ERNEST VESSIOT

Sur l'intégration des équations différentielles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 197-280
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__197_0>

SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. E. VESSIOT,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON.

INTRODUCTION.

J'expose, dans ce travail, une théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires, qui est entièrement analogue à la célèbre théorie de Galois sur la résolution des équations algébriques. La proposition fondamentale en est la suivante :

A chaque équation linéaire d'ordre n correspond un groupe continu fini de transformations linéaires homogènes à n variables, qui jouit de propriétés semblables à celles du groupe de substitutions d'une équation algébrique.

M. Picard avait établi l'existence de ce groupe, mais sans en énoncer complètement la double propriété [1].

Mon point de départ est l'étude des fonctions rationnelles des intégrales (formant un système fondamental) d'une équation linéaire et des dérivées de ces intégrales. Elle comprend une théorie de la transformation des équations linéaires, analogue à la théorie de la transformation des équations algébriques, et conduit à une proposition qui correspond au théorème de Lagrange sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation algébrique. L'existence du *groupe de transformations* d'une équation linéaire donnée et les propriétés du groupe s'en déduisent. L'intégration de l'équation donnée au moyen d'équations auxiliaires est alors liée à la réduction progressive de son groupe

(1) *Comptes rendus* (1883) et *Annales de Toulouse* (1887).

de transformations. La méthode à laquelle on arrive ainsi est la seule possible, si l'on s'astreint à n'employer comme équations auxiliaires que des équations jouissant de certaines propriétés caractéristiques. Elle donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire soit intégrable par des quadratures, et de là résulte, en particulier, l'impossibilité d'intégrer, au moyen de quadratures, les équations linéaires générales d'ordre supérieur au premier.

La théorie des groupes de transformations, de M. Sophus Lie, sert de fondement à ce travail. C'est d'ailleurs en étudiant sa belle méthode d'intégration des systèmes complets que j'ai été amené à m'occuper des équations linéaires, et les idées générales de l'illustre savant norvégien sur l'intégration des équations différentielles m'ont constamment guidé. Aussi je tiens à lui exprimer ici toute ma reconnaissance pour la bonté avec laquelle il a bien voulu, pendant mon séjour à Leipzig, m'initier à ses théories si fécondes.

Ce travail est divisé en trois Parties. Dans la première, j'expose quelques principes, indispensables pour la suite, sur les groupes de transformations. Ils sont presque tous empruntés à l'Ouvrage de MM. Lie et Engel (¹). La démonstration du théorème du Chapitre I, n° 4, m'appartient, ainsi que les développements du Chapitre II, dont les résultats ne peuvent d'ailleurs être inconnus à M. Lie.

La deuxième Partie contient l'exposition de la théorie générale de l'intégration des équations linéaires, telle que je l'ai esquissée en commençant.

La troisième Partie est consacrée aux applications. Je les ai limitées aux équations du deuxième et du troisième ordre. J'arrive à cette conclusion, qu'il ne peut pas se présenter dans l'intégration de ces équations de particularités intéressantes autres que celles qui ont été déjà signalées, notamment par Laguerre et Halphen.

Devant l'impossibilité d'une bibliographie complète, je me suis borné à citer les Mémoires qui m'ont été utiles. J'ai indiqué en passant, notamment au sujet des équations auxiliaires, quelques lacunes, sur lesquelles je me réserve de revenir.

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen, Unter Mitwirkung* von Dr Engel, bearbeitet von Sophus Lie (Teubner, 1888).

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS ET SUR LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS.

1. *Principes fondamentaux.* — Nous commençons par rappeler quelques propositions, qui sont fondamentales dans la théorie des groupes de transformations, et qui sont d'ailleurs bien connues.

Soient

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

les équations d'un groupe continu fini de transformations. Les fonctions $x'_1, \ldots, x'_n$ des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ et des paramètres (essentiels) $a_1, \ldots, a_r$, définies par ces relations, satisfont à des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\, \xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \tag{2}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui peuvent encore s'écrire

$$\xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r) \quad (^1).$$

Si l'on pose alors

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

(1) Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, I, p. 34.

le groupe peut être considéré comme défini par les r transformations infinitésimales qui ont pour symboles

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_r f;$$

c'est-à-dire que l'ensemble des transformations du groupe se confond avec l'ensemble des transformations de tous les groupes à un paramètre engendrés par les transformations infinitésimales dont le symbole général est

$$Xf = \sum_{k=1}^{r} e_k X_k f,$$

où $e_1, \ldots, e_r$ sont des constantes arbitraires (1).

On peut enfin, pour définir le groupe donné, remplacer les transformations infinitésimales (4) par r combinaisons linéaires de ces transformations, qui soient elles-mêmes linéairement indépendantes.

Inversement, pour que r transformations infinitésimales indépendantes (4) définissent un groupe continu fini de transformations à r paramètres, il faut et il suffit qu'elles satisfassent à des relations de la forme

$$(5) \qquad (X_i, X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les quantités c_{iks} sont des constantes (2).

Ces constantes définissent la *composition* ou la *structure* du groupe (3).

2. *Groupes complexes.* — Outre les groupes que nous venons de considérer, il en est qui ne peuvent pas être définis par un seul système d'équations. Tel est, par exemple, le groupe de toutes les transformations de coordonnées rectangulaires du plan, qui ne peut être représenté que par l'ensemble des deux systèmes d'équations

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha.$$

(1) Sophus Lie, *Transformationsgruppen*, I, p. 75.
(2) *Ibid.*, I, Ch. 9.
(3) *Ibid.*, I, Ch. 17.

Nous appellerons, pour abréger, un tel groupe un groupe *complexe*.

A l'égard de ces groupes M. Lie a obtenu le résultat suivant [1].

Tout groupe complexe est défini par un groupe G, engendré par des transformations infinitésimales, et par un certain nombre de transformations finies $T_1, \ldots, T_{m-1}$, laissant le groupe G invariant [2]; de telle sorte que l'ensemble de ses transformations se compose des m familles de transformations

$$T_0 G, \quad T_1 G, \quad \ldots, \quad T_{m-1} G. \tag{6}$$

T_0 désigne la transformation identique. De plus les transformations T_i doivent vérifier des relations de la forme

$$T_i T_k = T_l S,$$

où S représente une transformation du groupe G, mais aucune relation de la forme

$$T_i = T_k S.$$

Si G a r paramètres, nous dirons aussi que le groupe complexe (6) a r paramètres.

Dans la suite, à moins que le contraire ne soit expressément spécifié, nous ne considérerons que des groupes non complexes, c'est-à-dire engendrés par des transformations infinitésimales.

3. *Invariants différentiels* [3]. — Nous n'aurons à considérer que des invariants différentiels d'une nature très simple. Dans les équations (1), qui définissent un groupe de transformations, nous supposons que $x_1, \ldots, x_n$ sont des fonctions d'une variable indépendante t; $x'_1, \ldots, x'_n$ sont alors d'autres fonctions de cette variable, et leurs dérivées successives, prises jusqu'à l'ordre h par exemple, sont liées à $x_1, \ldots, x_n$ et à leurs dérivées jusqu'à l'ordre h par des relations qui se déduisent, par différentiations, des équations (1), et qui définissent avec elles un

---

(1) SOPHUS LIE, I, Ch. 18.

(2) Nous disons, avec M. Lie, que T laisse le groupe G invariant, si le groupe $T^{-1} GT$ est identique au groupe G.

(3) SOPHUS LIE, *Transformationsgruppen*, I, Chap. 25.

groupe de transformations aux variables

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n; \quad \frac{dx_1}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^h x_1}{dt^h}, \quad \ldots, \quad \frac{d^h x_n}{dt^h}.$$

Tout invariant (absolu) de ce groupe *prolongé* sera dit un invariant différentiel d'ordre h du groupe donné.

Il est alors évident que la dérivée d'un invariant différentiel, prise par rapport à t, est un nouvel invariant différentiel, et c'est là une remarque qui nous sera très utile dans la suite.

Les transformations infinitésimales du groupe (1), prolongé jusqu'aux dérivées d'ordre h, s'obtiennent d'après les règles données par M. Lie et sont

$$X_k^{(h)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial \frac{dx_i}{dt}} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^h}{dt^h} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial \frac{d^h x_i}{dt^h}}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

Les invariants différentiels d'ordre inférieur ou égal à h sont les intégrales du système complet formé de celles des équations

$$X_k^{(h)} f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui sont linéairement indépendantes. Il en résulte que ces invariants différentiels s'expriment en fonction d'un nombre limité d'entre eux, qui constituent un système d'invariants fondamentaux.

4. *Groupes simples et groupes composés* (1). — On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *invariant* dans G si, quelle que soit la transformation T appartenant à G, le groupe $T^{-1}HT$ est identique au groupe H. Si les deux groupes H et G sont définis par leurs transformations infinitésimales, on reconnaît l'invariance de H dans G au moyen du théorème suivant :

Pour que le groupe

(H) $$X_1 \ldots X_m$$

(1) Sophus Lie, *Transformationsgruppen*, I, Chap. 15, 17 et 21.

soit invariant dans le groupe

$$(G) \qquad X_1 \ldots X_m X_{m+1} \ldots X_r,$$

il faut et il suffit qu'il existe des relations de la forme

$$(X_i X_{m+k}) = \sum_{s=1}^{m} \gamma_{iks} X_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, r - m),$$

où les γ_{iks} sont des constantes.

Nous dirons encore que H est un *sous-groupe invariant maximum* de G, s'il est invariant dans G, sans être contenu dans un autre sous-groupe invariant de G.

Un groupe de transformations est *simple* s'il ne contient pas de sous-groupe invariant; dans le cas contraire, il est *composé*.

Étant donné un groupe composé G, on peut trouver au moins une suite de sous-groupes

$$G, \quad H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_{m-1},$$

tels que chacun d'eux soit un sous-groupe invariant maximum du précédent et que le dernier soit simple. C'est ce que nous appellerons une *décomposition normale* du groupe G, et nous nommerons *indices* de cette décomposition les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ définis de la manière suivante ; λ_1 est la différence entre les nombres de paramètres de G et d'un sous-groupe maximum (1) de G contenant H_1 ; λ_2 est de même la différence entre les nombres de paramètres de H_1 et d'un sous-groupe maximum de H_1 contenant H_2, et ainsi de suite; enfin λ_m est la différence entre les nombres de paramètres de H_{m-1} et d'un sous-groupe maximum de H_{m-1}.

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui intervient dans les applications de la théorie des groupes aux questions d'intégration.

THÉORÈME (2). — *Dans toute décomposition normale d'un groupe, les indices sont les mêmes, à l'ordre près.*

---

(1) C'est-à-dire ayant le plus de paramètres possible.

(2) L'énoncé de ce théorème nous a été communiqué par M. Sophus Lie.

Soient en effet deux décompositions normales d'un groupe G

$$\text{(I)} \qquad G H_1 H_2 \ldots H_{m-1},$$
$$\text{(II)} \qquad G K_1 K_2 \ldots K_{p-1};$$

nous pouvons supposer que H_1 et K_1 ne coïncident pas, sans quoi, on démontrerait le théorème pour le dernier des sous-groupes qui serait le même dans les deux suites. Deux cas peuvent donc se présenter :

Premier cas. — H_1 et K_1 n'ont pas de transformation infinitésimale commune; ces deux groupes sont, par exemple,

$$(H_1) \qquad Y_1 Y_2 \ldots Y_k,$$
$$(K_1) \qquad Z_1 Z_2 \ldots Z_l.$$

Les transformations infinitésimales

$$Y_1 Y_2 \ldots Y_k Z_1 Z_2 \ldots Z_l$$

définissent un groupe qui est invariant dans G; il se confond donc avec G puisqu'il contient H_1, par exemple.

De plus, H_1 (et de même K_1) est simple, car, s'il contenait un sous-groupe invariant $Y_1, \ldots, Y_{k'}$, les transformations

$$Z_1 \ldots Z_l Y_1 \ldots Y_{k'}$$

définiraient un sous-groupe invariant de G contenant K_1, ce qui ne peut être. Soient alors

$$Y_1 \ldots Y_{k'}, \quad Z_1 \ldots Z_{l'}$$

deux sous-groupes maximum de H_1 et de K_1 ; on voit facilement que

$$Y_1 \ldots Y_{k'} Z_1 \ldots Z_{l'}, \quad Z_1 \ldots Z_l Y_1 \ldots Y_{k'}$$

sont : le premier, un sous-groupe maximum de G contenant H_1, et, le second, un sous-groupe maximum de G contenant K_1. Donc les indices de composition sont, pour la suite (I),

$$l - l', \quad k - k',$$

et, pour la suite (II),

$$k - k', \quad l - l';$$

le théorème est donc vrai.

Deuxième cas. — H_1 et K_1 ont, en commun, un certain nombre de transformations infinitésimales, formant un groupe L,

$$(L) \qquad X_1 X_2 \ldots X_h.$$

Les transformations infinitésimales de H_1 et de K_1 sont alors respectivement

$$(H_1) \qquad X_1 X_2 \ldots X_h Y_1 Y_2 \ldots Y_k,$$
$$(K_1) \qquad X_1 X_2 \ldots X_h Z_1 Z_2 \ldots Z_l.$$

L'ensemble des transformations

$$X_1 \ldots X_h Y_1 \ldots Y_k Z_1 \ldots Z_l$$

constitue un groupe qui est invariant dans G et se confond par suite avec lui. De plus, L est un sous-groupe invariant de H_1 et de K_1, et même de G ; car tout crochet (X_i, Y_j) doit être fonction linéaire des X et des Y, puisque ceux-ci forment un groupe H_1, et fonction linéaire des X et des Z, puisque K_1 est invariant dans G ; il est donc fonction linéaire des X seuls ; et de même pour les crochets (X_i, Z_j). Enfin, L est un sous-groupe invariant maximum de H_1 (et aussi de K_1) ; car si

$$X_1 \ldots X_k Y_1 \ldots Y_{k'}$$

était un sous-groupe invariant de H_1,

$$X_1 \ldots X_h Z_1 \ldots Z_l Y_1 \ldots Y_{k'}$$

serait un sous-groupe invariant de G contenant K_1, ce qui est impossible.

Si donc on effectue une décomposition normale de L

$$L L_1 \ldots L_{q-1},$$

on en déduira deux décompositions normales nouvelles de G, à savoir

$$(I') \qquad G H_1 L L_1 \ldots L_{q-1},$$
$$(II') \qquad G K_1 L L_1 \ldots L_{q-1}.$$

Je dis que ces deux suites ont les mêmes indices de composition. En effet, un raisonnement facile montre que si

$$X_1 \ldots X_h Y_1 \ldots Y_{k'}, \quad X_1 \ldots X_h Z_1 \ldots Z_{l'}$$

sont des sous-groupes maximum de H_1 et de K_1 contenant L,

$$X_1 \dots X_h Y_1 \dots Y_k Z_1 \dots Z_{l'}$$

est un sous-groupe maximum de G contenant H_1, et

$$X_1 \dots X_h Z_1 \dots Z_l Y_1 \dots Y_{k'}$$

un sous-groupe maximum de G contenant K_1; de sorte que les indices des deux suites (I′) et (II′) sont respectivement

$$l - l', \quad k - k', \quad \dots \qquad \text{et} \qquad k - k', \quad l - l', \quad \dots,$$

c'est-à-dire les mêmes.

On est donc conduit à démontrer le théorème pour les suites (I) et (I′), (II) et (II′); c'est-à-dire pour les groupes H_1 et K_1. En leur appliquant le raisonnement fait pour G et en continuant ainsi de proche en proche, on finira par retomber sur le premier cas. Le théorème est donc démontré.

5. *Groupes intégrables* (¹). — Parmi les groupes composés, il en est qui jouent un rôle spécial dans les questions d'intégration. Ce sont ceux que M. Lie a nommé les *groupes intégrables*.

Un groupe de transformations est dit *intégrable* s'il contient un sous-groupe invariant ayant un paramètre de moins que lui, celui-ci de même, et ainsi de suite.

On voit que les indices de composition d'un groupe intégrable sont tous égaux à l'unité, mais cette propriété ne leur est pas particulière.

Nous n'indiquerons ici, sur les groupes intégrables, que le remarquable théorème suivant, dû à M. Engel (²).

Théorème. — *Pour qu'un groupe soit intégrable, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun sous-groupe à trois paramètres ayant la structure du groupe projectif général à une variable.*

(¹) S. Lie, *Transformationsgruppen*, I, p. 265.

(²) *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*. (1 August 1887.)

CHAPITRE II.

SUR LES FONCTIONS QU'ON DÉDUIT D'UNE FONCTION DONNÉE, EN Y EFFECTUANT TOUTES LES TRANSFORMATIONS D'UN GROUPE.

1. Lemme. — *Pour qu'une fonction* $H(a_1, \ldots, a_r)$ *des paramètres* $a_1, \ldots, a_r$ *dépende exactement de* $r-\rho$ *paramètres essentiels, il faut et il suffit que* H *soit intégrale d'un système complet de* ρ *équations linéaires indépendantes aux dérivées partielles, dont les coefficients soient des fonctions de* $a_1, \ldots, a_r$.

1° D'abord, si l'on a

$$H(a_1, \ldots, a_r) = K(b_1, \ldots, b_{r-\rho}),$$

les b étant certaines fonctions des a, on en déduit

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = \frac{\partial K}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial K}{\partial b_{r-\rho}}\frac{\partial b_{r-\rho}}{\partial a_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

D'où l'on peut tirer au moins ρ relations distinctes de la forme

$$(1) \qquad \lambda_{h1}(a)\frac{\partial H}{\partial a_1} + \ldots + \lambda_{hr}(a)\frac{\partial H}{\partial a_r} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \rho).$$

2° D'autre part, si H vérifie ρ relations telles que (1), H est intégrale du système complet de $m \geqq \rho$ équations qui peut s'en déduire; il dépend donc seulement de $r - m \leqq r - \rho$ fonctions des a et contient, au plus, $r-\rho$ paramètres essentiels.

Si donc H dépend exactement de $r-\rho$ paramètres essentiels, il faut que les équations (1) forment déjà un système complet et que H ne vérifie pas d'autre équation de la même forme, indépendante des premières. Et cela suffit.

