les coefficients $A(x)$, $B(x)$, ... des P_i, ainsi que M, N, P, de façon que l'équation (6) définisse l'intégrale de (1). On obtient ainsi un certain nombre de relations qui, si elles sont compatibles, sont déterminées, et l'équation (1) se trouve alors ramenée algébriquement à une équation de Riccati.

Quand le genre p de (1) n'est pas nul, on peut simplifier les calculs en tenant compte de la correspondance birationnelle de (1) et (6), correspondance qui est une conséquence des conditions que nous venons d'énoncer. Si nous introduisons les intégrales abéliennes de première espèce relatives aux deux courbes, on doit avoir

$$\frac{P_i[y, \gamma, (x)]}{G'_\gamma} = \frac{\sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j(x)\, P'_j[y, y', (x)]}{F'_{y'}}.$$

Par exemple, si l'équation donnée est de la forme

$$y' = h[y, (x)] + H[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]},$$

l'équation (6) sera de la forme

$$(A_2\gamma^2 + A_1\gamma + A_0)y^n + \ldots + L_2\gamma^2 + L_1\gamma + L_0 = 0,$$

et γ devra s'exprimer rationnellement en y et $\sqrt{R[y, (x)]}$.

Quand le genre p de (1) est nul, on se sert de la transformation birationnelle

$$y = \varphi[t, (x)],$$
$$y' = \psi[t, (x)],$$

pour ramener l'équation à la forme

$$(1') \qquad \frac{dt}{dx} = R[t, (x)],$$

R étant rationnel en t. L'équation (6), relative à l'équation (1'), s'écrit

$$(A_2\gamma + A_0)t^n + (B_1\gamma + B_0)t^{n-1} + \ldots + L_1\gamma + L_0 = 0,$$

ou encore

$$\gamma = -\frac{A_0 t^n + B_0 t^{n-1} + \ldots + L_0}{A_1 t^n + \ldots + L_1}.$$

On peut disposer de la transformation homographique qu'il est loisible de faire subir à γ pour donner à γ la forme

$$\gamma = +\frac{a_0 t^n + b_0 t^{n-1} + \ldots + k_0 t}{t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + \ldots + 1},$$

par exemple. Il faut déterminer les coefficients $a_0, b_0, \ldots, a_1, b_1, \ldots$ et M, N, P de façon qu'en remplaçant γ et t dans l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

celle-ci se transforme en l'équation (1'). Si la chose est possible, elle n'est possible que d'une seule manière.

Remarquons que l'équation (1') n'est pas pleinement déterminée. On peut effectuer sur t une substitution homographique

$$t = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\alpha_1 t_1 + \beta_1}.$$

Cette substitution, jointe au changement de variable $x = \varphi(x_1)$, est la plus générale qui conserve à l'équation (1') sa forme, et aux intégrales y leur nombre de valeurs se permutant autour des points critiques mobiles.

Plus généralement, étant donnée une équation (1) quelconque, on se servira de la transformation birationnelle

$$y = \varphi[t, u, (x)],$$
$$y' = \psi[t, u, (x)],$$

avec

$$t = \varphi_1[y, y', (x)],$$
$$u = \psi_1[y, y', (x)],$$

pour ramener l'équation (1) à la forme la plus simple possible. Par exemple, si l'équation (1) est de l'espèce hyperelliptique, on commence par la ramener à la forme

$$(1'') \qquad y' = h[y, (x)] + k[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]};$$

la transformation homographique

$$y = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\alpha_1 y_1 + \beta_1},$$

jointe au changement de variable $x = \varphi(x_1)$, n'altère pas la forme de l'équation (1''), et c'est encore dans ce cas la transformation la plus générale qui jouisse de cette propriété.

Il nous reste à examiner le cas où ϖ serait égal à 1. On peut employer une méthode calquée sur la méthode générale du § 1, et qui ne donne pas ici de calculs très compliqués.

On part de la relation (7), et l'on écrit que

$$Q^2 - (1 - \gamma^2)(1 - k^2\gamma^2)Q_1^2 \equiv \frac{G[y, \gamma, (x)]}{P_{2n}^2},$$

G étant de degré $2n$ en y.

On obtient ainsi $2n$ relations qui donnent aisément, pour une valeur déterminée de n, une limite supérieure du degré auquel γ figure dans l'équation (7).

Cette équation (7) dépend, comme nous l'avons dit dans le premier

Chapitre, d'une fonction $a(x)$ arbitraire. On peut à γ substituer γ_1 qui lui correspond par la formule

$$\gamma = \frac{\gamma_1\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}+a\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}}{1-k^2a^2\gamma_1^2}.$$

Disposons de cette fonction a de façon à imposer aux coefficients de l'équation (7) une condition qui la caractérise. La méthode est alors la même que plus haut; il faut déterminer les coefficients arbitraires de (7) et N de façon que l'intégrale de (1) soit définie par (7), quand γ satisfait à l'équation

$$\frac{d\gamma}{dx} = \mathrm{N}(x)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}.$$

Au lieu de se servir de l'équation (7), on pouvait employer l'équation (8). On se débarrasse de la fonction arbitraire $a\,(x)$ de la même manière, et l'on cherche à déterminer N et les coefficients de l'équation (8) dont le degré en y et γ est connu de façon que (8) définisse l'intégrale de (1). Quand les relations ainsi obtenues sont compatibles, l'équation (1) se trouve ramenée algébriquement à une quadrature. On pourra tenir compte de ce fait que la courbe (8) correspond à (1) par une transformation rationnelle du second ordre; si p' désigne son genre, on a

$$p' = 1 + \frac{p-1}{2},$$

et ses p' intégrales abéliennes de première espèce se transforment en p' intégrales de la courbe (1).

