ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. DOLBNIA

Étude directe des intégrales abéliennes du genre un

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 393-430

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__393_0>

ÉTUDE DIRECTE

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES DU GENRE UN,

PAR M. J. DOLBNIA.

1. La présente étude portera sur les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}.$$

On sait que ce sont les seules intégrales abéliennes du type

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-c)^\lambda}},$$

dont le genre est égal à l'unité et qui pour cela appartient à la catégorie des intégrales elliptiques. La réduction de ces intégrales aux elliptiques présente aussi peu d'intérêt que de difficulté. Nous nous sommes posé un tout autre problème. Considérant chacune des intégrales comme argument, nous allons étudier la variable x comme fonction de l'argument donné; trouver les périodes de cet argument; élucider enfin les principes généraux de l'inversion de toutes les intégrales abéliennes du genre *un* par les fonctions elliptiques de Weierstrass. Considérons d'abord l'intégrale

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

Il est facile de voir qu'au voisinage du point

$$x - a = 0$$

nous aurons

$$x - a = u^3 F_1(u),$$

où $F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(0) \neq 0.$$

Nous avons ensuite

$$u = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} + \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[2]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

Posant

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} = \omega_1,$$

il vient

$$u - \omega_1 = \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

Par conséquent,

$$x - b = (u - \omega_1)^3 F_2(u);$$

$F_2(u)$ est une fonction holomorphe, satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega_1) \neq 0.$$

Posons maintenant

$$\int_a^c \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} = \omega_2;$$

nous avons

$$x - c = (u - \omega_2)^3 F_3(u),$$

$F_2(u)$ est une fonction holomorphe, satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega_2) \neq 0.$$

Posant enfin

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} = \sigma,$$

nous avons

$$x = (u - \sigma)^{-1} F_4(u),$$
$$\lim(u - \sigma) = 0,$$
$$F_4(\sigma) \neq 0;$$

$F_4(u)$ est une fonction holomorphe.

L'étude que nous venons de faire démontre que x est une fonction monodrome de l'argument u sur toute la surface de Riemann. Cette fonction comporte trois zéros et, comme il est facile de le démontrer, elle a trois infinis en trois points différents de la surface de Riemann. En effet, posant

$$\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2} = y,$$

nous voyons que x et y sont liés par une équation de la forme

$$y^3 - x^6 + A x^5 + \ldots + B = 0.$$

Cette équation exprime une courbe dont l'élément à l'infini est donné par l'équation

$$y^3 - x^6 = 0,$$

ou

$$(y - x^2)(y - \alpha^2 x^2)(y - \alpha x^2) = 0.$$

La forme de cette équation montre que x a trois infinis de premier ordre dans chacun des trois feuillets de la surface de Riemann. Conformément à la nature réelle des fonctions elliptiques de Weierstrass l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'obtiendra le plus simplement dans le cas où tous les trois infinis de x seront réunis en un seul point de la surface de Riemann et pour cela il faut transporter à l'infini le point initial de ramification a par la transformation

$$x - a = \frac{1}{\xi}.$$

L'intégrale u prend alors la forme

$$(1) \qquad z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi - a')^2(\xi - b')^2}}.$$

Nous avons ici trois points de ramification

$$a', \quad b', \quad \infty.$$

En développant, nous avons

$$\xi = z^{-3}\,\mathrm{F}(z),$$
$$\lim z = 0,$$

$\mathrm{F}(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$\mathrm{F}(0) \neq 0.$$

La fonction la plus simple de Weierstrass pour laquelle l'infini de troisième ordre est au point

$$z = 0$$

est $\wp' z$.

De l'équation (1) nous tirons

$$(2) \qquad \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^3 = (\xi - a')^2(\xi - b')^2.$$

Posons

$$\xi = \alpha\wp' z + \beta.$$

De l'équation différentielle (2), nous avons sans difficulté

$$\xi = \frac{27}{2}\wp' z + \frac{a' + b'}{2},$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2,$$

$$\wp' z = \sqrt{4\wp^3 z + \left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2} \quad (^1).$$

Il n'est pas sans intérêt de rechercher si la fonction trouvée pour ξ

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, mai 1893.

satisfait aux conditions précitées. Les fonctions

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi - a' = \dfrac{27}{2}\,\wp' z - \dfrac{a'-b'}{2}, \\ \xi - b' = \dfrac{27}{2}\,\wp' z + \dfrac{a'-b'}{2} \end{cases}$$

doivent avoir les zéros triples ; en d'autres termes nous devons avoir un développement de la forme

$$\xi - a' = a_3(z-\omega)^3 + a_4(z-\omega)^4 + \ldots,$$
$$\xi - b' = b_3(z-\varpi)^3 + b_4(z-\varpi)^4 + \ldots,$$

où

$$\omega = \int_\infty^{a'} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi-a')^2(\xi-b')^2}}, \qquad \varpi = \int_\infty^{b'} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi-a')^2(\xi-b')^2}},$$

L'équation (3) nous donne

$$\frac{27}{2}\,\wp'\omega = \frac{a'-b'}{2},$$

ou

$$4\wp^3\omega + \left(\frac{a'-b'}{27}\right)^2 = \left(\frac{a'-b'}{27}\right)^2,$$

ou bien

$$\wp\omega = 0.$$

En conséquence,

$$\wp''\omega = 6\wp^2\omega - \frac{1}{2}\,g_2 = 0,$$

$$\wp'''\omega = 12\,\wp\omega\,\wp'\omega = 0,$$

$$\wp^{\text{IV}}\omega = 12(\wp\omega\,\wp''\omega + \wp'^2\omega) = 12\,\wp'^2\omega \neq 0.$$