2. *Théorème fondamental.* — Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction quelconque des arbitraires $x_1, \ldots, x_n$. Si nous y effectuons la transformation générale

$$(2) \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d'un groupe à r paramètres, nous obtenons une fonction

$$F(x'_1, \ldots, x'_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_r) \tag{3}$$

des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ et des paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Cela posé, *pour que* Φ *dépende exactement de* $r - \rho$ *paramètres essentiels, il faut et il suffit que* F *admette précisément* ρ *transformations infinitésimales indépendantes du groupe, c'est-à-dire admette un sous-groupe à* ρ *paramètres du groupe donné.*

Ce théorème résulte des deux remarques suivantes :

1° Si Φ dépend de $r - \rho$ paramètres essentiels, F admet au moins ρ transformations infinitésimales du groupe. En effet, on a, dans ce cas, en vertu du lemme précédent, ρ relations distinctes

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{hk}(a) \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \rho). \tag{4}$$

D'autre part, de l'identité (3), on tire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

et par suite, en se servant des formules (2) du Chapitre I,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x'_i} \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) X'_j F.$$

Les relations (4) deviennent alors

$$\sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{r} \lambda_{hk}(a)\, \psi_{jk}(a) \right] X'_j F = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \rho). \tag{5}$$

Enfin, en donnant aux a des valeurs particulières et remplaçant les lettres x'_i par les lettres x_i, on en tire ρ relations de la forme

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj} X_j F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \rho), \tag{6}$$

ce qui prouve que F admet les ρ transformations infinitésimales

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj} X_j \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho). \tag{7}$$

Ces transformations sont, de plus, indépendantes; car si l'on avait, quels que soient les a, une identité de la forme

$$\sum_{k=1}^{\rho} \gamma_h \sum_{h=1}^{r} \lambda_{hk} \psi_{jk} = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, r),$$

on en conclurait, puisque le déterminant des ψ_{jk} n'est pas nul identiquement,

$$\sum_{h=1}^{\rho} \gamma_h \lambda_{hk} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r),$$

ce qui est impossible, les relations (4) étant distinctes.

2° Si F admet ρ transformations infinitésimales du groupe, Φ contient au plus $r-\rho$ paramètres essentiels. En effet, supposons que F admette les ρ transformations infinitésimales indépendantes (7). On a alors les identités (6), et par suite, en changeant de lettres,

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj} X'_j F(x'_1, \ldots, x'_n) = 0 \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj} \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0 \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho),$$

ou, à cause des relations (3) du Chapitre I,

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x'_i} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0,$$

ou enfin, en tenant compte de l'identité (3),

$$\sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{r} e_{hj}\alpha_{jk}(a)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial a_k}=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho). \tag{8}$$

Ces ρ relations sont, de plus, indépendantes; car, si elles ne l'étaient pas, les transformations infinitésimales (7) ne le seraient pas non plus, puisque le déterminant des α_{jk} n'est pas nul. Il en résulte donc, en vertu de notre lemme, que Φ dépend au plus de $r-\rho$ paramètres essentiels.

3. *Remarque I.* — Posons, avec M. Lie,

$$A_j f=\sum_{k=1}^{r}\alpha_{jk}(a)\frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (j=1, 2, \ldots, r);$$

les relations (8) s'écrivent alors

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj}A_j\Phi=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho),$$

de sorte qu'on a le résultat suivant :

Si la fonction F admet les ρ transformations infinitésimales (7) du groupe donné, la fonction Φ qui s'en déduit, considérée comme fonction des a, admet les ρ transformations infinitésimales correspondantes

$$\sum_{j=1}^{r} e_{hj}A_j \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho) \tag{9}$$

du groupe des paramètres (¹) du groupe donné. De plus, les transformations (7) et (9) définissent deux groupes isomorphes.

Ce résultat est, du reste, intuitif. Supposons, en effet, que F admette la transformation du groupe (2) qui correspond aux valeurs $b_1, \ldots, b_r$ des paramètres, de sorte que, en posant

$$x''_i=f_i(x'\,|\,b) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

(¹) S. Lie, *Transformationsgruppen*, I, Ch. 21.

on aura

$$F(x''_1, \ldots, x''_n) = F(x'_1, \ldots, x'_n); \tag{11}$$

on peut écrire

$$x''_i = f_i(x \mid a') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec [1]

$$a'_k = \varphi_k(a_1, \ldots, a_r \mid b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{12}$$

et l'identité (3) donne alors, à cause de (11),

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n \mid a'_1, \ldots, a'_r) = \Phi(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_r),$$

c'est-à-dire que Φ, comme fonction des a, admet la transformation (12) du groupe des paramètres, correspondante à la transformation (10) du groupe proposé.

Remarque II. — Supposons que l'on donne aux paramètres $a_1, \ldots, a_r$ des valeurs particulières, et cherchons les transformations infinitésimales du groupe (2) que la fonction $\Phi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$ admet. Il suffit, pour cela, de se servir de l'identité [2]

$$\sum_{k=1}^{r} e_k X_k \Phi(x \mid a) = \sum_{k=1}^{r} e'_k X'_k F(x'),$$

où les constantes e et e' sont liées par les formules

$$e'_k = \sum_{j=1}^{r} \rho_{kj}(a_1, \ldots, a_r) e_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{13}$$

Elle montre qu'à chaque transformation infinitésimale $\sum e_k X_k$ de F en correspond une autre pour Φ, $\sum e'_k X_k$, où les e' sont donnés par les formules

$$e_k = \sum_{j=1}^{r} \rho_{kj}(a) e'_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{14}$$

---

[1] Cela résulte de la notion même de *groupe*. La notation employée est celle de M. Lie (voir *Transformationsgruppen*, I, Ch. 1 et 21).

[2] S. Lie, *Transofrmationsgruppen*, I, Ch. 16, p. 270 et suiv.).

c'est-à-dire se déduisent des e par la transformation inverse de la transformation du *groupe adjoint* qui a pour paramètres $a_1, \ldots, a_r$.

Il en résulte que, pour chaque système de valeurs des a, la fonction Φ admet toujours un sous-groupe du groupe donné ayant le même nombre de paramètres, et aussi que tous ces groupes sont isomorphes.

Désignons enfin par G le groupe formé par les transformations (2) qui laissent F invariante, et par T la transformation particulière (2). Il est clair que le sous-groupe des transformations du groupe donné que Φ admet est $T^{-1}GT$. Ceci donne une interprétation intéressante du groupe adjoint, et montre de plus que, si les sous-groupes qui laissent invariantes les diverses fonctions Φ (correspondantes aux diverses valeurs des paramètres a) ont en commun un sous-groupe, ce sous-groupe est le plus grand sous-groupe de G invariant dans le groupe proposé.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE I.

FONCTIONS INVARIANTES DES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE.

1. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n \tag{1}$$

n fonctions indéterminées d'une variable t; on peut toujours les considérer comme un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire

$$f(x) = \frac{d^n x}{dt^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{dx}{dt} + \lambda_n x = 0, \tag{2}$$

dont les coefficients ont pour expressions

$$\lambda_k = -\frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

avec

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & \dfrac{dx_1}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} \\ x_2 & \dfrac{dx_2}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x_n & \dfrac{dx_n}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} x_1 & \dfrac{dx_1}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{n-k-1}x_1}{dt^{n-k-1}} & \dfrac{d^n x_1}{dt^n} & \dfrac{d^{n-k+1}x_1}{dt^{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x_n & \dfrac{dx_n}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{n-k-1}x_n}{dt^{n-k-1}} & \dfrac{d^n x_n}{dt^n} & \dfrac{d^{n-k+1}x_n}{dt^{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

A l'égard de cette équation, le groupe linéaire homogène général à n indéterminées

$$(4) \qquad \overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

joue le même rôle que le groupe des substitutions de n lettres dans la théorie des équations algébriques de degré n.

Nous considérons dans ce qui suit des fonctions rationnelles de $x_1, \ldots, x_n$, de leurs dérivées successives prises par rapport à t, et de la variable t. C'est ce que nous appellerons, pour abréger, des *fonctions rationnelles des intégrales* $x_1, \ldots, x_n$ de l'équation (2); et nous représenterons une telle fonction simplement par la notation

$$R(x_1, \ldots, x_n).$$

Parmi ces fonctions nous nommerons *fonctions invariantes* celles qui admettent toutes les transformations du groupe (4). Elles jouent ici le rôle des fonctions symétriques des racines dans la théorie des équations algébriques.

2. *Fonctions invariantes.* — Les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation (2) sont des fonctions invariantes de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées; cela résulte de leurs expressions. De plus ces fonctions sont indépendantes, puisqu'on peut prendre pour ces quantités des fonctions arbitraires de t, et choisir pour $x_1, \ldots, x_n$ un système fonda-

mental d'intégrales de l'équation (2) ainsi formée. Pour la même raison, il ne peut exister aucune relation identique (par rapport aux x et à leurs dérivées) entre les fonctions λ et leurs dérivées par rapport à t, prises jusqu'à un ordre quelconque. Ces dérivées sont d'ailleurs elles-mêmes des fonctions invariantes (I, Ch. I, § 3).

Il n'existe pas au fond de fonctions invariantes autres que les précédentes, comme le montre le théorème suivant, dû à M. Appell [1].

Théorème. — *Toute fonction rationnelle invariante de $x, \ldots, x_n$ s'exprime rationnellement au moyen de t, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et de leurs dérivées.*

Notre démonstration est analogue à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques. Elle repose sur deux remarques.

Remarque I. — Soit $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$. Nous pouvons y faire disparaître les dérivées des x d'ordre égal ou supérieur à n, en nous servant des identités

$$\frac{d^n x_i}{dt^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_n x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et de celles qu'on en déduit par différentiations successives. Nous obtenons ainsi une expression

$$R(x_1, \ldots, x_n) = R_1\left(x_1, \ldots, x_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \frac{d\lambda_1}{dt}, \ldots\right).$$

Cela posé, si R admet la transformation

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a, puisque les λ et leurs dérivées sont des invariants,

$$R_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \mid \lambda_1, \ldots) = R_1(x_1, \ldots, x_n \mid \lambda_1, \ldots).$$

De plus, cette relation doit être une identité par rapport aux x et aux λ, sans quoi elle établirait une relation non identique entre les λ, leurs dérivées, et $x_1, \ldots, x_n$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. Or cette

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1881.

relation, considérée comme une équation différentielle en x_1 par exemple, admettrait toutes les intégrales de l'équation (2), ce qui est impossible, puisqu'elle est d'ordre $n-1$ seulement.

Il résulte de là que R_1 admet exactement les mêmes transformations du groupe (4), qu'on y considère les λ et leurs dérivées comme des fonctions des intégrales, ou comme des quantités indépendantes de x. Nous pourrons donc toujours supposer dans la suite que les fonctions rationnelles des intégrales à considérer ne contiennent pas de dérivées d'ordre supérieur à $n-1$.

Remarque II. — Il n'existe pas de fonctions invariantes d'ordre inférieur à n, si ce n'est des fonctions indépendantes des x et de leurs dérivées. En effet, une telle fonction devrait vérifier (I, Chap. I, § 3) les n^2 équations à n^2 variables

$$x_i\frac{\partial f}{\partial x_k}+\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial\frac{dx_k}{dt}}+\ldots+\frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial\frac{d^{n-1}x_k}{dt^{n-1}}}=0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

ce qui est impossible, ces équations étant indépendantes.

Cela posé, soit $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction invariante quelconque. Faisons-y disparaître les dérivées d'ordre égal ou supérieur à n, et soit $R_1(x|\lambda)$ la fonction obtenue. En vertu de la Remarque I, c'est une fonction invariante, les λ y étant regardés comme des quantités indépendantes des x; donc, en vertu de la Remarque II, comme elle ne contient plus les x explicitement que par leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n-1$, elle en est entièrement indépendante. C'est donc l'expression annoncée pour la fonction R.

CHAPITRE II.

TRANSFORMÉES D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE.

1. *Groupe d'une fonction rationnelle des intégrales.* — Soit $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$. Les transformations du groupe (4) qu'elle admet forment elles-mêmes un sous-groupe, que nous nom-

mons le *groupe de la fonction* R. Ce groupe peut se réduire à la seule transformation identique.

On obtient les transformations de ce groupe en écrivant que la relation

$$\mathrm{R}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n)$$

est une identité. Cela fournit un certain nombre de relations algébriques et entières entre les constantes a, d'où l'on devra tirer leur expression en fonction d'un certain nombre de paramètres. Les équations du groupe dépendent donc algébriquement des paramètres qui y figurent, c'est-à-dire que le groupe est un groupe algébrique Γ.

Les transformations infinitésimales de ce groupe peuvent s'obtenir directement; on écrit que la relation

$$\sum_{ik} e_{ik} \left(x_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_k} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \frac{dx_k}{dt}} + \ldots \right) = 0$$

est identique, ce qui donne des relations linéaires et homogènes entre les e, d'où l'on tire un certain nombre d'entre eux en fonction linéaire et homogène des autres, qui restent arbitraires. En portant ces valeurs dans l'expression

$$\sum_{ik} e_{ik} x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on a la transformation infinitésimale générale du groupe. Les coefficients des constantes arbitraires sont les transformations infinitésimales cherchées; elles engendrent un groupe G.

Si le groupe T peut être défini par un seul système d'équations, il se confond avec G. Dans le cas contraire, c'est un groupe complexe. (*Voir* I, Chap. I, § 2.)

Exemple I. — Soient $n = 2$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{x_1}\left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} \right).$$

On trouve, pour le groupe de R,

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} \overline{x_1} = a x_1, \\ \overline{x_2} = b x_1 + x_2, \end{cases}$$

et, pour le groupe des transformations infinitésimales,

$$(G) \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2};$$

Γ se confond avec G.

Exemple II. — Soit $n = 2$,

$$R = \left[\frac{1}{x_1}\left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}\right)\right]^2.$$

On trouve pour Γ

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} \overline{x_1} = a x_1, \\ \overline{x_2} = b x_1 \pm x_2, \end{cases}$$

et, pour G, le même groupe que précédemment. Γ est donc un groupe complexe, et, si l'on désigne par T la transformation

$$(T) \qquad \begin{cases} \overline{x_1} = \quad x_1, \\ \overline{x_2} = -x_2, \end{cases}$$

Γ s'écrit symboliquement G, GT.

2. *Transformées d'une équation linéaire.* — Soit toujours $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle des intégrales, et soit $\rho = n^2 - s$ le nombre de paramètres de son groupe, c'est-à-dire le nombre des transformations infinitésimales linéaires homogènes distinctes qu'elle admet. Je dis que R, considérée comme fonction de t, est intégrale d'une équation différentielle algébrique d'ordre s, à coefficients rationnels en t, en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et leurs dérivées. Nous appelons cette équation une *transformée* de l'équation linéaire $f(x) = 0$.

Voici, en effet, un premier procédé pour obtenir cette transformée, rappelant l'emploi des fonctions symétriques dans la transformation des équations algébriques. Posons

$$(5) \qquad V = R(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = R(\Sigma a_{1,i} x_i, \ldots, \Sigma a_{n,i} x_i);$$

c'est ce que nous nommerons la *valeur générale* de R. Elle dépend, d'après notre théorème fondamental (I, Chap. II, n° 2), exactement de s paramètres essentiels. Or, toute équation de la forme annoncée, ayant pour coefficients des invariants du groupe (4), admettra pour intégrales toutes les fonctions (5), si elle admet R ; elle ne peut donc être d'ordre inférieur à s.

D'autre part, puisque V dépend seulement de s paramètres essentiels, on peut éliminer tous les paramètres que cette fonction renferme entre l'équation (5) et celles qu'on en déduit en différentiant s fois. Le résultat est une équation différentielle algébrique en V, d'ordre s au plus, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x_1, \ldots, x_n$. Or, si l'on effectue dans le second membre de (5) une transformation linéaire homogène quelconque

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} X_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on pourra, par un changement de paramètres, l'écrire sous une forme analogue

$$V = R(\Sigma A_{1,i} X_i, \ldots, \Sigma A_{n,i} X_i),$$

et un calcul identique au précédent conduira par suite à une équation admettant les mêmes intégrales que la précédente, et qui n'en différera qu'en ce que, dans les expressions des coefficients, les x seront remplacés par les X. Cette équation sera donc identique à la première, dont les coefficients, si l'on en réduit un à l'unité, sont, par conséquent, des fonctions invariantes des x, et peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de t, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et de leurs dérivées. Ce dernier calcul étant fait, on a la transformée annoncée, et qui sera, d'après ce qui précède, exactement d'ordre s.

3. Une autre méthode de calcul, qui correspond au procédé par élimination employé pour la transformation des équations algébriques, va nous permettre de préciser la nature des intégrales de la transformée. Nous montrerons en effet que ces intégrales sont précisément toutes les fonctions que l'on déduit de R en y remplaçant les x par n autres intégrales de l'équation linéaire donnée, formant ou non un système fondamental; ce qui revient à dire que toutes ces intégrales sont comprises dans la formule (5), où les constantes a peuvent recevoir toutes les valeurs. Si ces valeurs sont telles que le déterminant

$\Sigma(\pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn})$ soit nul, on a des intégrales en quelque sorte singulières, ou mieux *non fondamentales*.

Supposons qu'on ait fait disparaître de R les dérivées d'ordre égal ou supérieur à n. D'autre part, posons, pour abréger,

$$\mathrm{DF}\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}; \ldots; x_n, \frac{dx_n}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}}; t\right)$$
$$= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} + \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \frac{dx_i}{dt}} + \ldots + \frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \frac{d^{n-2}x_i}{dt^{n-2}}} \right.$$
$$\left. - \left(\lambda_1 \frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_n x_i\right) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}} \right].$$

Soit enfin

$$\mathrm{DR} = \mathrm{R}_1, \quad \mathrm{DR}_1 = \mathrm{R}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{DR}_{s-1} = \mathrm{R}_s.$$

Entre les s équations

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{R}_1, \quad \ldots, \quad \frac{d^s\mathrm{V}}{dt^s} = \mathrm{R}_s, \tag{6}$$

on doit pouvoir éliminer

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \frac{dx_1}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}}.$$

En effet, R admettant $\rho = n^2 - s$ transformations infinitésimales du groupe linéaire homogène est intégrale du système complet de ρ équations à n^2 variables indépendantes obtenu en égalant à zéro ces transformations prolongées jusqu'à l'ordre $n - 1$; et il en est de même de $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_s$, qui ne sont autre chose que les dérivées de R, d'où l'on a fait disparaître les dérivées d'ordre supérieur ([1]). Donc $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_s$ sont $s + 1$ fonctions de s intégrales indépendantes de ce système complet, d'où résulte la possibilité de l'élimination.

