F. BRIOSCHI

Sur une classe d'équations du cinquième degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 337-342
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__337_0>

SUR UNE CLASSE
D'ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ,

PAR M. F. BRIOSCHI.

1. On sait que l'équation du sixième degré

$$(1)\qquad (z-a)^6-4a(z-a)^5+10b(z-a)^3-4c(z-a)+5b^2-4ac=0$$

est résoluble par les fonctions elliptiques en deux cas : si $a=0$, b, c étant certaines fonctions du module; ou si $b=0$ et a, c fonctions du module.

Soient x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 les racines d'une équation du cinquième degré, et φ_∞ une fonction cyclique de ces racines, fonction qui se reproduit, changée de signe, lorsqu'on opère sur elle la substitution $\begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix}$. Soient encore φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les fonctions qu'on déduit de φ_∞ par la substitution $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$ $(s=0, 1, 2, 3, 4)$; si l'on pose

$$(2)\qquad \sqrt{z_\infty}=\tfrac{1}{2}\Sigma\varphi+\omega\varphi_\infty,$$

où

$$\Sigma\varphi=\varphi_\infty+\varphi_0+\ldots+\varphi_4,\qquad \omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

et si l'on indique par $\sqrt{z_0}$, $\sqrt{z_1}$, ..., $\sqrt{z_4}$ les fonctions qu'on peut déduire de $\sqrt{z_\infty}$ par la même substitution $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$; les quantités z_∞, z_0, ..., z_4 ainsi obtenues sont, comme il est connu, racine d'une équation (1).

Soit

$$f=(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5=0$$

l'équation du cinquième degré, dont les racines sont $x_0, x_1, \ldots, x_4$. En désignant avec u_∞ la fonction cyclique

$$u_\infty = a_0^2(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_0)=a_0^2\quad(01234),$$

fonction laquelle se reproduit, changée de signe, par la substitution $\binom{r}{4r}$; et si l'on désigne avec u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 les fonctions qu'on en déduit par la substitution $\binom{r}{3r^3+s}$, on a un type de fonctions φ.

Si enfin l'on désigne avec v_∞ la fonction qu'on déduit de u_∞ au moyen de la substitution $\binom{r}{2r}$, et l'on observe qu'elle aura la même propriété de u_∞ quant à la substitution $\binom{r}{4r}$, on obtiendra de la manière indiquée les fonctions $v_0, v_1, \ldots, v_4$.

Ces douze fonctions u, v ont des propriétés remarquables que je résume en renvoyant pour la démonstration à des travaux connus (¹). On a, en premier lieu,

$$(3)\qquad \Sigma u = 2(u_\infty + v_\infty),\qquad \Sigma v = 2u_\infty,$$

desquelles on déduit dix relations, en opérant avec la substitution $\binom{r}{3r^3+s}$.

De même

$$(4)\qquad \begin{cases} \Sigma u^3 = -u_\infty^3 - v_\infty^3 + \frac{3}{2}(l-3\delta)u_\infty + \frac{3}{2}(l-\delta)v_\infty, \\ \Sigma v^3 = -u_\infty^3 + 3v_\infty^3 + \frac{3}{2}(l+\delta)u_\infty - \frac{3}{2}(l+3\delta)v_\infty, \end{cases}$$

et enfin

$$(5)\qquad \begin{cases} \Sigma u^5 = 2u_\infty^5 + 2v_\infty^5 - \frac{5}{2}(l-3\delta)u_\infty^3 - \frac{5}{2}(l+\delta)v_\infty^3 \\ \qquad\qquad + \frac{5}{4}(l-3\delta)^2 u_\infty + \frac{5}{4}(l-3\delta)(l-\delta)v_\infty, \\ \Sigma v^5 = 2u_\infty^5 - \frac{5}{2}(l-\delta)u_\infty^3 + \frac{5}{2}(l+3\delta)v_\infty^3 \\ \qquad\qquad + \frac{5}{4}(l+3\delta)(l+\delta)u_\infty - \frac{5}{4}(l+3\delta)^2 v_\infty, \end{cases}$$

(¹) *Sur l'équation du cinquième degré*, par M. Hermite; 1866.

et les relations correspondantes obtenues par la substitution mentionnée.