Prenant en considération que

$$\xi - a' = \left(\frac{27}{2}\,\wp'\omega - \frac{a'-b'}{2}\right) + (z-\omega)\,\frac{27}{2}\,\wp''\omega + \frac{(z-\omega)^2}{1.2}\,\frac{27}{2}\,\wp'''\omega + \frac{(z-\omega)^3}{1.2.3}\,\frac{27}{2}\,\wp^{\text{IV}}\omega + \ldots,$$

nous concluons

$$\xi - a' = \frac{9}{4}\,(z-\omega)^3\,\wp\omega^{\text{IV}} + \ldots. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous démontrerons de la même façon l'égalité

$$\xi - b' = b_3(z - \varpi)^3 + b_4(z - \varpi)^4 + \ldots.$$

2. Analysons maintenant l'intégrale

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}.$$

Étudiant, suivant les règles usuelles, les formes du développement x en fonction de u au voisinage du point

$$x - a = 0,$$

nous aurons comme résultat

$$x - a = u^2 F_1(u),$$

$F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(0) \neq 0.$$

Posant

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} = \omega,$$

nous aurons

$$u - \omega = \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

d'où il suit que

$$x - b = (u - \omega)^4 F_2(u),$$

$F_2(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega) \neq 0.$$

Posant encore

$$\int_a^c \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} = \varpi,$$

nous voyons que

$$x - c = (u - \varpi)^4 F_3(u),$$

$F_3(u)$ est une fonction holomorphe, et

$$F_3(\varpi) \neq 0.$$

Enfin posant

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} = \sigma,$$

nous trouverons facilement que

$$x = (u-\sigma)^{-1} F_4(u),$$

$F_4(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_4(\sigma) \neq 0.$$

Ainsi x est une fonction monodrome de u sur toute la surface de Riemann. La fonction $x-b$ a quatre zéros, tandis que $x-a$ en a apparemment deux. On s'assurera facilement que $x-a$ a deux zéros doubles. En effet, posant

$$\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3} = y,$$

nous voyons que l'élément de la courbe au voisinage du point de ramification $x-a=0$ est exprimé par l'équation

$$y^4 - (x-a)^2 = 0,$$

ou

$$(y^2 + x - a)(y^2 - x + a) = 0,$$

d'où il appert que

$$x - a = 0$$

est la réunion de deux points de ramification; par conséquent $x-a$ a deux zéros doubles, soit quatre zéros en tout.

De même nous n'aurons pas de difficulté à nous assurer que x comporte quatre infinis simples. En vue de faciliter l'inversion au moyen des fonctions elliptiques de Weierstrass il faut prendre soin que les quatre infinis de x se trouvent en un même point de ramification. On y arrivera en transportant à l'infini le point de ramification b au moyen de la transformation

$$x - c = \frac{1}{\gamma}.$$

L'intégrale donnée se ramènera à la forme

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt[4]{(y-a')^2(y-b')^3}}.$$

Abordant maintenant l'étude de cette dernière intégrale, nous lui donnerons la forme concrète

$$z = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(x-a)^3}}.$$

Au voisinage de l'infini le développement de x a la forme

$$x = z^{-4}\,\mathrm{F}(z),$$

où $\mathrm{F}(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$\mathrm{F}(0) \neq 0.$$

La fonction la plus simple de Weierstrass, ayant un infini de quatrième ordre au point

$$z = 0,$$

est $\wp^2 z$. C'est pourquoi, posant

$$x = \alpha p^2 z + \beta,$$

nous tâcherons de choisir α et β de façon à satisfaire identiquement l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = x^2(x-a)^3,$$

où, pour facilité de calcul, l'équation

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = \frac{128}{3}\,x^2(x-a)^3.$$

Il est facile de s'assurer que

$$x = 6p^2 z + a,$$

$$g_2 = -\frac{2}{3}a, \qquad g_3 = 0;$$

en conséquence

$$\mathrm{p}'z = \sqrt[4]{4\mathrm{p}^3 z - \frac{2}{3}a\mathrm{p}z} \quad ([1]).$$

Posant

$$\int_{\infty}^{a} \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}x^2(x-a)^3}} = \omega,$$

nous démontrerons que $x - a$ comporte un développement de la forme

$$x - a = (z - \omega)^4 \varphi z,$$

$\varphi(z)$ est une fonction holomorphe et

$$\varphi(\omega) \neq 0.$$

Nous avons

$$x = 6\mathrm{p}^2 z + a,$$
$$x - a = 6\mathrm{p}^2 z,$$

donc

$$\mathrm{p}\omega = 0.$$

Des équations

$$\mathrm{p}'^2 z = 4\mathrm{p}^3 z - \frac{2}{3}a\mathrm{p}z,$$

$$\mathrm{p}'' z = 6\mathrm{p}^2 z - \frac{1}{3}a,$$

nous tirons

$$\mathrm{p}'\omega = 0,$$
$$\mathrm{p}''\omega \neq 0.$$

Et comme

$$\mathrm{p}z = \mathrm{p}\omega + (z - \omega)\mathrm{p}'\omega + \frac{(z-\omega)^2}{2}\mathrm{p}''\omega + \ldots,$$

par conséquent

$$\mathrm{p}z = \frac{(z-\omega)^2}{2}\mathrm{p}''\omega + \ldots,$$

donc

$$x - a = \frac{3}{2}(z-\omega)^4 \mathrm{p}''\omega + \ldots.$$

C. Q. F. D.

---

(1) *Bull. des Sciences mathém.*, novembre 1893.

Posant

$$\int_{\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2(x-a)^3}} = \varpi,$$

nous démontrerons que x comporte deux zéros doubles. Nous avons

$$x = 6\wp^2 z + a,$$

conséquemment

$$6\wp^2 z + a = 0,$$

$$\wp^2 \varpi = -\frac{a}{6}.$$

Prenant en considération que

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=\varpi} = 12\,\wp\,\omega\,\wp'\,\omega,$$

nous trouverons $\wp'\varpi$. Nous avons

$$\wp'^2\varpi = \frac{2}{3}\,\wp\,\omega\,(6\wp^2\omega + a) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)_{z=\varpi} = 12\,\wp'^2\varpi + 12\,\wp\,\varpi\,\wp''\varpi.$$

Comme

$$\wp''\varpi = 6\wp^2\varpi + \frac{a}{3} = -\frac{3}{2}\,a \neq 0,$$

donc

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)_{z=\varpi} \neq 0.$$

Par conséquent

$$x = \mathrm{A}(x-\varpi)^2 + \mathrm{B}(z-\varpi)^3 + \ldots.$$

Prenant en considération que l'équation

$$6\wp^2 z + a = 0$$

est satisfaite non seulement par

$$z = \varpi,$$

mais aussi par

$$z = i\varpi \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

nous avons encore un développement

$$x = A'(z - i\varpi)^2 + B'(z - i\varpi)^3 + \ldots.$$

Ainsi x a deux zéros doubles. C. Q. F. D.