Cette élimination fournit une relation algébrique

$$\Phi\left(\mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dt}, \ldots, \frac{d^s\mathrm{V}}{dt^s}\right) = 0, \tag{7}$$

([1]) *Voir* I, Ch. I, n° 3 et II, Ch. I, n° 2, *Rem. I.*

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de leurs dérivées successives, et de t. Comme dans le calcul précédent, on s'est servi uniquement de ce que $x_1, \ldots, x_n$ sont des intégrales de l'équation linéaire; l'équation obtenue admet bien pour intégrales toutes les fonctions annoncées. Pour la même raison, l'élimination doit être impossible, tant qu'on ne pousse pas les différentiations jusqu'à l'ordre s, car une équation différentielle d'ordre inférieur à s ne peut pas admettre une intégrale contenant s paramètres arbitraires essentiels.

Remarquons enfin qu'on peut supposer Φ irréductible, au sens algébrique; car, s'il ne l'était pas, un de ses facteurs irréductibles égalé à zéro donnerait une équation admettant pour intégrale $R(x_1, \ldots, x_n)$; ses coefficients étant des invariants, cette équation admettrait pour intégrales toutes les fonctions (5); elle pourrait donc remplacer l'équation (7).

Je dis maintenant que cette équation n'admet pas d'autre intégrale que les intégrales annoncées. Pour le démontrer, nous remplaçons dans $R, R_1, \ldots, R_s$ les quantités $\frac{dx_i}{dt}$ par x'_i, $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ par x''_i, etc.; soient $P, P_1, \ldots, P_s$ les fonctions ainsi obtenues. Soit de plus V une intégrale quelconque de l'équation (7); les équations

$$(8) \qquad V = P, \qquad \frac{dV}{dt} = P_1, \quad \ldots, \quad \frac{d^sV}{dt^s} = P_s$$

sont alors compatibles, ou mieux, tout système de valeurs des x_i, $x'_i, \ldots, x_i^{(n-1)}$, qui vérifie les s premières, vérifie la dernière. Considérons l'un de ces systèmes : les $x_i, x'_i, \ldots, x_i^{(n-1)}$ y sont des fonctions de t dont les dérivées satisfont aux identités

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{dx'_i}{dt} \frac{\partial P}{\partial x'_i} + \ldots + \frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} \frac{\partial P}{\partial x_i^{(n-1)}} \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^sV}{dt^s} = \frac{\partial P_{s-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial x_i} + \frac{dx'_i}{dt} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial x'_i} + \ldots + \frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial x_i^{(n-1)}} \right),$$

et, par suite, à cause des identités (8), aux relations

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{dx_i}{dt} - x'_i \right) \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i} + \ldots + \left(\frac{dx_i^{(n-2)}}{dt} - x_i^{(n-1)} \right) \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i^{(n-2)}} \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \left(\frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} + \lambda_1 x_i^{(n-1)} + \ldots + \lambda_n x_i \right) \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i^{(n-1)}} \right], \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{dx_i}{dt} - x'_i \right) \frac{\partial \mathrm{P}_{s-1}}{\partial x_i} + \ldots + \left(\frac{dx_i^{(n-2)}}{dt} - x_i^{(n-1)} \right) \frac{\partial \mathrm{P}_{s-1}}{\partial x_i^{(n-1)}} \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \left(\frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} + \lambda_1 x_i^{(n-1)} + \ldots + \lambda_n x_i \right) \frac{\partial \mathrm{P}_{s-1}}{\partial x_i^{(n-1)}} \right].
\end{aligned}
\right.
$$

Ces relations sont linéaires et homogènes par rapport aux quantités

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{dx_i^{(k-1)}}{dt} - x_i^{(k)}, \quad \frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} + \lambda_1 x_i^{(n-1)} + \ldots + \lambda_n x_i \\
& \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n-1),
\end{aligned}
\right.
$$

qui sont au nombre de n^2. De plus, l'un au moins des déterminants de degré s du tableau de leurs coefficients n'est pas identiquement nul; considérons ce déterminant et annulons toutes les quantités (10) (en nombre $n^2 - s$) dont il ne contient pas de coefficients. Les équations obtenues, jointes aux s premières équations (8) forment n^2 équations en x, x'_i, ..., $x_i^{(n-1)}$; ...; x_n, x'_n, ..., $x_n^{(n-1)}$ qui admettent toujours des solutions; car les inconnues qu'on pourra tirer des équations (8) sont précisément celles qui ne figurent pas sous le signe de différentiation dans les autres équations.

Mais alors les identités (9) expriment que les autres quantités (10) sont nulles aussi, c'est-à-dire que les fonctions de t que nous venons de définir sont n intégrales de l'équation linéaire et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. V est donc bien de la forme annoncée.

Remarque. — Les valeurs initiales des inconnues qui ne correspondent pas aux colonnes du déterminant considéré demeurent arbitraires. Notre raisonnement n'est donc en défaut que si toute solution des s premières équations (8) annule tous les déterminants du tableau des dérivées partielles de P, P_1, ..., P_{s-1}. Or cela est impossible si V dépend de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, car alors les valeurs numériques de V et de ses dérivées, pour une valeur particulière de t, sont arbitraires, les λ étant des fonctions indéterminées ; de sorte que cela reviendrait à admettre que ces déterminants sont nuls identiquement, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il reste donc à prouver que l'équation (7) ne peut pas admettre, quels que soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, une même fonction de t pour intégrale. Posons à cet effet

$$V + u\lambda_1 = W,$$

u étant une fonction indéterminée. W satisfait à l'équation d'ordre s, qui se déduit de (7), et que nous écrivons pour abréger

$$\Phi(W - u\lambda_1) = 0; \tag{11}$$

et aussi à une autre équation du même ordre

$$\Psi(W) = 0, \tag{12}$$

que l'on peut former directement. Φ et Ψ étant, comme polynômes en $W, \frac{dW}{dt}, \ldots$, supposés irréductibles, on a

$$\Psi(W) = K\,\Phi(W - u\lambda_1),$$

K étant seulement une fonction de t. Or l'équation (11) ne peut admettre d'intégrale indépendante de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, telle que $\theta(t, u)$, car alors l'équation (7) admettrait une intégrale de la forme

$$-u\lambda_1 + \theta(t, u),$$

laquelle ne pourrait être indépendante de u. Donc l'équation (12) n'admet pour intégrales que les diverses valeurs de W, et par suite l'équation (7) n'admet pour intégrales que les diverses valeurs de $V = W - u\lambda_1$, et par conséquent aucune intégrale ne dépendant pas de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

CHAPITRE III.

EXPRESSION DES FONCTIONS RATIONNELLES DES INTÉGRALES LES UNES AU MOYEN DES AUTRES.

1. *La résolvante générale*. — Soit $V = R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle dont toutes les valeurs soient différentes ; les équations (8) du Chapitre précédent n'ont alors en $x_1, \ldots, x_n;\ x'_1, \ldots, x'_n;\ \ldots;\ x_1^{(n-1)}, \ldots, x_n^{(n-1)}$ qu'une solution, et les valeurs des inconnues s'expriment rationnellement au moyen de V, $\frac{dV}{dt}, \ldots,$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de leurs dérivées, et de t. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si une fonction rationnelle des intégrales $x_1, \ldots, x_n$ d'une équation linéaire d'ordre n n'admet aucune transformation linéaire homogène en $x_1, \ldots, x_n$, ces intégrales s'expriment rationnellement au moyen de cette fonction, des coefficients de l'équation, de leurs dérivées et de la variable indépendante t.*

Telle est la fonction

$$V = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n,$$

où les u sont des fonctions indéterminées de t. Elle dépend d'une équation linéaire d'ordre n^2, qui est analogue à la résolvante générale de Galois pour les équations algébriques (¹). Les expressions de $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de V et de ses dérivées s'obtiennent ici en résolvant des équations du premier degré.

2. Théorème. — *Si la fonction rationnelle $S(x_1, \ldots, x_n)$ admet toutes les transformations linéaires homogènes qui constituent le groupe de la fonction rationnelle $R(x_1, \ldots, x_n)$, elle s'exprime rationnellement au moyen de R, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de leurs dérivées et de t.*

(¹) C'est, à une légère modification près, l'équation qui a servi de point de départ aux recherches de M. Picard sur notre sujet.

Soit, en effet,

$$\Phi(S) = 0$$

l'équation différentielle dont dépend S; et posons

$$V = u R(x_1^0, \ldots, x_n^0) + S(x_1, \ldots, x_n),$$

u étant une fonction indéterminée et $x_1^0, \ldots, x_n^0$ un système d'intégrales de l'équation linéaire. V est donné par l'équation

$$(1) \qquad \Phi[V - u R(x_1^0, \ldots, x_n^0)] = 0.$$

Posons, d'autre part,

$$V = u R(x_1, \ldots, x_n) + S(x_1, \ldots, x_n);$$

alors V dépend d'une autre équation que l'on peut former directement, soit

$$(2) \qquad \Psi(V) = 0.$$

Cherchons les intégrales communes aux équations (1) et (2) : elles correspondent aux systèmes $x_1, \ldots, x_n$, $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$, tels que l'on ait

$$u R(x_1^0, \ldots, x_n^0) + S(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = u R(x_1, \ldots, x_n) + S(x_1, \ldots, x_n),$$

c'est-à-dire

$$R(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad \text{et} \quad S(x_1, \ldots, x_n) = S(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}).$$

Or, par hypothèse, si l'on a

$$R(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

on a aussi

$$S(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

de sorte qu'il n'y a qu'une intégrale commune, qui est

$$V_0 = u R(x_1^0, \ldots, x_n^0) + S(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Elle est donc fournie par une équation algébrique de la forme

$$\theta\left(V_0; R_0, \frac{dR_0}{dt}, \ldots; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \frac{d\lambda_1}{dt}, \ldots; u, \frac{du}{dt}, \ldots; t\right) = 0.$$

De plus cette équation doit être du premier degré en V_0, car V_0 est uniforme en même temps que $x_1, \ldots, x_n$ et u, et les équations (1) et (2) n'ont pas d'autre intégrale commune que cette fonction uniforme; elle peut donc s'écrire

$$V_0 = F\left(R_0, \frac{dR_0}{dt}, \cdots\right),$$

F étant une fonction rationnelle; et l'on en conclut

$$S = -uR + F\left(R, \frac{dR}{dt}, \cdots\right),$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Le théorème précédent correspond au théorème de Lagrange sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation algébrique.

COROLLAIRE. — *Si* $S(x_1, \ldots, x_n)$ *admet toutes les transformations communes aux groupes des fonctions* $R_1, R_2, \ldots, R_p$, *elle s'exprime rationnellement au moyen de ces fonctions, des coefficients de l'équation linéaire, de leurs dérivées et de* t.

Car elle admet toutes les transformations du groupe de la fonction

$$R = u_1 R_1 + \ldots + u_p R_p,$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions indéterminées de t.

3. La théorie des invariants différentiels de M. Lie conduit immédiatement à un résultat analogue au précédent. Soit en effet $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle des intégrales, admettant $\rho = n^2 - s$ transformations infinitésimales linéaires homogènes. Les fonctions R, $\frac{dR}{dt}, \ldots, \frac{d^{s-1}R}{dt^{s-1}}$, si l'on en fait disparaître les dérivées d'ordre égal ou supérieur à n, sont s intégrales du système complet à n^2 variables obtenu en égalant à zéro les symboles de ces ρ transformations, prolongées jusqu'à l'ordre $n-1$. Ce sont de plus des intégrales indépendantes, puisque Q ne peut dépendre d'une transformée d'ordre inférieur à s. Donc toute fonction rationnelle des intégrales qui admet les

ρ transformations infinitésimales de R, étant intégrale du système complet précédent, s'exprime en fonction des s intégrales indépendantes : R, $\frac{dR}{dt}, \ldots, \frac{d^{s-1}R}{dt^{s-1}}$; il est de plus évident que cette expression est *algébrique*.

Si l'on compare ce résultat à celui du paragraphe précédent, on voit que l'expression sera effectivement algébrique, c'est-à-dire ne pourra pas être rendue rationnelle en tenant compte de l'équation différentielle dont dépend R, toutes les fois que la seconde fonction admettra toutes les transformations infinitésimales du groupe de R sans en admettre toutes les transformations finies, et dans ce cas seulement. Cela ne peut donc arriver que si le groupe de R est un groupe complexe.

4. Soient encore deux fonctions rationnelles des intégrales, R et S, mais nous supposons que la seconde n'admet pas toutes les transformations infinitésimales de la première, et qu'elle en admet par exemple $\rho' = \rho - s'$, $\rho = n^2 - s$ étant toujours le nombre des transformations infinitésimales distinctes du groupe de R. Prolongeons jusqu'à l'ordre $n - 1$ ces ρ' transformations, et égalons leurs symboles à zéro : nous obtenons ainsi un système complet de $n^2 - s - s'$ équations à n^2 variables, ayant pour intégrales les $s + s' + 1$ fonctions

$$R, \quad \frac{dR}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{s-1}R}{dt^{s-1}}; \qquad S, \quad \frac{dS}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{s'}S}{dt^{s'}}.$$

Ces fonctions sont donc liées par une relation, qui ne peut contenir seulement les s premières ; c'est-à-dire que S est liée à R par une équation différentielle algébrique d'ordre s' au plus, à coefficients rationnels en t, R, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et leurs dérivées. D'autre part, cette équation, dont les coefficients sont des invariants du groupe de R, doit admettre comme intégrales toutes les fonctions déduites de S par les transformations de ce groupe, et comme leur valeur générale dépend, en vertu de l'hypothèse (I, Ch. II, n° 2), de s' paramètres essentiels, elle ne peut être d'ordre inférieur à s'; elle est donc exactement d'ordre s'.

5. *Sur les équations transformées.* — Soit $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle des intégrales et soit

$$\Phi(V) = 0 \tag{3}$$

la transformée, d'ordre s, par exemple, dont elle dépend. L'intégrale générale de cette équation est

$$V = R(\Sigma a_{1,i} x_i, \ldots, \Sigma a_{n,i} x_i) = F(x_1, \ldots, x_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_s),$$

les α étant des paramètres nouveaux, essentiels. Soit V_1 une intégrale particulière, supposée fondamentale (II, Ch. II, n° 3); cela revient à dire qu'elle n'est pas intégrale d'une équation de la même forme que (3), mais d'ordre inférieur à s : car une telle équation, ayant pour coefficients des invariants, admettrait comme intégrale la valeur générale de V, ce qui est impossible, cette valeur dépendant de s paramètres essentiels.

Il peut alors arriver que la valeur générale V ait le même groupe de transformations infinitésimales que V_1; cela aura lieu quand le groupe de R sera un sous-groupe invariant du groupe linéaire homogène général. On aura alors, le symbole A désignant une fonction algébrique,

$$V = A\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{s-1}V_1}{dt^{s-1}} \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s\right). \tag{4}$$

Je dis que cette formule donne encore l'intégrale générale de (3), si l'on y remplace V_1 par une autre intégrale fondamentale de cette équation. En effet, écrivons que la fonction (4) est une intégrale de (3), en faisant disparaître dans le calcul, au moyen de l'équation (3) dont V_1 est une intégrale, les dérivées de V_1 d'ordre égal ou supérieur à s; il vient une relation de la forme

$$\Psi\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{s-1}V_1}{dt^{s-1}} \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \frac{d\lambda_1}{dt}, \ldots\right) = 0,$$

qui ne peut être qu'une identité, puisque V_1 est une intégrale fondamentale. Or on s'est servi, dans le calcul, uniquement de ce que V_1 est intégrale de (3); donc, sous cette seule condition, la formule (4) donne pour V, quels que soient les α, une intégrale de l'équation (3). De plus, elle donne l'intégrale générale, si l'on ajoute que V_1 doit être une intégrale fondamentale; car s'il n'en était pas ainsi, c'est qu'on pourrait, dans la formule (4), éliminer les constantes α sans pousser les différentiations jusqu'à l'ordre s; or la condition pour que cette élimination soit possible est que V_1 vérifie une certaine équation différentielle, que l'on peut réduire à l'ordre $s-1$; et cela ne se peut pas, tant que V_1 est une intégrale fondamentale.

L'équation (3) jouit donc, dans le cas où nous nous sommes placé, de cette propriété, qui la rapproche des équations abéliennes, que son intégrale générale s'exprime algébriquement en fonction d'une intégrale particulière quelconque, par une formule qui reste la même, quelle que soit cette intégrale, à condition toutefois que cette intégrale particulière soit fondamentale, c'est-à-dire ne soit pas intégrale d'une équation de la même forme que (3), et d'ordre moindre.

La résolvante générale, signalée au début de ce Chapitre, appartient évidemment à cette classe d'équations.

6. Passons maintenant au cas général : V a en commun avec V_1 $\rho_1 < \rho$ transformations infinitésimales. Soit V_2 une seconde intégrale particulière fondamentale, n'ayant aussi que ρ_1 transformations infinitésimales communes avec V_1; elle est intégrale d'une équation différentielle algébrique d'ordre $s_1 = \rho - \rho_1$

$$\Phi_1(V, V_1) = 0, \tag{5}$$

où ne figure aucune dérivée de V_1 d'ordre égal ou supérieur à s; et l'on verra comme précédemment : 1° qu'elle n'est intégrale d'aucune équation de même forme et d'ordre moindre ; 2° que toute intégrale de cette équation est une intégrale de l'équation (3), pourvu que V_1 en soit elle-même une intégrale.

Il pourra alors arriver que V admette toutes les transformations infinitésimales communes à V_1 et V_2, et l'on aura, dans ce cas, une formule

$$V = A\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{s-1}V_1}{dt^{s-1}} \,\middle|\, V_2, \frac{dV_2}{dt}, \ldots, \frac{d^{s_1-1}V_2}{dt^{s_1-1}} \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s\right), \tag{6}$$

donnant l'intégrale générale de (3). Je dis que cette formule donne encore l'intégrale générale si l'on y remplace V_1 et V_2 par deux autres intégrales fondamentales, telles que V_2 satisfasse à l'équation (5), sans vérifier aucune autre équation de même forme et d'ordre moindre. En effet, en exprimant que la fonction (6) est une intégrale de l'équation (3), on obtient une relation différentielle

$$\Psi(V_2, V_1) = 0,$$

dont on peut supposer qu'elle ne contient ni dérivée de V_1 d'ordre égal ou supérieur à s, ni dérivée de V_2 d'ordre égal ou supérieur à s_1 ; d'où il résulte qu'elle ne peut contenir ni V_2 ni V_1 et est une identité. Or on s'est servi, dans ce calcul, uniquement de ce que V_1 est intégrale de (3) et V_2 intégrale de (5) ; donc, sous ces seules conditions, (6) représente une intégrale de la transformée (3). On verra de plus, comme précédemment, que, sous les conditions énoncées, elle contient s paramètres essentiels et en est, par suite, l'intégrale générale.