La quantité l est, sauf un coefficient numérique, l'invariant du quatrième degré de f; et δ est la racine carrée du discriminant (sauf un coefficient numérique), et l'on a

$$u_\infty v_\infty = u_0 v_0 = \ldots = u_4 v_4 = -\delta. \tag{6}$$

Les coefficients u_∞^2, u_0^2, ..., u_4^2 sont racines de l'équation suivante, dans laquelle k est un invariant du douzième degré de f:

$$\left\{\begin{aligned} & u^{12} - (l - 3\delta)u^{10} + \tfrac{1}{4}(l^2 - 2l\delta + 5\delta^2)u^8 - ku^6 \\ & \quad + \tfrac{1}{4}(l^2 + 2l\delta + 5\delta^2)\delta^2 u^4 - (l + 3\delta)\delta^4 u^2 + \delta^6 = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

2. Supposons que la relation entre invariants

$$k = \tfrac{1}{2}\delta(l^2 - 4l\delta + 9\delta^2) \tag{8}$$

soit satisfaite; on voit tout de suite que dans ce cas le premier membre de l'équation (7) a pour facteur $u^2 - \delta$, et, en conséquence, l'une des six fonctions u sera égale à $\pm \delta^{\frac{1}{2}}$, et, à cause des relations (6), on aura la fonction correspondante v égale à $\mp \delta^{\frac{1}{2}}$.

Soient λ_0, λ_1, ..., λ_{11} douze indéterminées, et posons

$$\begin{aligned} \varphi = {} & \lambda_0 u^5 + \lambda_1 v^5 + (\lambda_2 l + \lambda_3 \delta)u^3 + (\lambda_4 l + \lambda_5 \delta)v^3 \\ & + (\lambda_6 l^2 + \lambda_7 l\delta + \lambda_8 \delta^2)u + (\lambda_9 l^2 + \lambda_{10} l\delta + \lambda_{11}\delta^2)v, \end{aligned}$$

u, v étant deux quelconques fonctions correspondantes. Au moyen des relations (3), (4), (5), on obtient

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma\varphi = {} & l_0 u^5 + l_1 v^5 + (l_2 l + l_3 \delta)u^3 + (l_4 l + l_5 \delta)v^3 \\ & + (l_6 l^2 + l_7 l\delta + l_8 \delta^2)u + (l_9 l^2 + l_{10} l\delta + l_{11}\delta^2)v, \end{aligned}$$

les l_0, l_1, ... étant des fonctions linéaires de λ_0, λ_1, ...

En posant $l_r + \omega\lambda_r = t_r$, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{z} = {} & t_0 u^5 + t_1 v^5 + (t_2 l + t_3 \delta)u^3 + (t_4 l + t_5 \delta)v^3 \\ & + (t_6 l^2 + t_7 l\delta + t_8 \delta^2)u + (t_9 l^2 + t_{10} l\delta + t_{11}\delta^2)v. \end{aligned}\right.$$

et l'on trouve que

$$t_1 = \omega t_0, \qquad t_2 = \tfrac{5}{2}(\omega - 1)t_0 - (2\omega - 1)t_4, \qquad t_3 = \tfrac{5}{2}(3\omega - 1)t_0 - (2\omega - 1)t_5,$$
$$t_9 = -\tfrac{5}{4}(2\omega - 1)t_0 + \tfrac{3}{2}(\omega - 1)t_4 + \omega t_6,$$
$$t_{10} = -\tfrac{5}{2}\omega t_0 - \tfrac{3}{2}(3\omega - 1)t_4 + \tfrac{3}{2}(\omega - 1)t_5 + \omega t_7,$$
$$t_{11} = \tfrac{15}{4}(4\omega - 3)t_0 - \tfrac{3}{2}(3\omega - 1)t_5 + \omega t_8.$$