Les périodes de l'intégrale

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}\, x^2(x-a)^3}}$$

seront

$$2\omega = 2\int_\infty^a \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}\, x^2(x-a)^3}}, \qquad 2\varpi = 2\int_\infty^0 \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}\, x^2(x-a)^3}}.$$

3. L'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

sera ramenée à la forme

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-a)^3}}. \tag{5}$$

Démontrons que l'inversion de l'argument z peut être directement opérée sans avoir recours à la substitution préalable

$$x = \frac{1}{y},$$

ayant pour but de ramener tous les infinis de x en un seul point de la surface de Riemann. Nous avons pour x, qui est une fonction monodrome de z, le développement de la forme

$$x = z^4 F_1(z).$$

$F_1(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$F_1(0) \neq 0.$$

Posant

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-a)^3}} = \omega,$$

nous avons

$$x - a = (z - \omega)^4 F_2(z),$$

$F_2(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega) \neq 0.$$

Développant en série l'intégrale au voisinage de l'infini et inversant cette série, nous assurons que

$$x = (z - \varpi)^{-2} F(z),$$
$$\lim (z - \varpi) = 0.$$

$F(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$F(\varpi) \neq 0.$$

On voit immédiatement que x a deux infinis doubles. Le nombre des zéros est égal au nombre des infinis. Ainsi donc nous devons choisir pour x une fonction de Weierstrass comportant quatre zéros confondus et deux infinis doubles. La plus simple fonction de ce genre est

$$\xi = \frac{p z - e_i}{p'^2 z}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

En vue de déterminer plus commodément des invariants, nous prendrons en considération ce qui suit. L'argument (5), par la transformation

$$x = \frac{1}{y},$$

prend la forme

$$\int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt[4]{y^2 (y - \alpha)^3}}. \tag{16}$$

L'un des invariants de cette intégrale est

$$g_3 = 0.$$

Par suite de la transformation

$$x = \frac{1}{y},$$

l'argument se trouve multiplié par une certaine constante et, en vertu du théorème de l'homogénéité, les invariants reçoivent aussi des multiplicateurs constants. C'est pourquoi, si l'invariant g_3 de (6) est égal à zéro, l'invariant correspondant de l'argument (5) est égal à zéro. Mais, si

$$g_3 = 0,$$

l'une des quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3$$

est égale à zéro. Posant

$$e_1 = e_i = 0,$$

nous avons

$$\xi = \frac{\wp z}{\wp'^2 z}.$$

Si

$$\lim z = 0,$$

nous avons

$$\wp z = \quad \frac{1}{z^2} + \varphi(z),$$

$$\wp' z = -\frac{2}{z^3} + \psi(z);$$

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ sont holomorphes; donc

$$\xi = z^4 f(z),$$

$f(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$f(0) \neq 0.$$

D'où l'on voit que les quatre zéros de ξ, de même que les quatre zéros de x se confondent au point $z = 0$. Étudions maintenant les infinis de ξ. Nous avons

$$\xi = \frac{1}{4\wp^2 z - g_2} = \frac{1}{4(\wp z - e_2)(\wp z - e_3)}.$$

Si

$$\wp z - e_2 = 0,$$

alors

$$\wp' z = 0,$$

$$\wp'' z = 6 e_2^2 - \frac{1}{2} g_2 \neq 0.$$

C'est pourquoi la fonction

$$pz - e_2$$

se développe en la série

$$pz - e_2 = (z - \Omega)^2 F_1(z),$$

où $F_1(z)$ est une fonction holomorphe, satisfaisant à la condition

$$F(\Omega) \neq 0;$$

Ω est une demi-période de l'argument elliptique z. Par conséquent, au voisinage du point

$$z = \Omega,$$

ξ se développe en série

$$\xi = \frac{1}{(z-\Omega)^2} \Phi(z),$$

$\Phi(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$\Phi(\Omega) \neq 0.$$

Ainsi ξ a un infini de second ordre pour

$$z = \Omega.$$

Nous démontrerons de même que ξ a un infini de second ordre pour

$$z = \Omega_1,$$

où Ω_1 est une autre demi-période de l'argument elliptique z.

Nous pouvons prévoir que x diffère de ξ par un facteur constant. Posons

$$x = \alpha\xi = \frac{\alpha pz}{p'^2 z},$$

et choisissons α de manière à satisfaire l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = x^3(x-a)^3.$$

Nous avons

$$x = \frac{\alpha}{4p^2 z - g_2},$$

$$-\frac{dx}{dz} = -\frac{8\alpha pz\, p'z}{(4p^2 z - g_2)^2};$$

conséquemment

$$\frac{4^6 \alpha^3 \mathfrak{p}^6 z}{(4\mathfrak{p}^2 z - g_2)^6} = \frac{\alpha^3(\alpha + a g^2 - 4 a \mathfrak{p}^2 z)^3}{(4\mathfrak{p}^2 z - g_2)^6};$$

d'où nous tirons les deux conditions

$$g_2 = -\frac{\alpha}{a},$$

$$-4^3 \alpha^3 a^3 = 4^6 \alpha^4,$$

donc

$$\alpha = -\left(\frac{a}{4}\right)^3, \qquad g_2 = \frac{a^2}{4^3}.$$

Enfin,

$$x = -\frac{a^3}{4^3} \frac{\mathfrak{p} z}{4\mathfrak{p}^3 z - \frac{a^2}{4^3}\mathfrak{p} z} = -\frac{a^3}{4^3} \frac{1}{4\mathfrak{p}^2 z - \frac{a^2}{4^3}}.$$

4. Étudions maintenant l'intégrale

$$u = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}.$$

Au voisinage du point de ramification c nous avons le développement

$$x - c = u^6 F_1(u);$$

$F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(0) \neq 0.$$

Posant

$$\int_c^a \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} = \omega,$$

il vient

$$x - a = (u - \omega)^2 F_1(u),$$

$F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(\omega) \neq 0.$$

Répétant les raisonnements appliqués deux fois dans les paragraphes précédents, nous nous assurons facilement qu'au point

$$u = \omega$$

la fonction $x - a$ a trois zéros doubles, attendu que, au point

$$x - a = 0,$$

sont confondus trois points de ramification. Posant

$$\int_c^b \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} = \varpi,$$

nous avons

$$x - b = (u - \varpi)^3 F_3(u),$$

$F_3(u)$ est une fonction holomorphe de u satisfaisant à la condition

$$F_3(\varpi) \neq 0.$$

Comme au point

$$x - b = 0$$

sont confondus trois points de ramification, la fonction $x - b$ comporte, au point

$$u = \varpi,$$

deux zéros triples.