En poursuivant le même raisonnement, on arrivera au résultat général suivant :

A l'équation (3) on peut adjoindre un certain nombre d'équations différentielles

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_1(V, V_1) = 0, \\ \Phi_2(V, V_1, V_2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Phi_{k-1}(V, V_1, V_2, \dots, V_{k-1}) = 0, \end{array}\right.$$

d'ordres décroissants $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$, où ne figure ni dérivée de V_1 d'ordre supérieur à $s - 1$, ni dérivée de V_2 d'ordre supérieur à $s_1 - 1$, et ainsi de suite ; de telle sorte que, si V_1 est une intégrale de $\Phi = 0$ ne satisfaisant à aucune équation de même forme et d'ordre moindre, V_2 une intégrale de $\Phi_1 = 0$ ne satisfaisant à aucune équation de même forme et d'ordre moindre, et ainsi de suite, enfin V_k une intégrale de $\Phi_{k-1} = 0$ ne satisfaisant à aucune équation de même forme et d'ordre moindre, l'intégrale générale de l'équation (3) est donnée par une expression de la forme

$$V = A(V_1, V_2, \dots, V_k \,|\, \alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

où A est une fonction algébrique de $V_1, V_2, \dots, V_k$ et de leurs dérivées, jusqu'à l'ordre $s - 1$ pour V_1, $s_1 - 1$ pour $V_2, \dots, s_{k-1} - 1$ pour V_k. Et cette formule subsiste, quand on y remplace $V_1, V_2, \dots, V_k$ par k autres intégrales satisfaisant aux conditions énoncées.

Nous exprimerons ce fait en disant que l'équation (3) possède des *systèmes fondamentaux d'intégrales*. Nous appelons système fondamental d'intégrales un système de fonctions $V_1, V_2, \dots, V_k$ satisfaisant aux conditions précédentes, et nous disons que les systèmes fondamentaux d'intégrales de l'équation (3) sont définis par les équations (7).

Remarquons enfin que la propriété précédente s'étend immédiatement aux équations rencontrées au n° 4, et qui contiennent les transformées, comme cas particulier.

CHAPITRE IV.

GROUPES DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

1. Soit

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{dx}{dt} + \lambda_n x = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire donnée; ses coefficients sont des fonctions connues de t : on les considérera comme rationnelles. On peut encore leur adjoindre d'autres fonctions de t

$$\mu_1(t), \quad \mu_2(t), \quad \ldots, \quad \mu_k(t),$$

qui seront également considérées comme rationnelles. D'une manière générale, nous dirons alors qu'une fonction de t a une expression rationnelle, ou s'exprime rationnellement, si elle peut s'exprimer en fonction rationnelle de t, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ et de leurs dérivées, et nous dirons qu'elle a une expression algébrique ou s'exprime algébriquement, si elle peut s'évaluer algébriquement en fonction des mêmes éléments, c'est-à-dire si elle satisfait à une équation algébrique entière dont les coefficients aient des expressions rationnelles.

Nous désignerons dans la suite par $x_1, \ldots, x_n$ un système fondamental d'intégrales de l'équation (1), de sorte qu'une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$ (au sens indiqué II, Ch. I, n° 1), $R(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction de t. Mais, toutes les fois qu'on parlera de transformation linéaire effectuée dans R, on y devra considérer de nouveau les x comme des fonctions indéterminées. La comparaison de ces deux points de vue conduit au théorème suivant, qui est l'analogue du célèbre théorème de Galois.

2. Théorème. — *A toute équation linéaire* (1) *correspond un groupe* Γ *de transformations linéaires homogènes, qui jouit des deux propriétés suivantes :*

1° *Toute fonction rationnelle des intégrales qui a une expression rationnelle admet toutes les transformations de ce groupe;*

2° *Toute fonction rationnelle des intégrales invariante par toutes les transformations de ce groupe a une expression rationnelle.*

Considérons, en effet, toutes les fonctions rationnelles de $x_1, \ldots, x_n$ dont l'expression est rationnelle et, parmi elles, une fonction admettant un groupe avec le nombre minimum de paramètres. Si ce groupe est complexe, on supposera la fonction choisie de manière que les familles de transformations qui le constituent soient également en nombre minimum. Soit Φ cette fonction et Γ son groupe : je dis que c'est le groupe annoncé.

En effet, soit R une autre fonction rationnelle à expression rationnelle; elle admet le groupe Γ, car, sans cela, la fonction $\Phi + u\mathrm{R}$, où u représente une fonction arbitraire à expression rationnelle, aurait une expression rationnelle, et son groupe, formé des transformations de Γ que R admet, contiendrait, soit moins de paramètres que Γ, soit, du moins, un nombre moindre de familles de transformations, ce qui est en contradiction avec le choix de Φ.

Inversement, toute fonction de R qui admet toutes les transformations de Γ s'exprime rationnellement au moyen de t, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \Phi$ et de leurs dérivées (II, Ch. III, n° 2); elle a donc bien une expression rationnelle.

Remarque. — La première partie du théorème précédent est due à M. Picard, qui avait montré, de plus, que toute fonction R admettant le groupe Γ devait être uniforme, les coefficients de l'équation étant supposés rationnels. Nous conserverons au groupe Γ le nom de *groupe de transformations de l'équation*, qui lui a été donné par M. Picard, pour le distinguer du groupe de l'équation qui intervient lorsqu'on étudie les propriétés des intégrales comme fonctions de t.

3. Lorsqu'on a choisi, pour $x_1, \ldots, x_n$, un système fondamental particulier d'intégrales, le groupe Γ est unique; car, d'après la démonstration précédente, c'est le groupe formé de toutes les transformations linéaires homogènes communes à toutes les fonctions rationnelles de $x_1, \ldots, x_n$ qui s'expriment rationnellement. Mais, si l'équation n'est pas intégrée, il est impossible, en général, de définir le système fondamental choisi; de sorte qu'il y a, correspondant à ces divers systèmes fondamentaux, une infinité de groupes Γ, qui se déduisent de l'un d'entre eux en effectuant, dans les deux membres des équations qui le définissent, la transformation linéaire homogène la plus générale. Nous dirons que ces groupes sont *homologues* ([1]) dans le groupe linéaire homogène général, ou encore qu'ils appartiennent au même *type*. Remarquons, enfin, que les groupes à considérer sont nécessairement algébriques.

Cela posé, la détermination du groupe de transformations d'une équation linéaire donnée, ou plutôt du type auquel il appartient, sera possible dès que l'on saura résoudre les trois problèmes suivants :

I. *Déterminer les différents types de groupes linéaires homogènes algébriques à n variables* (n étant l'ordre de l'équation). Dans la troisième Partie de notre travail, nous traiterons ce problème dans les deux cas $n = 2$ et $n = 3$.

II. *Calculer, pour chacun des types trouvés, un invariant rationnel caractéristique, c'est-à-dire qui n'admette pas un groupe plus grand, et former la transformée dont il dépend.* La solution de ce deuxième problème ne dépend que d'éliminations algébriques ([2]).

III. *Reconnaître si une de ces transformées a une intégrale rationnelle en t.*

Le type cherché sera, en effet, le plus petit groupe correspondant à une transformée possédant une intégrale rationnelle en t.

4. On peut arriver au théorème précédent en suivant une autre marche, semblable à celle de Galois, et qui est aussi celle que M. Pi-

---

([1]) Nous traduisons ainsi le mot allemand *gleichberechtigt*.

([2]) *Voir* S. Lie, *Transformationsgruppen*, I, p. 218.

card avait employée. Considérons la résolvante générale, c'est-à-dire la transformée en $V = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n$; c'est une équation linéaire d'ordre n^2

$$\Psi(V) = 0. \tag{2}$$

Il existe toujours au moins une équation différentielle algébrique,

$$\Theta(V) = 0, \tag{3}$$

jouissant, à l'exclusion de toute équation d'ordre moindre, des propriétés suivantes : 1° elle est algébriquement irréductible; 2° toutes ses intégrales sont des intégrales de l'équation (2); 3° l'une au moins de ses intégrales est une intégrale fondamentale de l'équation (2). L'ensemble des transformations qui permettent de passer de l'une des intégrales fondamentales de l'équation (3) à toutes les autres constitue alors le groupe Γ.

Nous n'insistons pas sur la démonstration; nous voulons montrer seulement que, si l'on pouvait déterminer l'équation (3), le groupe Γ serait par là-même connu. Soit, en effet,

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

la transformation générale du groupe Γ, que nous supposons, pour simplifier, défini par un seul système d'équations.

L'équation (3) s'obtient en éliminant, par différentiations, les constantes a dans l'équation

$$V = \sum_{i,j} a_{ij}(\alpha) u_i x_j, \tag{5}$$

de sorte que son premier membre, si l'on réduit l'un des coefficients à l'unité, est, avant d'y remplacer les x par leurs valeurs en fonction de t, un invariant caractéristique du groupe (4). Mais de la symétrie de la formule (5) résulte que, si l'on y considère les u comme des indéterminées, c'est alors un invariant caractéristique pour le groupe

$$\overline{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\alpha) u_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

qui est le groupe Γ', *dualistique* [1] du groupe Γ. Or les u subsistent dans l'expression de $\Theta(V)$; on peut donc déterminer Γ' et en déduire Γ.

Ce procédé éviterait la discussion de tous les groupes linéaires algébriques; malheureusement, on ne voit pas de méthode qui permette de trouver une équation telle que (3), connaissant l'équation (2). On remarquera enfin que, de même qu'il y a une infinité de groupes Γ, il doit y avoir une infinité d'équations jouissant des propriétés de l'équation (3), et qui se déduisent toutes de l'une d'entre elles, en y effectuant sur les u la transformation linéaire homogène la plus générale.

5. La considération des transformations infinitésimales conduit à un nouveau théorème, analogue au précédent :

Théorème. — *A toute équation linéaire* (1) *correspond un groupe* G *de transformations infinitésimales linéaires homogènes à n variables, qui jouit des deux propriétés suivantes :*

1° *Toute fonction rationnelle des intégrales qui a une expression algébrique admet toutes les transformations infinitésimales de ce groupe.*

2° *Toute fonction rationnelle des intégrales qui admet toutes les transformations infinitésimales de ce groupe s'exprime algébriquement.*

Considérons, en effet, toutes les fonctions rationnelles des intégrales qui s'expriment algébriquement, et, parmi elles, une fonction admettant le nombre minimum de transformations infinitésimales linéaires homogènes indépendantes. Soient F cette fonction, G le groupe de ses transformations infinitésimales; je dis que G est le groupe annoncé.

En effet, soit R une autre fonction rationnelle des intégrales à expression algébrique; elle admet le groupe G, sans quoi la fonction $F + uR$, où u est une fonction arbitraire à expression algébrique, s'exprimerait algébriquement, et admettrait seulement les transformations infinitésimales de G que R admet, c'est-à-dire moins de transformations infinitésimales distinctes que F; ce qui est en contradiction avec le choix de F.

---

(1) *Voir*, sur les groupes dualistiques : III, Chap. I.

Inversement, toute fonction R admettant le groupe G s'exprime (II, Ch. III, n° 3) algébriquement au moyen de t, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ F et leurs dérivées; elle a donc une expression algébrique.

Remarque. — Le groupe G est évidemment le plus grand groupe de transformations infinitésimales contenu dans le groupe Γ. Il se confond donc avec Γ, toutes les fois que ce dernier est défini par un seul système d'équations. Nous verrons dans le Chapitre suivant que ce cas est au fond le seul à considérer dans les applications; de sorte que nos deux théorèmes se réduisent dans la pratique au premier.

CHAPITRE V.

RÉDUCTION DU GROUPE DE TRANSFORMATIONS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE.

1. *Adjonction d'une fonction rationnelle des intégrales.* — Soit

$$f(x) = \frac{d^n x}{dt^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_n x = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire, Γ son groupe de transformations, et Φ un invariant rationnel caractéristique de ce groupe. Soit maintenant Φ_1 une autre fonction rationnelle des intégrales, et Γ_1 le groupe des transformations de Γ qu'elle admet. Je dis que l'adjonction de Φ_1 réduit le groupe de transformations de l'équation à Γ_1. En effet, après l'adjonction, les fonctions qui s'expriment rationnellement sont celles qui peuvent s'évaluer en fonction rationnelle de Φ, de Φ_1 et leurs dérivées (les coefficients étant des fonctions rationnelles de t, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, des fonctions primitivement adjointes $\mu_1, \ldots, \mu_k$ et de leurs dérivées). Le plus grand groupe qui leur est commun est donc le groupe des transformations communes à Φ et Φ_1, c'est-à-dire Γ_1.

Conséquence. — Supposons en particulier que Γ soit un groupe complexe, et soit G le plus grand groupe de transformations infinitésimales qu'il contient; soit enfin F une fonction rationnelle ayant précisément G pour groupe. Si l'on adjoint F, G devient le groupe de l'équation.

Or F dépend, en fonction de Φ, d'une équation algébrique. Il est même facile de voir que le groupe de Galois de cette équation peut être considéré comme connu. Soient en effet (*voir* I, Ch. I, n° 2)

$$G, \quad GT_1, \quad \ldots, \quad GT_{k-1}$$

les familles de transformations de Γ, et $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}$ les fonctions en lesquelles F est changée par les transformations $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$. Ces transformations permutent les fonctions

$$F, \quad F_1, \quad \ldots, \quad F_{k-1},$$

suivant un groupe de substitutions, qui est le groupe de l'équation algébrique dont dépend F. Car toute fonction des racines $F, F_1, \ldots, F_{k-1}$ de cette équation qui admet ce groupe, admet, comme fonction des x, toutes les transformations de Γ, et par suite a une expression rationnelle; et inversement.

On peut donc toujours, par la résolution d'une équation algébrique à groupe connu, faire en sorte que le groupe de transformations de l'équation linéaire donnée soit un groupe G engendré par des transformations infinitésimales. Nous supposerons toujours dans la suite, à moins d'indication contraire, que cette simplification a été faite; en sorte que nous n'aurons à considérer que des groupes définis par un seul système d'équations, et que des fonctions rationnelles ayant des groupes de cette espèce.

2. *Sur les équations auxiliaires.* — Considérons toujours l'équation linéaire (1); soit G son groupe de transformations et F une fonction rationnelle des intégrales $x_1, \ldots, x_n$ ayant pour groupe G. Une autre fonction rationnelle $R(x_1, \ldots, x_n)$ dépend alors, en fonction de F, d'une équation différentielle

$$\Psi(V \mid F, \lambda, t) = 0, \tag{2}$$

qui est d'ordre m, si le groupe des transformations communes à F et à R a m paramètres de moins que G. Cette équation est irréductible, en ce sens qu'elle n'a pas d'intégrale fondamentale commune avec une équation de même forme et d'ordre moindre; en effet, cette seconde équation, ayant pour coefficients des invariants de G, admettrait pour intégrales toutes les valeurs que prend F par les transformations de ce groupe, c'est-à-dire qu'elle admettrait une intégrale renfermant m paramètres essentiels, ce qui est impossible.

Nous avons vu d'autre part que l'équation (2) possède des systèmes fondamentaux d'intégrales. Soient

$$(3)\qquad \begin{cases} \Psi_1(\mathrm{V}, \mathrm{V}_1 \mid \mathrm{F}, \lambda, t) = 0, \\ \Psi_2(\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \mid \mathrm{F}, \lambda, t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Psi_{k-1}(\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_{k-1} \mid \mathrm{F}, \lambda, t) = 0 \end{cases}$$

les équations qui les caractérisent, et soit $v_1, v_2, \dots, v_k$ un de ces systèmes. L'intégrale générale est fournie par une formule

$$(4)\qquad \mathrm{V} = \mathrm{A}_1(v_1, \dots, v_k \mid \mathrm{F}, \lambda, t \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

En se servant des relations (3), on en déduira l'expression générale d'un système fondamental, sous la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{V}_1 = \mathrm{A}_1(v_1, \dots, v_k \mid \mathrm{F}, \lambda, t \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m), \\ \mathrm{V}_2 = \mathrm{A}_2(v_1, \dots, v_k \mid \mathrm{F}, \lambda, t \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_{m_1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{V}_k = \mathrm{A}_k(v_1, \dots, v_k \mid \mathrm{F}, \lambda, t \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m; \dots; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_{k-1}}); \end{cases}$$

$m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ sont les ordres des équations (3); les $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ des paramètres arbitraires; on suppose enfin que dans ces expressions on a fait disparaître toutes les dérivées des v d'ordre égal ou supérieur à celui de l'équation que chacune vérifie.

Si l'on joint maintenant aux équations (5) celles qui s'en déduisent par différentiations (en éliminant toujours les dérivées d'ordre supérieur), on obtient évidemment les équations d'un groupe de transformations aux variables

$$(6)\qquad v_1, v_1', \dots, v_1^{(m-1)}; v_2, v_2', \dots, v_2^{(m_1-1)}; \dots; v_k, v_k', \dots, v_k^{(m_{k-1}-1)}.$$

On a en particulier une transformation de ce groupe si l'on effectue dans les fonctions (6) une quelconque des transformations de G, car les relations qui expriment que $v_1, \ldots, v_k$ satisfont aux équations (3) ne cessent pas d'être vérifiées. L'ensemble de ces transformations particulières constitue un groupe g isomorphe au groupe G.

Ce groupe g jouit évidemment, vis-à-vis de l'équation (2), des mêmes propriétés que G à l'égard de l'équation (1). Nous pouvons donc dire que *l'équation* (2) *possède un groupe de transformations*, à savoir le groupe g.

De plus, la transformation identique de g correspond dans G au groupe des transformations qui laissent invariantes à la fois $v_1, \ldots, v_k$, et par conséquent chacune des fonctions V, c'est-à-dire au plus grand sous-groupe de G, invariant dans G, et laissant R invariante. Il en résulte que g sera un groupe simple à condition que ce sous-groupe invariant G_1 soit un sous-groupe invariant maximum de G. Nous dirons dans ce cas que l'équation (2) est une *équation à groupe simple*.

Remarque. — Un cas remarquable est celui où le système fondamental d'intégrales de l'équation (2) se compose d'une seule intégrale; il faut et il suffit pour cela que le sous-groupe de G que R admet soit invariant dans G. Si c'est de plus un sous-groupe invariant maximum, l'équation auxiliaire (2) est de plus une équation à groupe simple.