Mais une méthode au moins aussi simple est la suivante : puisque ϖ est égal à 1, l'intégrale de (1) satisfait, comme on sait, à une relation de la forme

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}(\alpha)}} = \mathrm{J}[y, y', (x)],$$

α désignant une constante, J une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe (1). Nous sommes conduits ainsi à reconnaître si une intégrale abélienne de première espèce de (1) se ramène aux intégrales elliptiques par une transformation d'ordre n, problème classique, qu'on sait résoudre algébriquement de bien des façons. Une fois calculées, les intégrales J qui jouissent de cette propriété, on vérifie si l'une de ces intégrales satisfait à la condition

$$\frac{d\,J(y, y', x)}{dx} = h(x),$$

quand on remplace y' par sa valeur tirée de (1), et, s'il en est ainsi, l'équation s'intègre par une quadrature.

Voici donc, pour des valeurs quelconques de ϖ, des méthodes de recherche de l'intégrale générale de (1) qui ne mèneront pas à des calculs rebutants.

3. D'après ce qui précède, on voit que, pour une équation (1) de degré donné en y et y', le nombre n des valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles ne peut dépasser une certaine limite, sans que le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales soit égal à 0 ou à 1. Pour $\varpi = 0$ et $\varpi = 1$, n peut être aussi grand que l'on veut; les méthodes employées ne fournissent aucun moyen de lui assigner, d'après l'équation donnée, une limite supérieure. C'est là d'ailleurs une difficulté analogue à celle qui se rencontre dans des questions beaucoup plus restreintes (par exemple dans le problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales logarithmiques ou elliptiques), et cette difficulté n'a pas été surmontée jusqu'ici, même dans ces cas particuliers.

Quant aux points critiques fixes, nous n'en avons rien dit jusqu'ici. On peut se proposer de reconnaître si l'intégrale y ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour de ces points fixes. Trois cas sont à distinguer, suivant que l'on a

$$\varpi = 0, \qquad \varpi = 1, \qquad \varpi > 1.$$

Supposons qu'on ait reconnu que l'intégrale prend n valeurs seulement autour des points critiques mobiles, et qu'on veuille l'étudier en tenant compte des points critiques fixes. Si ϖ est plus grand que 1, l'intégrale est donnée algébriquement en fonction des coefficients de (1) : la question est résolue.

Si $\varpi = 1$, il suffit d'étudier la fonction

$$r(x) = \Sigma a_i(x) R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)].$$

Elle vérifie une équation de genre 1, à points critiques fixes, qu'on ramène à la suivante

$$\frac{dt}{dx} = \mathrm{N}(x)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

Pour que $t(x)$ ne prenne que μ valeurs autour des points critiques (fixes), il faut que, $\mathrm{N}(x)$ n'admettant qu'un nombre fini de déterminations, l'intégrale

$$\int \mathrm{N}(x)\,dx$$

n'ait au plus que deux périodes α, β, liées aux périodes ω et ω' de l'intégrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1\ k^2t^2)}}$ par les relations

$$\omega = \frac{m\alpha + m_1\beta}{m_2},$$

$$\omega' = \frac{m'\alpha + m'_1\beta}{m_2};$$

m, m_1, m', m'_1, m_2 sont des entiers.

Enfin, quand $\varpi = 0$, l'équation en r, r' se ramène à une équation de Riccati, par suite à une équation linéaire du second ordre.

Les conclusions de M. Poincaré, relatives aux équations du premier ordre dont l'intégrale générale est uniforme ou a ses points critiques fixes, subsistent donc pour des équations dont l'intégrale générale n'admet que n valeurs dans le plan ou autour des points critiques mobiles. L'intégrale, dans ces différents cas, est liée algébriquement aux coefficients de l'équation, ou en dépend par une quadrature, ou se ramène enfin aux transcendantes qu'introduisent les équations linéaires.

Les équations d'ordre supérieur les plus simples peuvent, au contraire, admettre pour intégrale générale des transcendantes uniformes (ou à n valeurs) essentiellement nouvelles. Les conclusions précédentes s'appliquent seulement aux équations dont l'intégrale y dépend algébriquement des y_0, y'_0, ... Soit, dans cette hypothèse particulière, $\mathrm{F}[y, y_0, y'_0, \ldots, (x)] = 0$ la relation algébrique irréductible qui définit l'intégrale. On ne sait plus déterminer une limite du degré de F en y_0, y'_0, ... La méthode d'intégration développée dans ce Chapitre ne s'étend donc pas aux équations d'ordre supérieur.

(*A suivre.*)