Posons, enfin,

$$\int_c^\infty \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} = \Omega;$$

nous aurons

$$x = (u - \Omega)^{-1} F_4(u),$$
$$\lim (u - \Omega) = 0;$$

$F_4(u)$ est une fonction holomorphe de u satisfaisant à la condition

$$F_4(\Omega) \neq 0.$$

On comprendra facilement que, dans chacun des six feuillets de la surface de Riemann, x a un infini de premier ordre. Les développements trouvés nous démontrent que x est une fonction monodrome de l'argument u ayant six zéros confondus au point de ramification c et six infinis distincts. A l'effet de donner la plus grande simplicité à l'expression de x en fonctions elliptiques de Weierstrass, il convient de transformer l'intégrale de façon que les six infinis x se confondent en un point de la surface de Riemann. Il suffit pour cela de transporter à l'infini le point de ramification c. Posant

$$x - c = \frac{1}{y},$$

nous ramenons l'intégrale donnée à la forme

$$z = \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3 (y-\beta)^4}}.$$

Si nous considérons y comme fonction de z, nous verrons que y a un infini de sixième ordre; $y+\alpha$ a trois zéros doubles; $y+\beta$ a deux zéros triples. Cette fonction doit être du troisième degré par rapport à pz; voilà pourquoi elle doit être de la forme

$$y = k p^3 z + l p^2 z + m p z + n.$$

Comme

$$y + \alpha$$

a trois zéros doubles, cette fonction doit être divisible par

$$4(pz - e_1)(pz - e_2)(pz - e_3) = 4p^3 z - g_2 pz - g_3;$$

par conséquent,

$$y = \rho\left(4p^3 z - g_2 pz - g_3 - \frac{\alpha}{\rho}\right).$$

Comme

$$y + \beta$$

a deux zéros triples, la fonction

$$y + \beta = \rho\left(4p^3 z - g_2 pz - g_3 - \frac{\alpha - \beta}{\rho}\right)$$

doit être divisible par $p^3 z$; c'est pourquoi

$$g_2 = 0, \qquad g_3 + \frac{\alpha - \beta}{\rho} = 0, \qquad g_3 = \frac{\beta - \alpha}{\rho}.$$

Ainsi

$$y = \rho\left(4p^3 z - \frac{\beta}{\rho}\right).$$

Il nous reste à déterminer ρ que nous tirerons de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^6 = (y+\alpha)^3(y+\beta)^4,$$

et nous aurons

$$\rho = 2^4 . 3^6,$$

$$y = 2^4 . 3^6 \left(4 p^3 z - \frac{\beta}{2^4 . 3^6}\right).$$

5. Il n'est pas difficile de s'assurer que l'intégrale

$$z = \int_\beta^x \frac{dx}{\sqrt{(x-\beta)^5(x-\alpha)^4}}$$

peut être invertie au moyen des fonctions elliptiques de Weierstrass sans transformation préalable de la forme

$$x - \beta = \frac{1}{y}.$$

Nous ferons cette recherche suivant l'ordre précédemment établi. Au voisinage du point

$$x - \alpha = 0$$

nous avons le développement

$$x - \alpha = (z - \omega)^3 F_1(z);$$

$F_1(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_1(\omega) \neq 0,$$

$$\omega = \int_\beta^\alpha \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-\beta)^5(x-\alpha)^4}}.$$

Il est clair que la fonction $x - \alpha$ comporte deux zéros de troisième ordre, car au point

$$x - \alpha = 0$$

sont confondus deux points de ramification, chacun de ceux-ci réunissant trois feuillets de la surface de Riemann. Posant

$$\varpi = \int_\beta^\infty \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-\beta)^5(x-\alpha)^4}},$$

nous avons

$$x = (z - \varpi)^{-2} F_2(z),$$

$F_2(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_2(\varpi) \neq 0.$$

Il est clair que x a trois infinis du second ordre, car il possède à l'infini trois points de ramification réunissant chacun deux feuillets de la surface de Riemann. Enfin

$$x - \beta = z^6 F_3(z),$$

$F_3(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_3(0) \neq 0.$$

Enfin, il faut trouver une fonction de Weierstrass satisfaisant aux conditions trouvées, et en premier lieu nous avons au point

$$z = 0$$

un zéro de sixième ordre. Une telle fonction doit avoir la forme

$$x - \beta = \frac{A}{a p^3 z + b p^2 z + c p z + d}.$$

Cette fonction doit avoir trois infinis de second ordre, et pour cela il faut avoir

$$x - \beta = \frac{A}{4(pz - e_1)(pz - e_2)(pz - e_3)},$$

attendu que chaque multiplicateur

$$(pz - e_1), \quad (pz - e_2), \quad (pz - e_3)$$

a un zéro de second ordre. Par conséquent,

$$x - \beta = \frac{A}{4p^3 z - g_3},$$

$g_2 = 0$ conformément à la remarque ci-dessus. Nous avons ensuite

$$x - \alpha = \frac{4(\beta - \alpha) p^3 z + A - g_3(\beta - \alpha)}{4 p^3 z - g_3}.$$

Pour que cette fonction ait deux zéros de troisième ordre, il faut que

$$A - g_3(\beta - \alpha) = 0,$$

$$g_3 = \frac{A}{\beta - \alpha}.$$

Il reste à tirer A de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^6 = (x-\alpha)^4(x-\beta)^5.$$

Nous aurons

$$A = \frac{(\beta-\alpha)^4}{2^4.3^6};$$

par conséquent,

$$g_3 = \frac{(\beta-\alpha)^3}{2^4.3^6},$$

$$x = \beta + \frac{(\beta-\alpha)^4}{2^4.3^6\left[4p^3z - \frac{(\beta-\alpha)^3}{2^4.3^6}\right]}.$$

6. Il nous reste à étudier, au moyen de la même méthode, l'intégrale

$$z = \int_\beta^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-\alpha)^3(x-\beta)^5}}.$$

Posant

$$\omega = \int_\beta^\alpha \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-\alpha)^3(x-\beta)^5}},$$

nous avons pour $x - \alpha$ le développement

$$x - \alpha = (z-\omega)^2 F_1(z);$$

$F_1(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_1(\omega) \neq 0.$$

Il est clair qu'au point

$$x - \alpha = 0$$

sont confondus trois zéros de second ordre, car en ce point se trouvent trois points de ramification, chacun de ceux-ci réunissant deux feuillets de la surface de Riemann. Nous avons, de même,

$$x - \beta = z^6 F_2(z),$$

$F_2(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_2(0) \neq 0.$$

Posant maintenant

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-\alpha)^3(x-\beta)^5}} = \varpi,$$

il vient

$$x = (z - \varpi)^{-3} F_3(z);$$

$F_3(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$F_3(\varpi) \neq 0.$$

Ainsi donc, x est une fonction monodrome de l'argument z satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $x - a$ comporte trois zéros de second ordre; 2° $x - b$ comporte un zéro de sixième ordre; 3° x comporte deux infinis de troisième ordre. La fonction elliptique de Weierstrass ayant un zéro de sixième ordre pour $z = 0$ doit être de la forme

$$x - \beta = \frac{A}{4p^3 z + a p^2 z + b p z + c},$$

$$x - \alpha = \frac{A - \alpha(4p^3 z + a p^2 z + b p z + c)}{4p^3 z + a p^2 z + b p z + c}.$$