3. *Méthode générale d'intégration.* — Supposons qu'on adjoigne à l'équation (1) toutes les intégrales de l'équation (2), ou, ce qui revient au même, les intégrales d'un système fondamental de cette équation. Le groupe de transformations de l'équation (1) se réduit alors au groupe commun à toutes ces intégrales et contenu dans G, c'est-à-dire au sous-groupe invariant G_1. D'où l'énoncé suivant :

Théorème. — *Par l'intégration de l'équation auxiliaire dont dépend une fonction rationnelle* R, *le groupe de transformations de l'équation donnée se réduit à son plus grand sous-groupe invariant dont* R *admette toutes les transformations.*

Ce théorème donne le moyen de ramener la résolution de toute équation linéaire à celle d'une suite d'équations auxiliaires à groupes simples. Pour que ces équations auxiliaires soient d'ordre minimum, on devra évidemment opérer de la manière suivante.

On effectue une décomposition normale du groupe de transformations G de l'équation donnée. Soit

$$G, \quad G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_{h-1}$$

cette décomposition; on cherche alors un sous-groupe de G contenant G_1 et ayant le nombre maximum de paramètres : soit γ_1; puis un sous-groupe de G_1 contenant G_2 et ayant le nombre maximum de paramètres : soit γ_2; et ainsi de suite; enfin un sous-groupe maximum γ_h de G_{h-1}. On calcule ensuite des invariants rationnels $F_1, \ldots, F_h$ caractéristiques respectivement de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h$: les équations auxiliaires sont alors celles qui fournissent F_1 en fonction de F, F_2 en fonction de F_1, etc., enfin F_h en fonction de F_{h-1}.

Les ordres des équations auxiliaires sont donc les *indices de composition* (I, Ch. I, n° 3) du groupe G. D'où il résulte que, quelle que soit la décomposition normale employée, elle conduit toujours à des équations auxiliaires des mêmes ordres.

Remarque. — La méthode précédente ne sera applicable, dans les conditions où nous nous sommes placés de n'avoir jamais à effectuer que des calculs algébriques, qu'autant qu'on pourra déterminer une suite de groupes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h$ qui soient tous des groupes algébriques.

4. *Discussion.* — Il resterait à étudier dans quelles circonstances l'intégration d'une équation auxiliaire peut réduire le groupe de transformations de l'équation donnée. Nous nous bornerons ici au cas où l'équation auxiliaire est elle-même linéaire (¹).

Soient donc

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée, G son groupe de transformations, F une fonction rationnelle de ses intégrales $x_1, \ldots, x_n$ ayant précisément G pour groupe. Soient d'autre part

$$g(y) = 0 \tag{2}$$

(¹) Les résultats qui suivent peuvent s'étendre au cas plus général où l'équation auxiliaire possède des systèmes fondamentaux d'intégrales.

l'équation linéaire auxiliaire, et $y_1, \ldots, y_q$ un système fondamental d'intégrales de cette équation. Nous supposons que l'intégration de (2), c'est-à-dire l'adjonction de $y_1, \ldots, y_q$, réduise le groupe de transformations de (1) à un sous-groupe G_1 de G ayant par exemple s paramètres de moins. Soit F_1 une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$ ayant G_1 pour groupe; l'hypothèse revient à dire que l'on a

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = H_1(y, \ldots, y_q),$$

H_1 étant une fonction rationnelle des intégrales de (2). Formons alors les deux équations irréductibles (au sens du n° 2) dont dépendent respectivement F_1 et H_1. Comme elles ont une intégrale fondamentale commune, elles sont identiques; donc elles sont en particulier du même ordre. Dès lors la valeur générale de H_1 par les transformations du groupe (de transformations) de l'équation (2) a le même nombre de paramètres essentiels que la valeur générale de F_1 par les transformations de G. Or, si l'on adjoint à l'équation (2) les intégrales de (1), F_1 et par suite H_1 devient rationnel; donc cela réduit le groupe de transformations de l'équation (2) de s paramètres au moins. Cela ne peut d'ailleurs pas le réduire d'un nombre plus grand, s', car le même raisonnement prouverait alors que l'adjonction des intégrales de (2) réduit le groupe de transformations de (1) de s' paramètres au moins, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc l'adjonction des intégrales de (1) réduit le groupe de transformations de (2) exactement de s paramètres.

De plus, les diverses valeurs de F_1 étant respectivement égales aux diverses valeurs de H_1 se trouvent toutes adjointes par l'adjonction des intégrales de l'équation (2). Donc le groupe G de l'équation (1) est réduit à un sous-groupe invariant G_1 ; et de même pour l'équation (2). Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

Théorème. — *Si, par l'intégration d'une équation linéaire auxiliaire, le groupe de transformations de l'équation proposée se trouve réduit de s paramètres, il en est de même pour l'équation auxiliaire par l'intégration de la proposée. De plus, les nouveaux groupes de transformations des deux équations sont invariants dans les anciens.*

Corollaire I. — *Si l'intégration d'une équation linéaire auxiliaire à* *groupe simple réduit le groupe de transformations de l'équation donnée, les intégrales de l'équation auxiliaire sont des fonctions rationnelles des intégrales de la proposée.*

Car, si l'on adjoint à l'équation auxiliaire les intégrales de la proposée, son groupe, qui est simple, se réduit, en vertu du théorème précédent, à la seule transformation identique, de sorte que toutes ses intégrales s'expriment rationnellement (¹).

Corollaire II. — *Si l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre réduit le groupe de transformations de la proposée, une quelconque de ses intégrales est une fonction rationnelle des intégrales de l'équation donnée. Le groupe de transformations de celle-ci se réduit alors à un sous-groupe invariant ayant un paramètre de moins.*

Car le groupe d'une équation linéaire et homogène du premier ordre est le groupe linéaire homogène à une variable, qui est simple.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS LINÉAIRES INTÉGRABLES PAR QUADRATURES.

1. Théorème. — *Pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures, il faut et il suffit que le groupe de transformations de cette equation soit un groupe intégrable* (²).

Nous démontrerons d'abord que la condition est nécessaire.

Remarquons, à cet effet, que toute quadrature équivaut à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre ; et supposons, par conséquent, que l'équation donnée puisse être intégrée au moyen d'une

(¹) Ce corollaire, avec l'extension indiquée dans la Note précédente, montre que la méthode du n° 3 est la seule méthode d'intégration de l'équation proposée au moyen d'équations auxiliaires à groupes simples.

(²) *Voir* I, Ch. I, n° 3.

suite d'équations linéaires auxiliaires du premier ordre, c'est-à-dire que son groupe de transformations se réduise finalement à la seule transformation identique par l'adjonction successive des intégrales de ces équations. Il résulte du corollaire II du n° 4 du Chapitre précédent que, chaque fois que le groupe se réduit, il se réduit à un sous-groupe invariant ayant un paramètre de moins.

Donc le groupe de transformations de l'équation donnée contient un sous-groupe invariant à un paramètre de moins, celui-ci de même, et ainsi de suite; c'est donc bien un groupe intégrable.

Remarque. — On peut aussi faire une démonstration directe. Supposons que l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \theta(t) \tag{1}$$

réduise le groupe de transformations G de la proposée à son sous-groupe G_1 ; et soit F_1 une fonction rationnelle des intégrales $x_1, \ldots, x_n$ de l'équation donnée qui ait pour groupe G_1. On a, en désignant par y_1 une intégrale de (1), et par H une fonction rationnelle,

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = H(y_1). \tag{2}$$

Formons l'équation irréductible (II, Ch. V, n° 2) dont dépend F_1 ; et celle dont dépend $H(y_1)$, et qui est évidemment du premier ordre. La seconde équation, admettant pour intégrale une intégrale fondamentale de la première [à cause de l'égalité (2)], est identique à la première, de sorte que la valeur générale de F_1 par les transformations de G ne dépend que d'un paramètre essentiel; c'est dire que G_1 a un paramètre de moins que G. De plus, les diverses valeurs de F_1 étant les mêmes que les diverses valeurs de $H(y_1 + a)$ se trouvent toutes adjointes; donc G_1 est un sous-groupe invariant de G.

Le raisonnement s'achève alors comme précédemment.

Corollaire. — *L'équation différentielle linéaire générale d'ordre n ($n > 1$) n'est pas intégrable par quadratures.*

Car son groupe de transformations est le groupe linéaire homogène général à n variables ; ce groupe ne contient qu'un sous-groupe à un paramètre de moins : c'est le groupe linéaire homogène spécial, qui est invariant dans le précédent, mais qui est simple ([1]). Le groupe linéaire homogène général à n variables, pour $n > 1$, n'est donc pas intégrable.

2. Passons à la démonstration de la seconde partie du théorème. Nous nous appuierons sur ce résultat ([2]) que tout groupe intégrable de transformations infinitésimales linéaires homogènes à n variables est homologue à un sous-groupe du groupe

$$(\mathrm{K})\qquad \left\{\begin{array}{llll} x_1 p_1, & & & \\ x_1 p_2, & x_2 p_2, & & \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & & \\ x_1 p_n, & x_2 p_n, & \ldots, & x_n p_n, \end{array}\right.$$

dont les transformations finies ont pour équations

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= a_{11} x_1, \\ \overline{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{x}_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n. \end{aligned}$$

On voit facilement que toute transformation linéaire homogène qui laisse invariant le groupe K est contenue dans ce groupe, de sorte que tout groupe linéaire homogène intégrable, complexe ou non, est homologue à un sous-groupe de K.

Il en résulte que, si le groupe de transformations de l'équation linéaire d'ordre n donnée est intégrable, tout invariant du groupe K s'exprime rationnellement, en désignant par $x_1, \ldots, x_n$ un système fondamental d'intégrales de cette équation convenablement choisi.

Or le groupe K est le groupe des transformations communes aux fonctions

$$(3)\qquad \frac{d\,\mathfrak{L}\,\mathrm{D}_1}{dt}, \quad \frac{d\,\mathfrak{L}\,\mathrm{D}_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\,\mathfrak{L}\,\mathrm{D}_{n-1}}{dt},$$

([1]) S. Lie, *Transformationsgruppen*, I, Ch. 26 et Ch. 27.

([2]) *Ibid.*, Ch. 27, p. 589.

où l'on a posé

$$\mathrm{D}_k = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(k-1)} & x_2^{(k-1)} & \dots & x_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

en effet, $\dfrac{d\mathfrak{L}\mathrm{D}_k}{dt}$ est un invariant caractéristique du groupe

$$\begin{aligned} \overline{x_1} &= a_{1,1} \;\; x_1 + \dots + a_{1,k} \;\; x_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \overline{x_k} &= a_{k,1} \;\; x_1 + \dots + a_{k,k} \;\; x_k, \\ \overline{x_{k+1}} &= a_{k+1,1} x_1 + \dots + a_{k+1,k} x_k + \dots + a_{k+1,n} x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n &= a_{n,1} \;\; x_1 + \dots + a_{n,k} \;\; x_k + \dots + a_{n,n} \;\; x_n. \end{aligned}$$

Donc, toutes ces fonctions s'expriment rationnellement. En particulier, la première $\dfrac{d\mathfrak{L}x_1}{dt}$ a une expression rationnelle, de sorte que l'on a déjà, par une quadrature, une intégrale de la proposée, à savoir x_1. Posons alors

$$x_2 = x_1 \int y_1 \, dt, \qquad \dots, \qquad x_n = x_1 \int y_{n-1} \, dt;$$

$y_1, \dots, y_{n-1}$ constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre $n-1$ dont les coefficients sont rationnels, puisqu'ils s'expriment rationnellement au moyen de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (coefficients de la proposée), de $\dfrac{d\mathfrak{L}x_1}{dt}$ et de leurs dérivées.

De plus, on a, par un calcul facile,

$$\mathrm{D}_k = (x_1)^k \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-2)} & \dots & y_{k-1}^{(k-2)} \end{vmatrix} = (x_1)^k \mathrm{E}_{k-1},$$

en sorte que la nouvelle équation est encore telle que les quantités

$$\frac{d\mathfrak{L}\mathrm{E}_1}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{d\mathfrak{L}\mathrm{E}_{n-2}}{dt},$$

analogue aux quantités (3), s'expriment rationnellement. On peut, dès lors, opérer sur elle comme sur la précédente, et ainsi de suite. On aura donc une nouvelle intégrale de la proposée, x_2 par exemple, par deux quadratures nouvelles superposées; puis une autre, x_3, par trois quadratures nouvelles superposées, et ainsi de suite; de sorte que l'intégration complète de l'équation donnée exigera, dans le cas le plus général, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ quadratures.

Remarque. — La démonstration qui précède a ceci de remarquable, qu'elle montre que, si une équation linéaire peut être intégrée par des quadratures, elle peut toujours l'être en employant le procédé classique qui consiste à chercher une intégrale particulière, puis à ramener l'intégration de l'équation donnée à celle d'une équation linéaire d'ordre inférieur d'une unité, et ainsi de suite. Elle fournit l'énoncé suivant :

Théorème. — *Si une équation linéaire est intégrable par quadratures, la dérivée logarithmique de l'une de ses intégrales s'exprime rationnellement.*

Enfin, la condition nécessaire et suffisante énoncée en tête de ce Chapitre peut prendre une autre forme, analogue à la condition donnée par Galois pour la résolubilité par radicaux des équations de degré premier, qui est que la résolvante de Lagrange ait une racine rationnelle. En effet, notre condition peut s'exprimer en disant qu'une fonction rationnelle des intégrales ayant pour groupe le groupe K doit s'exprimer rationnellement. Une telle fonction est, par exemple,

$$\Omega = u_1 \frac{d\,\mathfrak{L}\,D_1}{dt} + u_2 \frac{d\,\mathfrak{L}\,D_2}{dt} + \ldots + u_{n-1} \frac{d\,\mathfrak{L}\,D_{n-1}}{dt},$$

où $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont indéterminées. D'où le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une équation linéaire d'ordre n soit intégrable par quadratures, il faut et il suffit que la transformée d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$ dont dépend Ω ait une intégrale rationnelle.*

Dans la pratique, il sera en général préférable, pour reconnaître si une équation donnée est intégrable par des quadratures, de suivre la marche même employée dans notre démonstration; car la résolvante en Ω est, dès le troisième ordre, extrêmement compliquée.

3. Considérons encore une équation linéaire ayant pour groupe de transformations un groupe intégrable G. La méthode générale d'intégration du Chapitre précédent montre encore que l'intégration n'exige alors que des quadratures. Soit, en effet, G_1 un sous-groupe invariant de G avec un paramètre de moins, et soient F et F_1 deux fonctions rationnelles des intégrales ayant pour groupes G et G_1. F_1 est intégrale d'une équation du premier ordre de la forme

$$\Phi\left(F_1, \frac{dF_1}{dt} \middle| F, \lambda, t\right) = 0. \tag{4}$$

De plus, G_1 étant invariant dans G, la valeur générale de F_1 s'exprime au moyen d'une valeur particulière par une relation

$$V = A(F_1 \mid F, \lambda, t \mid \alpha), \tag{5}$$

où α est une constante arbitraire et où ne figure aucune dérivée de F_1; enfin cette relation donne toujours l'intégrale générale, si l'on y remplace F_1 par une autre intégrale particulière. En résumé, F_1 est intégrale d'une équation connue

$$\Psi\left(\frac{dy}{dt}, y, t\right) = 0, \tag{6}$$

qui jouit de cette propriété que son intégrale générale Y s'exprime au moyen d'une intégrale particulière y par une relation connue

$$Y = \theta(y, \alpha), \tag{7}$$

dont la forme est indépendante de cette intégrale particulière. Je dis qu'une telle équation s'intègre par deux quadratures au plus.

En effet, l'équation (7) définit évidemment un groupe de transformations à une variable et un paramètre. Calculons sa transformation infinitésimale; soit

$$\eta(y)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{8}$$

et déterminons une fonction z de y par la condition

$$\eta(y)\frac{dz}{dy}=1,$$

c'est-à-dire

$$z=\int\frac{dy}{\eta(y)}=\chi(y).$$

Le changement de variable, $z=\chi(y)$, change alors (8) en $\frac{\partial f}{\partial z}$, c'est-à-dire change le groupe (7) en le groupe

$$Z=z+\beta. \tag{9}$$

Il change donc l'équation (6) en une équation dont l'intégrale générale ne renferme qu'une constante additive, et qui est, par conséquent, de la forme

$$\frac{dz}{dt}=\zeta(t).$$

Cette équation s'intègre par une seconde quadrature, et dès lors l'intégration de l'équation (3) est effectuée.

En résumé, la réduction du groupe de transformations à G_1 exige au plus deux quadratures. Nous disons au plus, parce que la première quadrature disparaît, en général, dans les applications. Si donc le groupe G a r paramètres, l'intégration de l'équation donnée nécessite au plus $2r$ quadratures.

Remarque I. — La démonstration précédente prête à cette objection, qu'elle suppose qu'on puisse effectuer une décomposition normale du groupe G en sous-groupes algébriques; mais elle a l'avantage de montrer comment, dans certains cas, le nombre des quadratures peut être réduit de beaucoup.

Remarque II. — Il y a enfin lieu de distinguer entre les quadratures qui se calculent indépendamment les unes des autres et les quadratures superposées. Dans l'application de la méthode générale, toutes les quadratures paraissent devoir être superposées; notre première démonstration montre, au contraire, qu'on peut diriger les calculs de manière à avoir au plus n quadratures superposées. On peut souvent, d'ailleurs, modifier la méthode générale, de manière à remplacer des quadratures superposées par des quadratures indépendantes.

Supposons, par exemple, que G contienne ρ sous-groupes invariants distincts à un paramètre de moins : on pourra, par des quadratures indépendantes, calculer successivement des invariants de chacun d'eux, et l'adjonction de ces ρ fonctions réduira le groupe de transformations de l'équation de ρ paramètres.

4. *Équations à coefficients constants.* — L'exemple le plus simple est celui des équations à coefficients constants. Soit l'équation

$$\frac{d^n x}{dt^n} + c_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + c_{n-1} \frac{dx}{dt} + c_n x = 0; \tag{10}$$

l'équation en $\frac{d\,\mathcal{L}\,x}{dt}$ admet n intégrales rationnelles, à savoir les n racines, supposées distinctes, de l'équation

$$\mathrm{P}(u) = u^n + c_1 u^{n-1} + \ldots + c_{n-1} u + c_n = 0; \tag{11}$$

soient $\frac{x'_1}{x_1}, \ldots, \frac{x'_n}{x_n}$ ces n racines. Le groupe commun à ces n fonctions est

$$x_1 p_1, \quad x_2 p_2, \quad \ldots, \quad x_n p_n; \tag{12}$$

c'est donc le groupe de transformations de l'équation. Or les transformations de ce groupe sont échangeables deux à deux : l'intégration doit donc s'effectuer par n quadratures indépendantes, d'après la remarque II du paragraphe précédent. Les n sous-groupes à considérer sont ici ceux qu'on déduit de (12), en supprimant successivement chacune des transformations infinitésimales, et les n invariants sont les n intégrales $x_1, \ldots, x_n$; on retombe donc sur le procédé ordinaire d'intégration de cette classe d'équations.