Supposons maintenant qu'une des expressions (9), pour $\sqrt{z}$, s'annule lorsqu'on pose $u = \delta^{\frac{1}{2}}$, $v = -\delta^{\frac{1}{2}}$; les indéterminées t_0, t_1, ... doivent dans ce cas satisfaire les trois conditions

$$t_0 - t_1 + t_3 - t_5 + t_8 - t_{11} = 0, \qquad t_2 - t_4 + t_7 - t_{10} = 0, \qquad t_6 - t_9 = 0.$$

Les indéterminées se réduisent dans ce cas à deux :

$$t_0 = p, \qquad t_4 l + t_5 \delta = q,$$

et l'expression $\sqrt{z}$ prend la forme

$$\sqrt{z} = (P + Q\sqrt{5})p + (L + M\sqrt{5})q,$$

étant

$$Q = \tfrac{1}{2}v^5 + \tfrac{5}{4}lu^3 + \tfrac{15}{4}\delta u^3 - \tfrac{5}{8}l^2(u + v) - \tfrac{5}{4}l\delta u - \tfrac{1}{8}\delta^2(5u - 21v),$$
$$P = -Q + u^5 - \tfrac{5}{2}(l + \delta)u^3 - \tfrac{5}{2}l\delta v - \tfrac{1}{2}\delta^2(22u + 25v),$$
$$L = 2u^3 + v^3 - \tfrac{3}{2}l(u + v) + \delta(u + 2v), \qquad M = -u^3 - \tfrac{1}{2}\delta(u + 3v),$$

et les polynomes P, Q, L, M s'annulent pour $u = -v = \delta^{\frac{1}{2}}$.

On est ainsi arrivé à ce résultat : qu'une des racines z_∞, z_0, ..., z_4 de l'équation (1) est nulle, et que la somme des autres peut s'annuler en disposant de l'indéterminée $p : q$.

En effet, l'addition des racines z donne

$$\Sigma z = \alpha p^2 + 2\beta pq + \gamma q^2,$$

α, β, γ étant des invariants des degrés 20^e^, 16^e^, 12^e^.

La condition (8) entre invariants d'une équation du 5^e^ degré conduit donc à une résolvante jacobienne (1), pour laquelle sont

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

et vu que dans ce cas la résolvante même se réduit à l'équation binome

$$z^5 - 4c = 0.$$

On a le théorème :

Les équations du 5e *degre, pour lesquelles la relation* (8) *est satisfaite, sont résolubles algébriquement.*

3. Un cas particulier de ce type d'équations est donné par la théorie des fonctions elliptiques, en considérant la division des périodes par *onze*.

Si l'on pose

$$\frac{2\omega}{11} = m$$

et

$$(9) \quad x_0 = p(m), \quad x_1 = p(2m), \quad x_2 = p(4m), \quad x_3 = p(4m), \quad x_4 = p(5m)$$

de la formule pour la multiplication des fonctions elliptiques [1]

$$p(nu) - p(u) = -\frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2},$$

on déduit que

$$u_0 = (03412) = \frac{\psi_7\psi_9}{\psi_2^3\psi_3^2\psi_4^3\psi_5^2}, \qquad v_0 = (04231) = -\frac{\psi_6^2\psi_7\psi_8}{\psi_2^2\psi_3^3\psi_4^3\psi_5^4};$$

mais, étant dans ce cas $\psi_{11} = 0$, on a

$$\psi_7 = \frac{\psi_4\psi_6^3}{\psi_5^3}, \qquad \psi_8 = \frac{\psi_3\psi_6^5}{\psi_5^5}, \qquad \psi_9 = \frac{\psi_2\psi_6^7}{\psi_5^7},$$

en conséquence

$$u_0 = -v_0,$$

et l'équation du 5e degré, dont les racines sont les $x_0, x_1, \ldots$ (9), est résoluble algébriquement, comme il est connu.

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, Ire Partie, p. 100.

4. En désignant par A, B, C les invariants des 4^e, 8^e, 12^e degrés d'une forme binaire du 5^e ordre, on a

$$l = 5^4.A, \qquad \delta^2 = 5^5(A^2 - 128B),$$
$$k = \frac{4.5^9}{3}(3A^3 - 3^2.4^2.AB + 5.4^4.C).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), on obtient la relation de condition pour la classe d'équations du 5^e degré considérée, formée avec les invariants A, B, C.