Comme $x - a$ a trois zéros de second ordre, le numérateur de la dernière formule doit être de la forme

$$A - \alpha(4p^3 z + a p^2 z + 6 p z + c) = k(pz - e_1)(pz - e_2)(pz - e_3).$$

Il suit de là que

$$a = 0, \qquad A - \alpha c = \alpha g_3.$$

Conformément aux conditions émises plus haut, nous avons

$$g_2 = 0,$$

donc

$$b = 0;$$

par conséquent,

$$x - \beta = \frac{A}{4\wp^3 z + \dfrac{A - \alpha g_3}{\alpha}},$$

$$x = \frac{A + 4\beta \wp^3 z + \dfrac{A - \alpha g_3}{\alpha}\beta}{4\wp^3 z + \dfrac{A - \alpha g_3}{\alpha}}.$$

Comme x a deux infinis de troisième ordre, nous avons

$$A - \alpha g_3 = 0;$$

$$x = \frac{4\beta \wp^3 z + A}{4\wp^3 z},$$

$$x - \alpha = -\frac{\alpha \wp'^2 z}{4\wp^3 z},$$

$$x - \beta = \frac{A}{4\wp^3 z},$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{3}{4} A \frac{\wp' z}{\wp^4 z}.$$

Il nous reste à tirer A de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^6 = (x - \alpha)^3 (x - \beta)^5,$$

$$A = \frac{-\alpha^3}{2^4 . 3^6},$$

$$x = \frac{4\beta \wp^3 z - \dfrac{\alpha^3}{2^4 . 3^6}}{4\wp^3 z}.$$

7. Nous avons étudié suffisamment en détail le type d'intégrales considérées. Il nous reste encore à montrer que les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}}$$

peuvent être soumises à l'inversion indépendamment d'une transformation de la forme

$$x - a = \frac{1}{y}.$$

Considérons l'intégrale

$$z = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

En vue de l'inversion de cette intégrale il nous faut trouver une fonction de Weierstrass qui satisfasse aux conditions suivantes : 1° l'équation $x - a = 0$ a un zéro de troisième ordre pour $z = 0$; 2° l'équation $x - b = 0$ a un zéro de troisième ordre pour

$$z = \omega = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}};$$

3° l'équation $x - c = 0$ a un zéro de troisième ordre pour

$$z = \varpi = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}};$$

4° x a trois infinis distincts de premier ordre dans les trois feuillets de la surface de Riemann. La fonction de Weierstrass ayant un zéro de troisième ordre pour $z = 0$ a la forme

$$x - a = \frac{\alpha}{\wp' z + \beta}.$$

Par conséquent

$$x - b = (a-b)\frac{\wp' z + \beta + \dfrac{\alpha}{a-b}}{\wp' z + \beta},$$

$$x - c = (a-c)\frac{\wp' z + \beta + \dfrac{\alpha}{a-c}}{\wp' z + \beta}.$$

Ces deux fonctions doivent avoir deux zéros de troisième ordre : la première pour

$$z = \omega,$$

la seconde pour

c'est pourquoi nous avons simultanément les deux systèmes d'équations

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} &p'\omega + \beta + \frac{\alpha}{a-b} = 0,\\ &p''\omega = 6p^2\omega - \frac{1}{2}g_2 = 0,\\ &p'''\omega = 12p\omega\, p'\omega = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} &p'\varpi + \beta + \frac{\alpha}{a-b} = 0,\\ &p''\varpi = 6p^2\varpi - \frac{1}{2}g_2 = 0,\\ &p'''\varpi = 12p\varpi\, p'\varpi = 0,\end{aligned}\right.$$

desquelles il ressort que : ou bien

$$p'\omega = p'\varpi = 0,$$

ou bien

$$p\omega = p\varpi = 0.$$

La première hypothèse est inadmissible, car nous aurions alors

$$b = c,$$

ce qui ne peut être ; donc

$$p\omega = p\varpi = 0,$$

et alors

$$g_2 = 0,$$

$$\sqrt{-g_3} = -\left(\beta + \frac{\alpha}{a-b}\right),$$

$$-g_3 = \left(\beta + \frac{\alpha}{a-b}\right)^2 = \left(\beta + \frac{\alpha}{a-c}\right)^2,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{a-b} = \pm\left(\beta + \frac{\alpha}{a-c}\right).$$

On ne peut supposer que

$$\beta + \frac{\alpha}{a-b} = \beta + \frac{\alpha}{a-c},$$

car alors

$$b = c;$$

conséquemment

$$2\beta + \frac{\alpha(2a-b-c)}{(a-b)(a-c)} = 0.$$

Nous avons ensuite

$$(x-a)(x-b)(x-c) = \frac{4\alpha(a-b)(a-c)\wp^3 z}{(\wp' z + \beta)^3}.$$

L'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 = (x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2$$

nous donne

$$\alpha = \frac{2}{27}(a-b)^2(a-c)^2,$$

$$\beta = -\frac{(2a-b-c)(a-b)(a-c)}{27};$$

$$x - a = \frac{\frac{2}{27}(a-b)^2(a-c)^2}{\wp' z - \frac{1}{27}(a-b)(a-c)(2a-b-c)};$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{1}{27}(a-b)(a-c)(b-c).$$

8. D'un non moindre intérêt est l'inversion de l'intégrale

$$z = \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}.$$

Nous avons vu que $(x-b)$ a quatre zéros pour

$$z = 0,$$

$(x-c)$ a quatre zéros pour

$$z = \omega,$$

$x-a$ a deux zéros de second ordre pour

$$z = \varpi;$$

enfin, x a quatre infinis de premier ordre dans les quatre feuillets de la surface de Riemann. Posant donc

$$x - b = \frac{\alpha}{\wp^2 z + \beta},$$

nous voyons que la première condition est remplie. Nous avons

$$x - c = \frac{(b-c)\wp^2 z + \alpha + (b-c)\beta}{\wp^2 z + \beta}.$$

Afin de satisfaire à la seconde condition il faut avoir simultanément

$$\wp^2 \omega + \beta + \frac{\alpha}{b-c} = 0,$$

$$\wp\omega\wp'\omega = 0,$$

$$\wp'^2\omega + \wp\omega\wp''\omega = 0,$$

$$3\wp'\varpi\wp''\omega + 12\wp^2\omega\wp'\omega = 0,$$

$$\wp''^2\omega + 8\wp\omega\wp'^2\omega + 4\wp^2\omega\wp''\omega \neq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\wp\omega = 0, \qquad \wp'\omega = 0, \qquad \wp''\omega = 6\wp^2\omega - \frac{1}{2} g_2 \neq 0.$$