Remarque. — Si les racines de l'équation (11) ne sont pas distinctes, le groupe de transformations de l'équation (10) se réduit. Supposons, par exemple, que u_1 soit racine multiple d'ordre k de (11), et soit $u_1 = \frac{x'_1}{x_1}$. Je considère l'équation en $y = \frac{x}{x_1}$, qui est

$$0 = y\,(x_1^{(n)} + c_1 x_1^{(n-1)} + \ldots + c_n x_1) + y'\,[n\,x_1^{(n-1)} + (n-1)\,c_1 x_1^{(n-2)} + \ldots + c_{n-1} x_1] + \ldots.$$

Elle devient, si l'on pose $x_1 = e^{u_1 t}$,

$$o = y\,P(u_1) + \frac{y'}{1} P'(u_1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^{(k)}}{k!} P^{(k)}(u_1) + \ldots = o.$$

Elle a donc k intégrales rationnelles, par exemple

$$1, \quad t, \quad t^2, \quad \ldots, \quad t^{k-1},$$

qui seront, si l'on veut, $\frac{x_1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_k}{x_1}$; de sorte que le groupe (12) est ici remplacé par

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k, \quad x_{k+1} p_{k+1}, \quad \ldots, \quad x_n p_n.$$

La quadrature qui donne x_1 fournit en même temps

$$x_2 = t x_1, \qquad x_3 = t^2 x_1, \qquad \ldots, \qquad x_k = t^{k-1} x_1,$$

c'est-à-dire que k quadratures sont remplacées par une seule, ce qui tient à ce que le groupe contient $k-1$ paramètres de moins que dans le cas général.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS. — GROUPES DUALISTIQUES ET ÉQUATIONS ADJOINTES.

1. *Généralités.* — D'après la méthode générale que nous avons indiquée pour l'intégration d'une équation linéaire donnée, la théorie générale des équations linéaires d'ordre n comprend la résolution des trois problèmes suivants :

1. Déterminer les divers types de groupes algébriques contenus dans le groupe linéaire homogène à n variables.

II. Étudier à quels caractères on reconnaîtra que le groupe de transformations d'une équation linéaire donnée appartient à un de ces types.

III. Connaissant le type du groupe de transformations d'une équation linéaire, indiquer quelle sera la nature des équations auxiliaires à intégrer, et former ces équations auxiliaires.

Nous ne pouvons aborder ces problèmes dans toute leur généralité; nous limiterons nos applications aux deux cas particuliers des équations du second et du troisième ordre. Voici auparavant quelques remarques générales.

La nature des équations auxiliaires dépend de la structure du groupe de transformations de l'équation; c'est là une question sur laquelle nous nous réservons de revenir plus tard. Indiquons seulement ici ce résultat, que les équations du premier ordre intervenant dans l'application de la méthode pourront toujours être remplacées par des équations de Riccati, à moins que l'intégration de ces équations se ramène à des quadratures, cas que nous avons précédemment étudié.

La solution du second problème revient à reconnaître si une certaine équation différentielle admet une intégrale rationnelle : la méthode des coefficients indéterminés, jointe à la décomposition en éléments simples, suffira en général. Il sera avantageux de faire intervenir, dans la formation des équations à considérer, les invariants de l'équation linéaire d'ordre n.

Enfin, dans l'étude des types de groupes linéaires homogènes, on devra distinguer entre les groupes intégrables et les groupes non intégrables : on pourra même à la rigueur se dispenser d'une étude détaillée des premiers, et appliquer simplement ce que nous avons dit de l'intégration par quadratures. Pour les autres, nous cherchons tous les types de sous-groupes non intégrables du groupe linéaire homogène, et nous ne conservons que ceux qui sont algébriques.

2. *Groupes dualistiques.* — La recherche de ces types est simplifiée par la considération des groupes dualistiques. On sait que M. Sophus Lie appelle ainsi [1] deux groupes qui se déduisent l'un de l'autre par

---

[1] *Transformationsgruppen*, II, Ch. 19.

la transformation de contact homogène qui est définie par la relation

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n + 1 = 0.$$

Pour les groupes linéaires homogènes, on peut donner une définition plus élémentaire. La transformation dualistique de la transformation

$$\overline{x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est, par définition,

$$\overline{u_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \log \Delta}{\partial a_{ik}} u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Son inverse est donc

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \overline{u_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte qu'elle est définie par l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} \, \overline{x_k}.$$

Il résulte de là qu'à tout groupe de transformations linéaires homogènes correspond un groupe dualistique, formé des transformations dualistiques (ou de leurs inverses).

Soit maintenant une transformation infinitésimale

$$X = \sum_{ik} e_{ik} x_i p_k,$$

et cherchons la transformation dualistique

$$U = \sum e'_{jh} u_j q_h$$

elle doit être telle que $\Sigma u_i x_i$ soit invariant, ce qui donne l'identité

$$\sum_{ik} e_{ik} x_i u_k + \sum_{jh} e'_{jh} x_h u_j = 0$$

ou

$$\sum_{ik} (e_{ik} + e'_{ki}) x_i u_k = 0$$

d'où l'on conclut

$$e'_{ik} = -e_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc, pour passer d'un groupe linéaire homogène au dualistique, il nous suffira d'intervertir dans ses transformations infinitésimales les indices des variables avec ceux des dérivées partielles.

3. *Équation adjointe.* — Soit

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_n x = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire, ayant pour système fondamental d'intégrales les fonctions $x_1, \ldots, x_n$. L'équation adjointe de Lagrange est celle qui a pour intégrales les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ définies par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = 0, \\ u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + \ldots + u_n x'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1 x_1^{(n-2)} + u_2 x_2^{(n-2)} + \ldots + u_n x_n^{(n-2)} = 0, \\ u_1 x_1^{(n-1)} + u_2 x_2^{(n-1)} + \ldots + u_n x_n^{(n-1)} = 1. \end{array}\right. \tag{2}$$

Si donc on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

on en tire

$$u_k = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x_k^{(n-1)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation adjointe est

$$(3) \qquad u = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x'_1 & \dots & x'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \\ c_1 & \dots & c_n \end{vmatrix},$$

où $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des constantes arbitraires. En différentiant cette relation, on obtient successivement

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-3)} & \dots & x_n^{(n-3)} \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \\ c_1 & \dots & c_n \end{vmatrix} + \lambda_1 u,$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-4)} & \dots & x_n^{(n-4)} \\ x_1^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \\ c_1 & \dots & c_n \end{vmatrix} + \frac{d}{dt}(\lambda_1 u) - \lambda_2 u,$$

. . . . ,

$$\frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \\ x''_1 & \dots & x''_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \\ c_1 & \dots & c_n \end{vmatrix} + \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(\lambda_1 u) - \dots + (-1)^n \lambda_{n-1} u;$$

donc enfin

$$(4) \qquad \frac{d^n u}{dt^n} - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\lambda_1 u) + \dots + (-1)^{n-1}\frac{d}{dt}(\lambda_{n-1} u) + (-1)^n \lambda_n u = 0.$$

C'est donc là l'équation adjointe. On sait que l'adjointe de l'équation (4) serait précisément l'équation proposée (1). Cette réciprocité tient à ce que, par des différentiations, on peut déduire des relations (2) les formules analogues

$$(5)\quad\begin{cases} x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n = 0, \\ x_1 u'_1 + x_2 u'_2 + \ldots + x_n u'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 u_1^{(n-2)} + x_2 u_2^{(n-2)} + \ldots + x_n u_n^{(n-2)} = 0, \\ x_1 u_1^{(n-1)} + x_2 u_2^{(n-1)} + \ldots + x_n u_n^{(n-1)} = 1. \end{cases}$$

L'importance de l'équation adjointe dans notre théorie tient à ce fait que les groupes de transformations de deux équations adjointes sont deux groupes dualistiques. En effet, la forme des relations de définition (2) montre qu'à toute transformation

$$\overline{x_i} = \sum_k a_{ik} x_k$$

entre les x correspond entre les fonctions u la transformation

$$\overline{u_k} = \sum a_{ik} u_k,$$

c'est-à-dire l'inverse de la transformation dualistique; et l'inverse a lieu évidemment. Dès lors toute fonction rationnelle des u qui a une expression rationnelle admettant, comme fonction des x et de leurs dérivées, les transformations du groupe de transformations G de l'équation (1), admet, comme fonction des indéterminées u, le groupe G' dualistique de G; et réciproquement toute fonction rationnelle des u invariante par G' est, comme fonction des x, un invariant de G, qui est le dualistique de G'; elle s'exprime donc rationnellement. G' est donc le groupe de transformations de l'équation adjointe (4).

Comme l'intégration de chacune des équations adjointes (2) ou (4) entraîne celle de l'autre, on pourra, dans les applications, considérer comme équivalents deux types de groupes linéaires homogènes, correspondant à des groupes dualistiques.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

1. *Groupes linéaires homogènes à deux variables* [1]. — Le groupe linéaire homogène général à deux variables x_1, x_2 dépend de quatre paramètres. Toute transformation infinitésimale de ce groupe est une combinaison linéaire des quatre transformations

$$x_1 p_1, \quad x_2 p_1, \quad x_1 p_2, \quad x_2 p_2.$$

Nous allons déterminer ses sous-groupes; pour nous aider dans cette recherche nous considérerons x_1, x_2 comme les coordonnées homogènes d'un point d'une droite.

Groupes à un paramètre. — Soit

$$Xf = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)p_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)p_2$$

un de ces groupes; trois cas peuvent se présenter :

a. Il laisse invariants deux points distincts; en les prenant pour points de repère, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, on trouve pour Xf la forme canonique

$$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 \qquad (a_1 \neq a_2).$$

b. Xf laisse invariants deux points confondus; prenons le point double invariant pour point $x_1 = 0$, et nous obtenons la forme type

$$x_1 p_2 + \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2).$$

c. Le groupe laisse invariant tout point de la droite; c'est alors

$$x_1 p_1 + x_2 p_2.$$

(1) Ces groupes ont été, depuis longtemps, déterminés par M. Lie.

Groupes à deux paramètres. — Tout groupe à deux paramètres possède au moins un sous-groupe invariant. De là trois cas :

a. Ce sous-groupe invariant est du type

$$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 \qquad (a_1 \neq a_2).$$

Chacun des points qu'il laisse invariants est invariant par tout le groupe (¹); la deuxième transformation infinitésimale du groupe est donc de la même forme, et le groupe a pour type

$$\boxed{x_1 p_1, \quad x_2 p_2}.$$

b. Le sous-groupe invariant est du type

$$X_1 = x_1 p_2 + \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2).$$

Une deuxième transformation infinitésimale laisse encore invariant le point $x_1 = 0$. Si elle est du même type, le groupe est

$$\boxed{x_1 p_2, \quad x_1 p_1 + x_2 p_2}.$$

Si elle laisse invariants deux points distincts, elle est

$$X_2 = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 \qquad (a_1 \neq a_2),$$

et le groupe contient

$$(X_1 X_2) = (a_2 - a_1) x_1 p_2.$$

On en conclut $\lambda = 0$, et pour le groupe la forme type

$$\boxed{x_1 p_2, \quad a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2} \qquad (a_1 \neq a_2).$$

Enfin, si X_2 laisse invariant chaque point de la droite, on retombe sur l'avant-dernier type.

(¹) *Transformationsgruppen*, I, p. 586.

c. Le sous-groupe invariant est $x_1 p_1 + x_2 p_2$; on retrouve les types précédents

$$\boxed{x_1 p_1, \quad x_2 p_2}, \qquad \boxed{x_1 p_2, \quad x_1 p_1 + x_2 p_2}.$$

Groupes à trois paramètres. — Soit G un de ces groupes. S'il est intégrable, il est du type (*voir* II, Chap. VI, n° 2)

$$\boxed{x_1 p_1, \quad x_1 p_2, \quad x_2 p_2}.$$

Sinon, il a la structure du groupe projectif général à une variable, c'est-à-dire

$$(X_1 X_2) = X_1, \qquad (X_2 X_3) = X_3, \qquad (X_1 X_3) = 2 X_2.$$

X_1, X_2 forment un sous-groupe à transformations non échangeables, qui peut être pris sous la forme

$$X_1 = x_1 p_2, \qquad X_2 = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2,$$

et comme

$$(X_1 X_2) = (a_2 - a_1) x_1 p_2,$$
$$X_2 = a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + x_2 p_2;$$

soit alors

$$X_3 = b_1 x_2 p_1 + b_2 (x_1 p_1 + x_2 p_2).$$

On a

$$(X_2 X_3) = b_1 x_2 p_1, \qquad (X_1 X_3) = b_1 (x_1 p_1 - x_2 p_2),$$

d'où l'on conclut

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = 2 a_1 = -2(a_1 + 1),$$

et, par suite,

$$X_1 = x_1 p_2, \qquad X_2 = \tfrac{1}{2}(x_2 p_2 - x_1 p_1), \qquad X_3 = -x_2 p_1.$$

On trouve donc seulement le groupe linéaire spécial

$$\boxed{x_1 p_2, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_2 p_1}.$$

On obtient sans difficulté les transformations finies des groupes précédents; il reste comme groupes algébriques

(I) $$\boxed{x_1p_2, \quad x_1p_1 - x_2p_2, \quad x_2p_1},$$

(II) $$\boxed{x_1p_1, \quad x_1p_2, \quad x_2p_2},$$

(III) $$\boxed{x_1p_2, \quad a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2} \qquad (a_1 \neq a_2),$$

(IV) $$\boxed{x_1p_2, \quad x_1p_1 + x_2p_2},$$

(V) $$\boxed{x_1p_1, \quad x_2p_2},$$

(VI) $$\boxed{a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2} \qquad (a_1 \neq a_2),$$

(VII) $$\boxed{x_1p_2},$$

(VIII) $$\boxed{x_1p_1 + x_2p_2}.$$

Le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ doit être rationnel. Tous ces groupes sont intégrables, sauf le premier. Les groupes (I) et (VIII) sont seuls invariants dans le groupe linéaire homogène général.

2. Nous prendrons l'équation linéaire du second ordre sous la forme

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = 0,$$

et nous la supposerons définie par le coefficient p et l'invariant K. Voici comment s'introduit cet invariant. Posons

(2 $$x = \lambda X,$$

λ étant une fonction de t; l'équation prend la forme

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2P\frac{dX}{dt} + QX = 0, \tag{3}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} P &= p + \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt}, \\ Q &= q + 2p\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{d^2\lambda}{dt^2}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ces formules définissent un groupe continu infini de transformations des quantités p et q; on en obtient un invariant différentiel du premier ordre en choisissant λ de manière à annuler P, ce qui donne

$$\lambda = e^{-\int p\,dt}, \tag{5}$$

$$x = Xe^{-\int p\,dt}, \tag{6}$$

et fournit la forme *réduite*

$$\frac{d^2X}{dt^2} + KX = 0 \tag{7}$$

avec

$$K = q - p^2 - p'. \tag{8}$$

La forme réduite devant rester la même, si l'on effectue d'abord dans l'équation (1) une transformation quelconque de la forme (2), K est bien un invariant différentiel de l'équation pour les transformations (2). On voit de plus que, si p et K sont connus, q s'en déduit immédiatement.

Trois transformées bien connues jouent un rôle important dans l'étude de l'équation du second ordre : ce sont celles dont dépendent les invariants caractéristiques des groupes (I), (II) et (VIII). Le premier a pour invariant

$$\Delta = x_1x'_2 - x_2x'_1,$$

et la transformée correspondante est

$$\Delta' + 2p\Delta = 0. \tag{9}$$

Le groupe (II) a pour invariant

$$v = \frac{x'_1}{x_1};$$

nous le remplaçons par un autre qui soit un invariant aussi pour les transformations (2), de sorte que les coefficients de la transformée s'expriment au moyen de l'invariant K. Cet invariant est

$$u = \frac{x'_1}{x_1} + p = \frac{x'_1}{x_1} - \frac{1}{2}\,\frac{x_1 x''_2 - x_2 x''_1}{x_1 x'_2 - x_2 x'_1}.$$

La transformée peut se calculer sur l'équation réduite (7). On a

$$u = \frac{X'}{X}, \qquad u' = \frac{X''}{X} - \left(\frac{X'}{X}\right)^2,$$

d'où l'équation de Riccati

$$(10) \qquad u' + u^2 + K = 0.$$

Enfin le groupe (VIII) a pour invariant

$$\eta = \frac{x_1}{x_2}.$$

C'est un invariant pour les transformations (2); on peut donc encore se servir de la réduite (7) pour trouver la transformée dont il dépend On a

$$\eta' = -\frac{X_1 X'_2 - X_2 X'_1}{X_2^2}, \qquad \eta'' = -2\frac{X'_2}{X_2}\eta',$$

donc

$$\left(-\frac{\eta''}{2\eta'}\right)' + \left(-\frac{\eta''}{2\eta'}\right)^2 + K = 0,$$

ou enfin

$$(11) \qquad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 - 2K = 0.$$

3. *De l'intégration de l'équation du second ordre.* — Supposons que nous ayons affaire à l'équation générale du second ordre. Notre théorie conduit alors à ce résultat connu qu'on en peut ramener l'intégration à celle d'une équation de Riccati et à une quadrature. On peut

de plus faire en sorte que ces deux opérations soient indépendantes l'une de l'autre. En effet, si l'on intègre l'équation (9), au moyen de la quadrature

$$\Delta = e^{-2\int p\,dt}, \tag{12}$$

on réduit le groupe de transformations de l'équation au groupe de Δ, c'est-à-dire au groupe linéaire spécial. Si, en même temps, on intègre l'équation (10), cela réduit ce nouveau groupe à la transformation identique, puisqu'il est simple. L'équation donnée doit donc être intégrée. Soient en effet u_1, u_2, u trois intégrales de l'équation (10) : il existe deux intégrales de l'équation réduite (7) qui sont telles que l'on ait

$$\frac{X'_1}{X_1} = u_1, \qquad \frac{X'_2}{X_2} = u_2, \qquad \frac{X'_1 + X'_2}{X_1 + X_2} = u$$

et, en même temps,

$$X_1 X'_2 - X_2 X'_1 = 1.$$

Cela tient à ce que les deux premières de ces formules ne définissent X_1 et X_2 qu'à un facteur constant près. On en conclut

$$(u - u_1)X_1 + (u - u_2)X_2 = 0,$$
$$X_1 X_2 (u_2 - u_1) = 1$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} & X_1 = \sqrt{\frac{u - u_2}{(u - u_1)(u_1 - u_2)}}, \qquad X_2 = -\sqrt{\frac{u - u_1}{(u - u_2)(u_1 - u_2)}}, \\ & x_1 = \sqrt{\Delta}\,X_1, \qquad x_2 = \sqrt{\Delta}\,X_2. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Remarque I. — La présence d'un radical carré dans les formules (13) tient à ce que les groupes de Δ et de u, u_1, u_2 ont en commun la transformation

$$\overline{x_1} = -x_1, \qquad \overline{x_2} = -x_2, \tag{14}$$

de sorte que, après la quadrature (12) et l'intégration de l'équation de Riccati (10), le groupe de transformations *finies* de l'équation se réduit en réalité à la transformation identique et à la transformation (14). Il faut donc encore l'extraction d'une racine carrée pour le réduire à la seule transformation identique.