Par conséquent

$$\beta + \frac{\alpha}{b-c} = 0, \tag{7}$$

$$g_3 = 0.$$

Nous avons ensuite

$$x - a = \frac{(b-a)\wp^2 z + \alpha + (b-a)\beta}{\wp^2 z + \beta}.$$

Afin de remplir la troisième condition il faut avoir simultanément

$$\wp^2\varpi + \beta + \frac{\alpha}{b-a} = 0,$$

$$\wp\varpi\wp'\varpi = 0,$$

$$\wp'^2\varpi + \wp\varpi\wp''\varpi \neq 0.$$

On ne peut supposer que

$$\wp\varpi = 0,$$

car nous aurions alors d'un côté

$$a = c,$$

ce qui ne peut être; d'autre part

$$\wp'^2 \varpi \neq 0,$$

ce qui est impossible eu égard à l'égalité

$$g_3 = 0;$$

c'est pourquoi

$$\wp' \varpi = 0, \qquad \wp \varpi \neq 0, \qquad \wp'' \omega \neq 0.$$

Alors

$$(8) \qquad \beta + \frac{\alpha}{b-a} = -\frac{1}{4} g_2.$$

De deux équations (6) et (7) on ne saurait tirer les inconnues

$$\alpha, \quad \beta, \quad g_2.$$

Il faut pour cela prendre l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = (x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3$$

qui nous donne

$$\alpha = \frac{(b-c)^2(b-a)^2}{2^8},$$

$$\beta = \frac{(b-a)^2(b-c)}{2^8},$$

$$g_2 = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2^8}, \qquad g_3 = 0,$$

$$x - b = \frac{(b-c)^2(b-a)^2}{2^8\left[\wp^2 z - \frac{(b-a)^2(b-c)}{2^8}\right]}.$$

Il est clair que x a quatre infinis distincts pour les valeurs de l'argument qui satisfont à l'équation

$$\wp^2 z = \frac{(b-a)^2(b-c)}{\quad}.$$

9. Nous montrerons enfin la méthode d'inversion de l'intégrale

$$z = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}.$$

Il s'agit de rechercher une fonction x de Weierstrass qui satisfasse aux conditions suivantes : 1° la fonction $(x-a)$ comporte trois zéros de second ordre pour la valeur

$$z = \varpi = \int_c^a \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}};$$

2° la fonction $x-b$ comporte deux zéros de troisième ordre pour la valeur

$$z = \omega = \int_c^b \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}};$$

3° la fonction $x-c$ comporte un zéro de sixième ordre pour la valeur $z=0$; 4° x a six infinis distincts. Posant

$$x - c = \frac{\alpha}{\wp^3 z + \beta},$$

nous voyons que $x-c$ comporte un zéro de sixième ordre pour

$$z = 0.$$

Nous avons

$$x - b = (c-b)\,\frac{\wp^3 z + \beta + \dfrac{\alpha}{c-b}}{\wp^3 z + \beta}.$$

Pour que $x-b$ ait deux zéros de troisième ordre pour $z=\omega$, il faut que nous ayons simultanément

$$\wp^3\omega + \beta + \frac{\alpha}{c-b} = 0,$$

$$\wp^2\omega\,\wp'\omega = 0,$$

$$2\wp\omega\,\wp'^2\omega + \wp^2\omega\,\wp''\omega = 0,$$

$$2\wp'^3\omega + 6\wp\omega\,\wp'\omega\,\wp''\omega + \wp^2\omega\,\wp'''\omega \neq 0;$$

d'où il suit que

$$\mathrm{p}\,\omega = 0, \qquad \mathrm{p}'\omega \neq 0;$$

et alors

$$\beta + \frac{\alpha}{c-b} = 0,$$

$$x - b = \frac{(c-b)\,\mathrm{p}^3 z}{\mathrm{p}^3 z + \beta};$$

$\mathrm{p}^3 z$ a effectivement deux zéros de troisième ordre. Nous avons

$$x - a = (c-a)\frac{\mathrm{p}^3 z + \beta + \dfrac{\alpha}{c-a}}{\mathrm{p}^3 z + \beta}.$$

Afin que $x - a$ ait trois zéros de second ordre, nous devons avoir

$$g_2 = 0, \qquad -\frac{1}{4}g_3 = \beta + \frac{\alpha}{c-a}.$$

De l'équation

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^6 = (x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5,$$

nous tirons

$$\alpha = \frac{(c-a)^3(c-b)^4}{2^6.3^6};$$

voilà pourquoi

$$\beta = -\frac{(c-a)^3(c-b)^3}{2^6.3^6},$$

$$g_3 = \frac{(b-a)(c-a)^2(b-c)^3}{2^4.3^6}, \qquad g_2 = 0,$$

$$x - c = \frac{(c-a)^3(c-b)^4}{2^6.3^6[\mathrm{p}^3 z - (c-a)^3(c-b)^3]}.$$

Cette forme montre que x comporte six infinis distincts dans les six feuillets de la surface de Riemann.

10. Après avoir traité avec tous les détails convenables la question de l'inversion des intégrales abéliennes du premier genre, nous ne pouvons passer sous silence les intégrales elliptiques ordinaires. Les principes d'inversion précités s'appliquent, avec la plus grande facilité, aux intégrales elliptiques et fournissent une nouvelle forme d'in-

version de celles-ci, laquelle a été déjà brièvement indiquée par Halphen ([1]).

Prenons l'intégrale

$$z = \int_a^y \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}}. \tag{9}$$

Posant

$$y - a = x,$$

nous avons

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(x+a-b)(x+a-c)(x+a-d)}}.$$

Désignant maintenant

$$b - a = x_1, \qquad c - a = x_2, \qquad d - a = x_3,$$

nous écrirons

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}. \tag{10}$$

La fonction x, au voisinage des points de ramification, a la forme

$$\begin{aligned} x &= z^2 F_1(z), \\ x - x_1 &= (z-\omega)^2 F_2(z), \\ x - x_2 &= (z-\omega_1)^2 F_3(z), \\ x - x_3 &= (z-\omega_2)^2 F_4(z), \end{aligned}$$

ou

$$\omega = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

$$\omega_1 = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

$$\omega_2 = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}};$$

$F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, $F_4(z)$ sont holomorphes, et

$$F_1(0) \neq 0, \qquad F_2(\omega) \neq 0, \qquad F_3(\omega_1) \neq 0, \qquad F_4(\omega_2) \neq 0.$$

([1]) *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 131; 1886.

En outre, x comporte deux infinis distincts de premier ordre en deux feuillets de la surface de Riemann. Il s'ensuit évidemment que la fonction de Weierstrass, douée de même propriété que x, doit avoir une forme très simple,

$$x = \frac{\alpha}{\wp z + \beta}.$$

Au point $z = 0$, la fonction x a un zéro de second ordre. Nous avons ensuite

$$x - x_1 = -x_1 \frac{\wp z + \beta - \dfrac{\alpha}{x_1}}{\wp z + \beta}.$$

Pour que cette fonction ait un zéro de second ordre, il faut que

$$\wp\omega + \beta - \frac{\alpha}{x_1} = 0, \qquad \wp'\omega = 0, \qquad \wp''\omega = 6\wp^2\omega - \frac{1}{2}g_2 \neq 0,$$

et, pour cela, il faut satisfaire à la condition

$$\beta - \frac{\alpha}{x_1} = -e_1. \tag{11}$$

Étant donné que les trois différences

$$x - x_1, \quad x - x_2, \quad x - x_3$$

sont douées de propriétés identiques, nous avons encore

$$\left\{\begin{aligned} \beta - \frac{\alpha}{x_2} &= -e_2, \\ \beta - \frac{\alpha}{x_3} &= -e_3, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

et de même

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{\wp z + \beta}, \\ x - x_1 &= -\frac{x_1(\wp z - e_1)}{\wp z + \beta}, \\ x - x_2 &= -\frac{x_2(\wp z - e_2)}{\wp z + \beta}, \\ x - x_3 &= -\frac{x_2(\wp z - e_3)}{\wp z + \beta}; \end{aligned}$$

conséquemment

$$X = x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = -\frac{\alpha x_1 x_2 x_3 \,\mathrm{p}'^2 z}{4(\mathrm{p}z+\beta)^4}.$$

Nous déterminerons le multiplicateur constant α au moyen de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = X,$$

qui nous donne

(13) $$\alpha = -\frac{x_1 x_2 x_3}{4}.$$

Additionnant (11) et (12) et remarquant que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

nous avons

$$3\beta + \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{4} = 0,$$

(14) $$\beta = -\frac{1}{12}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Des équations (11) et (12), nous tirons

$$\frac{-\alpha^3}{x_1 x_2 x_3} = (-\beta - e_1)(-\beta - e_2)(-\beta - e_3),$$

ou

$$\alpha^2 = 4(-\beta - e_1)(-\beta - e_2)(-\beta - e_3).$$

Supposant que

$$-\beta = \mathrm{p}z_0,$$

nous avons

$$\alpha = \mathrm{p}'z_0;$$

par conséquent,

$$x = \frac{\mathrm{p}'z_0}{\mathrm{p}z - \mathrm{p}z_0},$$

(15) $$y = a + \frac{\mathrm{p}'z_0}{\mathrm{p}z - \mathrm{p}z_0},$$

$$\mathrm{p}z_0 = \frac{1}{12}[(a-b)(a-c) + (a-b)(a-d) + (a-c)(a-d)],$$

(16) $$\mathrm{p}'z_0 = \frac{1}{4}(a-b)(a-c)(a-d).$$

En outre,

$$e_1 = \frac{1}{12}[(a-b)(a-c)+(a-b)(a-d)-2(a-c)(a-d)],$$

$$e_2 = \frac{1}{12}[(a-b)(a-c)+(a-c)(a-d)-2(a-b)(a-d)],$$

$$e_3 = \frac{1}{12}[(a-b)(a-d)+(a-c)(a-d)-2(a-b)(a-c)].$$

De ces équations on peut tirer les invariants g_2, g_3 en fonction des racines

$$a, \quad b, \quad c, \quad d.$$

Mais on peut déterminer les invariants en fonction des coefficients, n° 11, du polynome

$$J(y)=(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)=y^4+4a_1y^3+6a_2y^2+4a_3y+a_4.$$

Nous avons, évidemment,

$$p' z_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{dJ}{dy}\right)_{y=a} = \frac{1}{4}J'(a),$$

$$p z_0 = \frac{1}{24}\left(\frac{d^2J}{dy^2}\right)_{y=a} = \frac{1}{24}J''(a).$$

Par conséquent,

$$\left[\frac{1}{4}J'(a)\right]^2 = 4\left[\frac{1}{24}J''(a)\right]^3 - g_2\left[\frac{1}{24}J''(a)\right] - g_3; \tag{17}$$

a étant une racine quelconque du polynome $J(y)$, toutes les racines de l'équation

$$J(y)=0$$

satisfont à l'équation (17). C'est pourquoi le polynome

$$A = \left[\frac{1}{4}J'(y)\right]^3 - 4\left[\frac{1}{24}J''(y)\right]^3 + g_2\left[\frac{1}{24}J''(y)\right] + g_3 \tag{18}$$

est divisible par le polynome $J(y)$. De cette condition, nous tirerons g_2

et g_3, comme le montre le calcul suivant. Nous avons

$$\begin{aligned}2\mathrm{A} = y^6 + 6a_1y^5 + (6a_1^2 + 9a_2)y^4 + (24a_1a_2 + 4a_3 - 8a_1^3)y^3 \\ + (15a_2^2 + 12a_1a_3 - 12a_1^2a_2 + g_2)y^2 + (12a_2a_3 - 6a_1a_2^2 + 2a_1g_2)y \\ + (2a_3^2 - a_2^3 + a_2g_2 + 2g_3).\end{aligned}$$

Divisant $2\mathrm{A}$ par

$$y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4,$$

nous aurons le quotient

$$y^2 + 2a_1y + 3a_2 - 2a_1^2,$$

et le reste

$$(g_3 - a_4 - 3a_2^2 + 4a_1a_3)y^2 + (2a_3^2 - a_2^3 + a_2g_2 + 2g_3 - 3a_2a_4 + 2a_1^2a_4).$$

Égalant ce reste à zéro, nous aurons

$$g_2 = a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3,$$
$$g_3 = a_2^3 - a_3^2 + a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4,$$

ce qui est conforme aux résultats connus.