Remarque II. — Si l'équation proposée a pour groupe de transformations le groupe linéaire spécial, Δ est rationnel, c'est-à-dire que la quadrature (12) disparaît dans le calcul précédent. Il n'y a donc dans ce cas, qui se reconnaît à ce que le coefficient p est la dérivée logarithmique d'une fonction rationnelle, qu'à intégrer l'équation de Riccati (10).

4. *Équations intégrables par quadratures.* — La fonction $\frac{x_1'}{x_1}$ a pour groupe le groupe (II) qui contient parmi ses sous-groupes tous les types qui suivent, c'est-à-dire tous les groupes intégrables. On a donc le théorème suivant, donné autrefois par Liouville [1] :

Théorème. — *Pour qu'une équation linéaire du second ordre soit intégrable par des quadratures, il faut et il suffit que la dérivée logarithmique d'une de ses intégrales soit rationnelle.*

En général, il est avantageux de substituer à $\frac{x_1'}{x_1}$ l'invariant

$$u = \frac{x_1'}{x_1} + p,$$

ce qui donne l'énoncé :

Théorème. — *Pour que l'équation du second ordre* (1) *soit intégrable par des quadratures, il faut et il suffit que la transformée de Riccati*

$$\frac{du}{dt} + u^2 + K = 0 \qquad (K = q - p^2 - \;')$$

ait une intégrale rationnelle.

Les deux énoncés n'en font qu'un si $p = 0$.

Il résulte de là que la forme générale des équations du second ordre intégrables par quadratures est

$$(15) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + (p' + p^2 - R' - R^2)x = 0,$$

R étant une fonction connue de t. On a un système fondamental d'in-

---

(1) *Journal de Liouville*, 1re série, t. IV, p. 423.

tégrales par les formules

$$(16)\qquad x_1 = e^{\int (R-p)\,dt}, \qquad x_2 = x_1 \int e^{-2\int R\,dt}\,dt.$$

Exemple. — Si l'on considère l'équation

$$(17)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a}{t^2} + b^2\right)x = 0,$$

l'équation de Riccati correspondante est

$$u' + u^2 = \frac{a}{t^2} + b^2.$$

Par l'emploi de la décomposition en éléments simples, on voit facilement que toute intégrale rationnelle de cette dernière équation est de la forme

$$u = b - \frac{n}{t} + \frac{F'(t)}{F(t)},$$

$F(t)$ étant un polynôme de degré n. On en conclut, par identification, que $a = n(n+1)$, et que $F(t)$ est donné par l'équation linéaire

$$tF'' + 2(bt - n)F' - 2bnF = 0,$$

qui permet d'en calculer les coefficients de proche en proche.

Remarque. — Nous avons repris l'exemple précédent, quoiqu'il soit bien connu, parce qu'il conduit à un cas d'exception du théorème précédent que nous devons signaler.

Si l'on pose, dans l'équation (17), $\frac{1}{t^2} = z$, on obtient l'équation

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{3}{2z}\frac{dx}{dz} - \frac{1}{z^2}\left(a + \frac{b^2}{z}\right)x = 0,$$

qui, dans le cas $a = n(n+1)$ (n étant entier), est évidemment intégrable par quadratures, sans que la dérivée logarithmique d'aucune de ses intégrales puisse être rationnelle, puisque l'on a

$$\frac{d\,\mathfrak{L}\,x}{dz} = -\frac{1}{2z\sqrt{z}}\,\frac{d\,\mathfrak{L}\,x}{dt}.$$

Il y a cependant dans ce cas, comme il est facile de le vérifier, un invariant du groupe (II) qui est rationnel; seulement, l'expression de $\frac{d\mathfrak{L}x}{dz}$ en fonction de cet invariant, fournie par la méthode générale de calcul indiquée au Chapitre III, n° 2 (deuxième Partie) devient illusoire quand on y remplace les coefficients de l'équation linéaire et cet invariant par leurs valeurs actuelles.

Cas particuliers. — Dans le cas où le groupe de transformations de l'équation (1) est l'un des groupes (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII), l'intégration, qui exige dans le cas précédent trois quadratures, dont deux superposées, se simplifie. Elle se réduit à une seule quadrature pour les trois derniers, à deux pour les autres; ces deux quadratures sont indépendantes dans le cas où le groupe est le groupe (IV). Nous n'effectuons pas ici les calculs, qui ne présentent que peu d'intérêt.

5. *Équations intégrables algébriquement*. — Notre théorie conduit également à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire du second ordre s'intègre algébriquement. Il faut et il suffit que le groupe de transformations *finies* de cette équation soit l'un des groupes *discontinus* d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire homogène à deux variables, c'est-à-dire qu'un invariant caractéristique d'un de ces groupes ait une valeur rationnelle. Ces groupes étant tous contenus dans le groupe linéaire spécial, il en résulte, en particulier, que son invariant Δ doit être rationnel, c'est-à-dire que le coefficient p doit être la dérivée logarithmique d'une fonction rationnelle. Cette condition étant supposée remplie, on peut substituer aux invariants des groupes précédents des combinaisons homogènes de ces invariants qui admettront, en outre, le groupe continu à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale $U = x_1 p_1 + x_2 p_2$; car le groupe commun à une de ces fonctions et à Δ sera précisément le groupe discontinu correspondant. Les fonctions à considérer sont dès lors, par exemple, les *fonctions fondamentales* considérées par M. Klein dans ses Leçons sur l'icosaèdre [1]. Elles dépendent de certaines équations du troisième ordre que M. Klein donne dans le même Ouvrage [2],

---

[1] KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 58.
[2] *Ibid.*, p. 77.

et où ne figure, outre la fonction considérée et ses dérivées, que l'invariant K. Il suffit alors d'écrire successivement que ces diverses équations ont une intégrale rationnelle pour retomber sur les types d'équations donnés par M. Klein [1], et avant lui, sous une autre forme, par M. Fuchs [2].

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

---

1. *Groupes linéaires homogènes à trois variables.* — Le groupe linéaire homogène à trois variables, x_1, x_2, x_3, dépend de neuf paramètres; il est défini par les transformations infinitésimales

$$x_i p_k \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Nous cherchons seulement les types de ceux de ses sous-groupes qui ne sont pas intégrables. Chacun d'eux contient au moins un sous-groupe à trois paramètres ayant la structure du groupe projectif général à une variable [3]; nous cherchons d'abord ces groupes à trois paramètres.

Groupes à trois paramètres. — Soit G l'un d'eux. Interprétons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées homogènes d'un point d'un plan. Un point arbitrairement choisi P reste fixe par au moins une transformation infinitésimale de G, et, au plus, par deux : le sous-groupe ainsi défini laisse invariante une direction D (ou deux) passant par le point. Le groupe G échange entre eux les éléments linéaires (P, D); il laisse donc invariante une équation différentielle du premier ordre, et, par suite, l'enveloppe de ses intégrales. Cette enveloppe admettant au

---

(1) Klein, *Vorlesungen über das Icosaeder*, p. 120.

(2) *Göttinger Nachrichten* (août 1875). — *Borchardt's Journal*, t. 81 et 85.

(3) *Voir* Ch. I, n° 5 (première Partie).

moins deux transformations projectives infinitésimales est un point, une droite ou une conique. De là trois cas :

(a) G laisse invariante une conique. On peut la prendre sous la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Le groupe de cette conique est défini par les quatre transformations

$$x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad x_1 p_2 - x_2 p_1, \quad U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Un sous-groupe de la structure cherchée ne pouvant contenir U, qui est échangeable avec toute transformation linéaire homogène, est alors nécessairement

$$\text{(I)} \qquad \boxed{x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad x_1 p_2 - x_2 p_1},$$

(b) G laisse invariante une droite, $x_3 = 0$ par exemple. Il échange les points de cette droite suivant un groupe isomorphe; ce ne peut être suivant le groupe formé de la seule transformation identique; car, dans ce cas, tous les points de la droite seraient invariants, et G serait un sous-groupe du groupe

$$\boxed{x_3 p_1, \quad x_3 p_2, \quad x_3 p_3, \qquad U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3},$$

qui est intégrable; c'est donc suivant le groupe projectif général, c'est-à-dire en coordonnées homogènes,

$$\text{(II)} \qquad \boxed{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2}.$$

G est donc de la forme

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_2 p_1 + x_3(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3),\\
X_2 &= x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3),\\
X_3 &= x_1 p_2 + x_3(\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 + \nu_3 p_3).
\end{aligned}$$

Il contient les crochets de ces transformations, qui sont de la forme

$$\begin{aligned}
(X_1 X_2) &= 2 x_2 p_1 + 2 x_3(\lambda'_1 p_1 + \lambda'_2 p_2),\\
(X_1 X_3) &= x_2 p_2 - x_1 p_1 + x_3(\mu'_1 p_1 + \mu'_2 p_2),\\
(X_2 X_3) &= 2 x_1 p_2 + 2 x_3(\nu'_1 p_1 + \nu'_2 p_2),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda_3 = \mu_3 = \nu_3 = 0.$$

Si l'on écrit alors que le groupe a la structure voulue, on trouve que les autres constantes sont nécessairement nulles. Le groupe est donc le groupe (II).

(c) G laisse invariant un point. On doit trouver le groupe dualistique du précédent, c'est-à-dire le même.

Groupes contenant le groupe (I). — Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
&X_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, && X_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, && X_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1;\\
&Y_1 = x_2 p_3 + x_3 p_2, && Y_2 = x_3 p_1 + x_1 p_3, && Y_3 = x_1 p_2 + x_2 p_1;\\
&Z_1 = x_1 p_1, && Z_2 = x_2 p_2, && Z_3 = x_3 p_3.
\end{aligned}$$

Formant les crochets, il vient

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned}
&(X_1 Y_1) = 2(Z_3 - Z_2), && (X_1 Y_2) = \quad Y_3, && (X_1 Y_3) = - Y_2;\\
&(X_1 Z_1) = 0, && (X_1 Z_2) = - Y_1, && (X_1 Z_3) = \quad Y_1;
\end{aligned}$$

d'où, en particulier,

$$\text{(2)}\quad (X_1, Z_3 - Z_2) = 2 Y_1, \qquad (X_2, Z_1 - Z_3) = 2 Y_2, \qquad (X_3, Z_2 - Z_1) = 2 Y_3.$$

Cela posé, soit

$$X = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 + \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \mu_3 Z_3$$

une transformation quelconque du groupe considéré (autre que X_1, X_2, X_3). On a

$$\text{(3)}\qquad (X_1(X_1 X)) = 4\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2 - \lambda_3 Y_3 + 2(\mu_3 - \mu_2)(Z_3 - Z_2).$$

Ajoutant les trois transformations analogues à celle-là, il vient une nouvelle transformation du groupe, à savoir

$$2[\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 + (2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) Z_1 + (2\mu_2 - \mu_3 - \mu_1) Z_2 + (2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2) Z_3]$$

et, en retranchant $2X$,

$$(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) Z_1 + (\mu_2 - \mu_3 - \mu_1) Z_2 + (\mu_3 - \mu_1 - \mu_2) Z_3.$$

Si l'on reprend sur cette transformation les mêmes calculs, les relations analogues à (3) fournissent les trois transformations nouvelles

$$(\mu_2-\mu_3)(Z_2-Z_3),\quad (\mu_3-\mu_1)(Z_3-Z_1),\quad (\mu_1-\mu_2)(Z_1-Z_2).$$

Si donc on n'a pas $\mu_1=\mu_2=\mu_3$, le groupe contient les trois transformations

$$(4)\qquad Z_2-Z_3,\quad Z_3-Z_1,\quad Z_1-Z_2,$$

et, par suite, à cause des relations telles que (2), Y_1, Y_2, Y_3.

C'est donc, ou bien le groupe linéaire spécial

$$(\mathrm{III})\qquad \boxed{x_1p_1-x_2p_2,\ \ x_1p_1-x_3p_3,\ \ x_1p_2,\ \ x_1p_3,\ \ x_2p_1,\ \ x_2p_3,\ \ x_3p_1,\ \ x_3p_2},$$

ou le groupe linéaire homogène général.

Si l'on a $\mu_1=\mu_2=\mu_3$, à cause des relations analogues à (3), le groupe contient λ_1Y_1, λ_2Y_2, λ_3Y_3. Si donc on n'a pas en même temps $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, il contient l'une au moins des transformations Y_1, Y_2, Y_3. Dès lors, à cause des relations telles que (1), il contient de nouveau toutes les transformations du groupe linéaire spécial.

Reste enfin le cas $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, $\mu_1=\mu_2=\mu_3\neq 0$, qui donne le groupe

$$(\mathrm{IV})\qquad \boxed{x_2p_3-x_3p_2,\ \ x_3p_1-x_1p_3,\ \ x_1p_2-x_2p_1,\ \ U}.$$

Groupes contenant le groupe (II). — Posons, pour abréger,

$$\begin{array}{lll} X_1=x_2p_1, & X_2=x_1p_2, & S=x_1p_1-x_2p_2; \\ Y_1=x_3p_1, & Y_2=x_3p_2, & U=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3; \\ Z_1=x_1p_3, & Z_2=x_2p_3, & T=x_3p_3, \end{array}$$

et soit une quatrième transformation du groupe ; on peut l'écrire

$$X=\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2+\mu_1Z_1+\mu_2Z_2+\nu T+\rho U.$$

On a alors

$$(X_1X)=-\lambda_2Y_1+\mu_1Z_2,\qquad (S(X_1X))=-\lambda_2Y_1-\mu_1Z_2.$$

Le groupe contient donc λ_2Y_1, μ_1Z_2, et de même λ_1Y_2, μ_2Z_1. Remarquons, de plus, qu'à cause des relations

$$(X_1 Y_2) = -Y_1, \qquad (X_2 Y_1) = -Y_2, \qquad (X_1 Z_1) = Z_2, \qquad (X_2 Z_2) = Z_1,$$

le groupe ne peut pas contenir l'une des transformations Y_1, Y_2, ou Z_1, Z_2, sans contenir l'autre ; et nous voyons qu'il contient soit Y_1 et Y_2, soit Z_1 et Z_2, soit une transformation de la forme $\lambda T + \mu U$. On en conclut facilement que les seuls types nouveaux sont les suivants :

$$\text{(V)} \qquad \boxed{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2, \quad \lambda x_3 p_3 + \mu U},$$

$$\text{(VI)} \qquad \boxed{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2, \quad x_3 p_1, \quad x_3 p_2},$$

$$\text{(VI)}' \qquad \boxed{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2, \quad x_1 p_3, \quad x_2 p_3},$$

$$\text{(VII)} \qquad \boxed{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2, \quad x_3 p_1, \quad x_3 p_2, \quad \lambda x_3 p_3 + \mu U},$$

$$\text{(VII)}' \qquad \boxed{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2, \quad x_1 p_3, \quad x_2 p_3, \quad \lambda x_3 p_3 + \mu U},$$

$$\text{(VIII)} \qquad \boxed{x_1 p_1, \quad x_2 p_1, \quad x_1 p_2, \quad x_2 p_2, \quad x_3 p_3},$$

$$\text{(IX)} \qquad \boxed{x_1 p_1, \quad x_2 p_1, \quad x_1 p_2, \quad x_2 p_2, \quad x_3 p_1, \quad x_3 p_2, \quad x_3 p_3},$$

$$\text{(IX)}' \qquad \boxed{x_1 p_1, \quad x_2 p_1, \quad x_1 p_2, \quad x_2 p_2, \quad x_1 p_3, \quad x_2 p_3, \quad x_3 p_3}.$$

Les groupes (VI) et (VI)', (VII) et (VII)', (IX) et (IX)' sont dualistiques. Le groupe (IX) est le plus général laissant fixe la droite $x_3 = 0$; le groupe (IX)' est le plus général laissant invariant le point $x_1 = x_2 = 0$. Tous les groupes trouvés sont algébriques, sauf ceux qui renferment les constantes λ et μ ; ces derniers sont algébriques quand le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est rationnel [1].

---

[1] Les groupes linéaires homogènes à trois variables ont été tous déterminés par M. Lie.

2. *Sur l'intégration de l'équation du troisième ordre.* — Considérons l'équation générale du troisième ordre

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3p\frac{d^2x}{dt^2} + 3q\frac{dx}{dt} + rx = 0. \tag{5}$$

Elle a pour groupe de transformations le groupe linéaire homogène général. Ce groupe contient un sous-groupe invariant à huit paramètres, qui est le groupe linéaire spécial ; ce dernier est simple et contient des sous-groupes à six paramètres, par exemple

$$\left| \overline{x_2 p_1, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_1 p_2, \quad x_1 p_3, \quad x_2 p_3, \quad x_3 p_3} \right|.$$

Il résulte donc de notre théorie que l'intégration de l'équation doit se ramener à une quadrature, et à l'intégration d'une équation (non linéaire) du second ordre.