Exemple numérique. — On donne l'intégrale

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6x^2 + 12x + 37}},$$
$$\mathrm{J} = x^4 + 6x^2 + 12x + 37,$$
$$\frac{1}{4}\mathrm{J}' = x^3 + 3x + 3,$$
$$\frac{1}{24}\mathrm{J}'' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Nous avons

$$\mathrm{A} = (x^3 + 3x + 3)^2 - \frac{1}{2}(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) + \frac{1}{2}g_2(x^2 + 1) + g_3,$$
$$2\mathrm{A} = x^6 + 9x^4 + 12x^3 + (15 + g_2)x^2 + 36x + (17 + g_2 + 2g_3).$$

Divisant $2\mathrm{A}$ par

$$x^4 + 6x^2 + 12x + 37,$$

nous trouvons le quotient

$$x^2 + 3$$

et le reste

$$(g_2 - 40)x^2 + (2g_3 + g_2 - 94) = 0.$$

De là

$$g_2 - 40 = 0, \qquad g_2 = 40,$$
$$2g_3 + g_2 - 94 = 0, \qquad g_3 = 27.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6x^2 + 12x + 37}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 40z - 27}}.$$

12. Il est fort intéressant d'établir un lien entre les formules trouvées et la forme bien connue d'inversion des intégrales elliptiques [1]. Pour ce faire, introduisons dans la formule (9),

$$a + b + c + d = 0,$$

ce qui ne présente pas de difficultés. Nous donnerons, par conséquent, au polynome du quatrième degré la forme

$$(y-a)(y-b)(y-c)(y-d) = y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4;$$

alors, comme on sait,

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

$$\pm\sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4} = \wp(u+v) - \wp u,$$

(19) $$-\wp v = \alpha_2, \qquad \wp' v = \alpha_3.$$

Comparant ces formules avec les suivantes

$$y = a + \frac{\wp' z_0}{\wp z - \wp z_0},$$

$$\wp z_0 = \frac{1}{24}\mathrm{J}''(a) = \frac{1}{2}(a^2 + \alpha_2),$$

(20) $$\wp' z_0 = \frac{1}{4}\mathrm{J}'(a) = a^3 + 3\alpha_2 a + \alpha_3$$

qui ont été établies au n° 10; ici

$$\mathrm{J}(y) = y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4;$$

---

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 119; 1886.

la valeur des invariants est la même dans les deux cas,

$$g_2 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2, \qquad g_3 = \alpha_2^3 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2.$$

Il est facile de démontrer maintenant que

$$v = 2z_0.$$

En effet, si cette égalité est exacte, nous devons avoir

$$pv = -2pz_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p''z_0}{p'z_0}\right)^2,$$

$$\alpha_2 = a^2 + \alpha_2 - \frac{1}{4}\left[\frac{3(a^2+\alpha_2)^2 - \alpha_4 - 3\alpha_2^2}{2(a^3+3\alpha_2 a + \alpha_3)}\right]^2$$

ou

$$\pm 2a = \frac{3a^4 + 6\alpha_2 a - \alpha_4}{2(a^3 + 3\alpha_2 a + \alpha_3)}.$$

Si dans le membre gauche nous donnons à $2a$ le signe $+$, nous aurons

$$a^4 + 6\alpha_2 a^2 + 4\alpha_3 a + \alpha_4 = 0$$

et cette égalité est identiquement exacte; par conséquent, le lieu cherché entre les deux formes d'inversion est trouvé.

13. La forme d'inversion précédemment trouvée nous donne la possibilité d'étudier facilement une transformation intéressante que nous avons indiquée dans notre Mémoire *Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel* (1). Posons

$$(21) \qquad \sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4} = \sqrt{J(y)} = (y^2 + 3\alpha_2) - \frac{2}{\xi}.$$

En chassant ici le radical et le dénominateur nous aurons l'équation doublement quadratique

$$(4\alpha_3 y + \alpha_4 - 9\alpha_2^2)\xi^2 + 4(y^2 + 3\alpha_2)\xi - 4 = 0$$

ou

$$4\xi y^2 + 4\alpha_3\xi^2 y + (\alpha_4 - 9\alpha_2^2)\xi^2 + 12\alpha_2\xi - 4 = 0.$$

---

(1) *Journal de Jordan*, 4e série, t. VI; 1890.

De ces équations, suivant un théorème connu [1], nous tirons, sans difficulté, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{J(y)}} = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha_3^2\xi^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)\xi^3 - 12\alpha_2\xi^2 + 4\xi}},$$

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}} = \pm \frac{1}{\alpha_3}\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{\alpha_3^2}\xi^3 - \frac{12\alpha_2}{\alpha_3^2}\xi^2 + \frac{4}{\alpha_3^2}\xi}}.$$

Étendant à l'intégrale

$$\alpha_3 z = \alpha_3 \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{\alpha_3^2}\xi^3 - \frac{12\alpha_2}{\alpha_3^2}\xi^2 + \frac{4}{\alpha_3^2}\xi}}$$

les formules d'inversion trouvées au n° 10, nous avons

$$\xi = \frac{\wp'(u_0)}{\wp(\alpha_3 z) - \wp(u_0)}.$$

Afin de trouver $\wp'(u_0)$ il faut calculer le quart de la dérivée du polynome placé sous le radical et remplacer ξ par zéro (racine du polynome), nous aurons

$$\wp'(u_0) = \frac{1}{\alpha_3^2};$$

de même

$$\wp(u_0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_3^2}.$$

En outre, les invariants nouveaux g'_2, g'_3 seront donnés au moyen des formules

$$g'_2 = \frac{3\alpha_2^2 + \alpha_4}{\alpha_3^4} = \frac{1}{\alpha_3^4} g_2,$$

$$g'_3 = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2}{\alpha_3^6} = \frac{1}{\alpha_3^6} g_3.$$

Ayant recours aux formules connues d'homogénéité, nous aurons

$$\wp\left(\alpha_3 z, \frac{1}{\alpha_3^4} g_2, \frac{1}{\alpha_3^6} g_3\right) = \frac{1}{\alpha_3^2}\wp(z, g_2, g_3);$$

---

[1] HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 333; 1888.

par conséquent,

$$\xi = \frac{1}{p z - \alpha_2}$$

ou

$$\alpha_3 \xi = \eta = \frac{\alpha_3}{p z - \alpha_2},$$

c'est-à-dire

$$\eta = \frac{p'(2 z_0)}{p z - p(2 z_0)}.$$

En définitive, nous avons le théorème :

THÉORÈME. — *On donne l'intégrale*

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4}},$$

laquelle fournit

$$y - y_1 = \frac{p'(z_0)}{p z - p(z_0)}.$$

Si nous employons la substitution

$$\sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4} = y^2 + 3\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\eta}, \tag{22}$$

il se trouve que

$$z = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{\alpha_3}\eta^3 + 12\alpha_2\eta^3 + 4\alpha_2\eta}}$$

qui donne

$$\eta = \frac{p'(2 z_0)}{p z - p(2 z_0)};$$

les invariants g_2, g_3 *ne subissent pas de changement.*

De cette façon, la substitution (22) fournit la duplication de l'argument z_0 sans altération des invariants.