C'est ce que l'on peut montrer comme il suit. Posons

$$u = \frac{x'_1}{x_1};$$

u dépend de l'équation du second ordre

$$u'' + 3u^2u' + u^3 + 3p(u' + u^2) + 3qu + r = 0. \tag{6}$$

D'autre part, l'invariant du groupe linéaire spécial

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & x''_1 \\ x_2 & x'_2 & x''_2 \\ x_3 & x'_3 & x''_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

satisfait à l'équation

$$\Delta' + 3p\,\Delta = 0, \tag{8}$$

de sorte qu'il s'obtient par une quadrature

$$\Delta = e^{-3\int p\,dt}. \tag{9}$$

Je dis que, si l'on a effectué cette quadrature et intégré l'équation (6), l'équation proposée (5) se trouve par là même intégrée. Soient, en effet, u_1, u_2, u_3, u quatre intégrales de l'équation (6). Si l'on pose

$$u_1 = \frac{x'_1}{x_1}, \qquad u_2 = \frac{x'_2}{x_2}, \qquad u_3 = \frac{x'_3}{x_3},$$

x_1, x_2, x_3 ne sont définis chacun qu'à une constante près, de sorte qu'on peut les assujettir encore à vérifier la relation (7), Δ étant une des valeurs de l'expression (9), et, en outre, l'équation

$$u = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

On a alors

$$(u - u_1)x_1 + (u - u_2)x_2 + (u - u_3)x_3 = 0$$

et, en différentiant,

$$\begin{aligned}[u' - u'_1 + u_1(u - u_1)]x_1 + [u' - u'_2 + u_2(u - u_2)]x_2 \\ + [u' - u'_3 + u_3(u - u_3)]x_3 = 0,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{x_1}{\xi_1} = \frac{x_2}{\xi_2} = \frac{x_3}{\xi_3} = \rho,$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant des fonctions connues. On a, d'autre part,

$$\Delta = x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 + u_1^2 & u'_2 + u_2^2 & u'_3 + u_3^2 \end{vmatrix} = \xi x_1 x_2 x_3$$

et, par suite,

$$\Delta = \rho^3 \xi \xi_1 \xi_2 \xi_3;$$

donc enfin

$$x_1 = \rho\xi_1, \qquad x_2 = \rho\xi_2, \qquad x_3 = \rho\xi_3, \qquad \rho = \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\xi\xi_1\xi_2\xi_3}}.$$

Remarque I. — La présence d'un radical cubique dans les formules précédentes tient à ce que l'intégration des équations (6) et (8) réduit le groupe de transformations *finies* de l'équation au plus grand sous-groupe commun à Δ, $\frac{x'_1}{x_1}$, $\frac{x'_2}{x_2}$, $\frac{x'_3}{x_3}$, c'est-à-dire au groupe discontinu formé des trois transformations

$$\overline{x_1} = \omega x_1, \qquad \overline{x_2} = \omega x_2, \qquad \overline{x_3} = \omega x_3 \qquad (\omega^3 = 1),$$

de sorte qu'il faut encore l'extraction d'une racine cubique pour le réduire à la seule transformation identique.

Remarque II. — Si le groupe de transformations de l'équation est le groupe linéaire spécial, la valeur de Δ est connue sans quadrature, c'est-à-dire que p est la dérivée logarithmique d'une fonction rationnelle; l'intégration de l'équation n'exige donc que la seule intégration de l'équation (6).

3. Nous laissons de côté le cas où l'équation est intégrable par quadratures, nous bornant sur ce sujet aux indications générales données au Chapitre VI, n° 2 (IIe Partie). Nous allons supposer successivement que le groupe de transformations de l'équation se confond avec chacun des groupes précédemment trouvés.

Groupe IX. — C'est le groupe de $\frac{x'_3}{x_3}$. Cette fonction étant rationnelle, on en déduit x_3 par une quadrature; on est alors ramené, par le procédé classique, à intégrer une équation linéaire du second ordre, et l'on a ensuite x_1 et x_2 par deux nouvelles quadratures. Donc, en résumé, une équation linéaire du second ordre et trois quadratures (indépendantes), ou une équation de Riccati et quatre quadratures.

Groupe (IX)'. — Ce cas se ramène au cas précédent par la considération de l'équation adjointe. On peut opérer autrement: le groupe (IX)' est le groupe de $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(x_1 x'_2 - x_2 x'_1)$; x_1 et x_2 sont donc intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels. Cette équation étant intégrée, on a x_3 par trois quadratures successives.

Groupe (VIII). — Les deux fonctions $\frac{x'_3}{x_3}$ et $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(x_1 x'_2 - x_2 x'_1)$ sont rationnelles l'une et l'autre. On a x_1 et x_2 en intégrant une équation linéaire du second ordre, et x_3 par une quadrature.

Groupe (VII). — Tout se passe comme pour le groupe (IX), sauf que l'intégration de l'équation linéaire dont dépendent $\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)$ et $\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$ se ramène à celle d'une équation de Riccati. Cela tient à ce que la fonction

$$\Psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x_2}{x_3}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)$$

s'obtient sans quadrature quand on connaît x_3, puisque la fonction

$$\Psi^{\lambda+\mu} x_3^{2\lambda}$$

admet le groupe, et se trouve par conséquent rationnelle.

Groupe (*VII*)'. — On ramène au cas précédent en passant à l'équation adjointe.

Groupe (*VI*). — x_3 est rationnel. On a donc x_1 et x_2 en intégrant une équation linéaire du second ordre et en effectuant deux quadratures. L'une de ces quadratures est même inutile, car Δ est rationnel, et, par suite, connaissant x_3, x_1 et $\left(\frac{x_2}{x_3}\right)'$, on aura x_3 sans intégration nouvelle.

Groupe (*VI*)'. — On ramène au cas précédent en passant à l'équation adjointe.

Groupe (*V*). — L'équation linéaire du second ordre qui a pour intégrales x_1 et x_2 est à coefficients rationnels. De plus la fonction

$$\frac{(x_1 x_2' - x_2 x_1')^{\lambda+\mu}}{x_3^{2\mu}}$$

est rationnelle, de sorte que, cette équation une fois intégrée, x_3 est également connu.

Groupe (*II*). — x_3 est rationnel et $x_1 x_2' - x_2 x_1'$ également; x_1 et x_2 dépendent donc d'une équation de Riccati seulement.

Résumé. — Tous ces cas n'offrent donc rien de bien intéressant. Dans l'ensemble ils sont caractérisés par ce fait que l'équation en $\frac{x'}{x}$ ou l'équation analogue correspondant à l'équation adjointe a une intégrale rationnelle. On a alors par une quadrature (qui peut disparaître dans certains cas) une intégrale de l'équation ou de son adjointe, et l'on est ramené, par le procédé classique, à intégrer une équation linéaire du second ordre.

4. Il nous reste à examiner les deux cas où le groupe de transformations de l'équation appartient au type (I) ou (IV).

L'invariant du groupe (I) est $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, celui du groupe (IV)

$\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Le second cas se ramène donc au premier après une quadrature, et nous sommes conduits au problème suivant, déjà traité par Laguerre (¹) et Halphen (²).

Problème. — *Intégrer une équation linéaire du troisième ordre, connaissant l'expression, en fonction de la variable indépendante, d'une forme quadratique, à coefficients constants, de ses intégrales.*

Le groupe (I) étant simple, et admettant des sous-groupes à deux paramètres, l'intégration doit se ramener, d'après notre théorie, à celle d'une équation du premier ordre. Nous allons montrer qu'effectivement tout revient à intégrer une certaine équation de Riccati.

En désignant par $x_1 x_2 x_3$ un système fondamental d'intégrales, convenablement choisi, nous pouvons supposer que la forme quadratique connue est

$$x_2^2 - x_1 x_3 = \alpha. \tag{11}$$

Les équations finies du groupe linéaire homogène qu'elle admet s'obtiennent facilement : considérons en effet la forme quadratique

$$x_1 \xi^2 + 2 x_2 \xi\eta + x_3 \eta^2.$$

Si l'on y fait une substitution linéaire à déterminant un

$$\xi = \lambda\xi' + \lambda'\eta', \qquad \eta = \mu\xi' + \mu'\eta', \qquad (\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1),$$

le discriminant α n'est pas altéré et les coefficients deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \lambda^2 x_1 + 2\lambda\mu x_2 + \mu^2 x_3 \\ \overline{x}_2 &= \lambda\lambda' x_1 + (\lambda\mu' + \mu\lambda') x_2 + \mu\mu' x_3 \\ \overline{x}_3 &= \lambda'^2 x_1 + 2\lambda'\mu' x_2 + \mu'^2 x_3 \end{aligned}\right| \quad (\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1). \tag{12}$$

Ces relations définissent un groupe linéaire et homogène à trois paramètres : c'est donc le groupe cherché.

La première et la troisième des équations (12) montrent que x_1 et x_3 sont intégrales d'une même équation différentielle du second ordre,

(¹) *Comptes rendus*, 1879.
(²) *Ibid.*, t. CI.

dont les coefficients doivent s'exprimer rationnellement au moyen de α, des coefficients de l'équation linéaire donnée et de leurs dérivées. Nous allons former cette équation. Auparavant nous remarquons que chacune des fonctions

$$\alpha_1 = x_2'^2 - x_1' x_3', \qquad \alpha_2 = x_2''^2 - x_1'' x_3'', \qquad \beta_2 = x_2 x_2' - \tfrac{1}{2}(x_1 x_3' + x_3 x_1'),$$
$$\beta_1 = x_2 x_2'' - \tfrac{1}{2}(x_1 x_3'' + x_3 x_1''), \qquad \beta = x_2' x_2'' - \tfrac{1}{2}(x_1' x_3'' + x_3' x_1'')$$

s'exprime rationnellement au moyen des quantités connues. En effet, en différentiant cinq fois de suite la relation (11), et en se servant de l'équation linéaire donnée pour faire disparaître les dérivées de x_1, x_2, x_3 d'ordre supérieur au second, on obtient cinq équations linéaires, pour déterminer ces cinq quantités. Le déterminant de ces équations [1] n'est nul que s'il existe une équation linéaire du cinquième ordre dont α soit une intégrale. En vertu de la manière dont elle est formée, cette équation admet pour intégrales chacune des fonctions

$$x_1^2, \quad x_2^2, \quad x_3^2, \quad x_2 x_3, \quad x_3 x_1, \quad x_1 x_2,$$

de sorte qu'il existe entre ces six fonctions une relation linéaire et homogène à coefficients constants, c'est-à-dire entre x_1, x_2, x_3 une relation quadratique et homogène à coefficients constants. Cela revient à dire que α est identiquement nul, cas singulier que nous écartons pour l'instant. Nous pouvons donc, dans ce qui suit, considérer comme connues les six fonctions

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \beta, \quad \beta_1, \quad \beta_2.$$

Cela posé, multiplions les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_1' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_1'' \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}x_3 & x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}x_3' & x_2' & -\frac{1}{2}x_1' & 0 \\ -\frac{1}{2}x_3'' & x_2'' & -\frac{1}{2}x_1'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

---

[1] Ce déterminant est l'invariant relatif (au sens de Laguerre et Halphen) :

$$S = 2(r - 3pq + 2p^3) - 3(q' - 2pp') + p''.$$

dont le premier est identiquement nul; nous obtenons l'équation cherchée

$$(13)\qquad \Phi(x_1, x'_1, x''_1) = -\begin{vmatrix} \alpha & \beta_2 & \beta_1 & x_1 \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta & x'_1 \\ \beta_1 & \beta & \alpha_2 & x''_1 \\ x_1 & x'_1 & x''_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On a, d'une manière analogue,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}x_3 & x_2 & -\frac{1}{2}x_1 \\ -\frac{1}{2}x'_3 & x'_2 & -\frac{1}{2}x'_1 \\ -\frac{1}{2}x''_3 & x''_2 & -\frac{1}{2}x''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta \\ \beta_1 & \beta & \alpha_2 \end{vmatrix} = D,$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad 4D = -\Delta^2,$$

ce qui montre que le premier membre de l'équation (13) n'est jamais, ni un carré, ni un produit de facteurs linéaires.

La relation

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_1 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}x_3 & x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}x'_3 & x'_2 & -\frac{1}{2}x'_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}x''_3 & x''_2 & -\frac{1}{2}x''_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta_2 & \beta_1 & x_1 \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta & x'_1 \\ \beta_1 & \beta & \alpha_2 & x''_1 \\ x_3 & x'_3 & x''_3 & -2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad x_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + x'_3\frac{\partial\Phi}{\partial x'_1} + x''_3\frac{\partial\Phi}{\partial x''_1} + 4D = 0,$$

nous sera également utile. Signalons enfin l'équation à laquelle satisfait x_2

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_2 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}x_3 & x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}x'_3 & x'_2 & -\frac{1}{2}x'_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}x''_3 & x''_2 & -\frac{1}{2}x''_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta_2 & \beta_1 & x_2 \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta & x'_2 \\ \beta_1 & \beta & \alpha_2 & x''_2 \\ x_2 & x'_2 & x''_2 & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\Phi(x_2, x'_2, x''_2) = D.$$

Je dis maintenant que tout revient à intégrer l'équation (13). Soient en effet u_1 et u_2 deux intégrales quelconques de cette équation; on prendra $x_1 = K_1 u_1$, $x_3 = K_2 u_2$, K_1 et K_2 étant des constantes dont on déterminera le produit en se servant de la relation (15); on tirera ensuite x_2 de l'équation (11), et l'intégration sera achevée.

Occupons-nous donc de l'équation (13) (¹). Son intégrale générale étant de la forme

$$\overline{x_1} = \lambda^2 x_1 + 2\lambda\mu x_2 + \mu^2 x_3,$$

on peut choisir s de manière que $\overline{x'_1} + s\overline{x_1}$ soit, en λ, μ, un carré parfait, c'est-à-dire de manière que

$$w = \sqrt{x'_1 + s x_1}$$

satisfasse à une équation linéaire du second ordre. Il suffit à cet effet de prendre pour s l'une des racines de l'équation

$$(x'_2 + s x_2)^2 - (x'_1 + s x_1)(x'_3 + s x_3) = 0,$$

c'est-à-dire

(16) $$\alpha s^2 + 2\beta_2 s + \alpha_1 = 0.$$

Je suppose s ainsi choisi, et je cherche d'abord l'équation en $v = x'_1 + s x_1$; partons des relations

(17) $$\left\{\begin{aligned} v &= x'_1 + s x_1, \\ v' &= x''_1 + s x'_1 + s' x_1, \\ v'' &= x''_1(s - 3p) + x'_1(2s' - 3q) + x_1(s'' - r). \end{aligned}\right.$$

Leur déterminant peut s'écrire

$$\theta = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ s' & s & 1 & 0 \\ s'' - r & 2s' - 3q & s - 3p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Je multiplie deux fois de suite par ce déterminant les deux membres

(¹) Les équations de cette nature ont été considérées par M. Appell (*Journal de Liouville*, 1889). La réduction de l'intégration que nous indiquons équivaut au procédé indiqué par Halphen (*Comptes rendus*, t. CI).

de l'équation (13), et j'obtiens

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & v \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & v' \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & v'' \\ v & v' & v'' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

avec

$$F(x, y, z) = \alpha x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2 + 2\beta yz + 2\beta_1 zx + 2\beta_2 xy,$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= F(s, 1, 0), \\ A_{22} &= F(s', s, 1), \\ A_{33} &= F(s'' - r, 2s' - 3q, s - 3p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} = A_{21} &= s' F_1(s, 1, 0) + s F_2(s, 1, 0) + F_3(s, 1, 0), \\ A_{13} = A_{31} &= (s'' - r) F_1(s, 1, 0) + (2s' - 3q) F_2(s, 1, 0) + (s - 3p) F_3(s, 1, 0), \\ A_{23} = A_{32} &= (s'' - r) F_1(s', s, 1) + (2s' - 3q) F_2(s', s, 1) + (s - 3p) F_3(s', s, 1). \end{aligned}$$

Or on a

$$A_{11} = F(s, 1, 0) = \alpha s^2 + 2\beta_2 s + \alpha_1 = 0,$$

et l'on trouve, en différentiant,

$$A_{12} = A_{21} = 0, \qquad A_{13} = A_{31} = -A_{22}, \qquad A_{23} = A_{32} = \frac{1}{2}\frac{dA_{22}}{dt}.$$

Si donc on pose finalement

$$\begin{aligned} H &= F(s', s, 1) = A_{22}, \\ K &= F(s'' - r, 2s' - 3q, s - 3p) = A_{33}. \end{aligned}$$

l'équation cherchée s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -H & v \\ 0 & H & \frac{1}{2}\frac{dH}{dt} & v' \\ -H & \frac{1}{2}\frac{dH}{dt} & K & v'' \\ v & v' & v'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$H^2(2v''v - v'^2) + H\frac{dH}{dt}v'v + \left[HK - \frac{1}{4}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]v^2 = 0.$$

On a, par suite, pour l'équation en w,

$$(18) \qquad w'' + \frac{1}{2H}\frac{dH}{dt}w' + \frac{1}{4}\left[\frac{K}{H} - \frac{1}{4H^2}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]w = 0.$$

C'est donc bien une équation linéaire; on voit de plus que, le coefficient de w' étant la dérivée logarithmique d'une fonction connue, l'intégration de l'équation (18) se ramène simplement à celle d'une équation de Riccati

$$(19) \qquad Z' + Z^2 + \left[\frac{K}{4H} + \frac{1}{8H^2}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4H}\frac{d^2H}{dt^2}\right] = 0.$$

Les valeurs de x_1 se déduisent de celles de v et par conséquent de w en résolvant les équations (17). Il nous reste à montrer que le déterminant θ de ces équations n'est pas nul. Cela résultera de son expression au moyen des quantités $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2$, que l'on obtient, ainsi que celle de H, de la manière suivante : multipliant le déterminant D deux fois de suite par θ, on obtient, en se servant de relations déjà employées,

$$D\theta^2 = -H^3.$$

Une transformation de déterminant facile donne d'autre part

$$(\alpha s + \beta_2)\theta = -H.$$

Remarquant enfin que

$$(\alpha s + \beta_2)^2 = \beta_2^2 - \alpha_1\alpha_2,$$

on obtient les formules annoncées

$$(20) \qquad H = \frac{D}{\alpha\alpha_1 - \beta_2^2}, \qquad \theta = \frac{D}{(\beta_2^2 - \alpha\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cas particulier. — Revenons au cas où $\alpha = 0$. La valeur générale de x_1 est déjà de la forme $(\lambda\varphi + \mu\psi)^2$. L'équation en $w = \sqrt{x_1}$ doit donc être déjà une équation linéaire.

Supposons, pour simplifier, que, par une transformation bien connue, on ait fait disparaître le second terme dans l'équation linéaire donnée, c'est-à-dire que l'on ait $p = 0$. On trouve, par différentiations successives,

$$\alpha = 0, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \alpha_1 + \beta_1 = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha_2 - 3q\alpha_1 = 0,$$

et l'équation (13) est alors

$$2x_1 x_1'' - x_1'^2 + 3qx_1^2 = 0.$$

Si donc on pose $x_1 = w^2$, w est fourni par l'équation

$$4w'' + 3qw = 0.$$

Si $w_1 w_2$ en est un système fondamental d'intégrales, on prendra

$$x_1 = w_1^2, \qquad x_3 = w_2^2, \qquad x_2 = w_1 w_2,$$

et l'équation proposée sera intégrée.