

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. LACOUR

**Sur une transformation de fonctions elliptiques qui
correspondent à un module imaginaire**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 15 (1898), p. 455-462

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15_455_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE
TRANSFORMATION DE FONCTIONS ELLIPTIQUES
 QUI CORRESPONDENT
 A UN MODULE IMAGINAIRE,

PAR M. E. LACOUR,
 MAITRE DE CONFÉRENCES A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.



I.

Si l'on a à considérer la fonction pu dans le cas du discriminant négatif, c'est-à-dire la fonction pu satisfaisant à une équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}$$

dans laquelle les constantes e_2, e_1, e_3 sont, la première réelle, les deux autres imaginaires conjuguées, il peut y avoir avantage à ramener cette fonction à des fonctions elliptiques sn, cn, dn , de module réel. On y parvient au moyen de la transformation suivante (1) :

Soit e_1 celle des racines imaginaires dans laquelle le coefficient de i est positif, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} e_2 - e_3 &= \rho (\cos \psi + i \sin \psi), & \rho > 0, \\ e_2 - e_1 &= \rho (\cos \psi - i \sin \psi), & 0 < \psi < \pi; \end{aligned}$$

d'autre part, l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dx}{du} = 2 \sqrt{(x - e_2)(x - e_2 + e_2 - e_1)(x - e_2 + e_2 - e_3)},$$

(1) Voir HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 81, et APPELL et LACOUR, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 220.

puis

$$\frac{dx}{du} = 2\sqrt{(x - e_2)[(x - e_2)^2 + 2(x - e_2)\rho \cos \psi + \rho^2]}.$$

Dans cette équation faisons la substitution

$$x - e_2 = \rho t^2,$$

il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{dt}{du} = \sqrt{t^4 + 2t^2 \cos \psi + 1} = \sqrt{(t^2 + 1)^2 - 4t^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}$$

ou, en posant $t^2 = \sin^2 \frac{\psi}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{dt}{1 + t^2} = \sqrt{1 - t^2 \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^2}.$$

Enfin, posons

$$\frac{2t}{1 + t^2} = s_1,$$

ce qui donne

$$\frac{2dt}{1 + t^2} = \frac{ds_1}{\sqrt{1 - s_1^2}};$$

l'équation différentielle deviendra

$$\frac{ds_1}{2\sqrt{\rho} du} = \sqrt{(1 - s_1^2)(1 - t^2 s_1^2)}.$$

Cela posé, prenons

$$s_1 = \operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho}, l),$$

puis

$$t = \frac{1}{s_1} + \sqrt{\frac{1}{s_1^2} - 1} \quad \text{ou} \quad t = \frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho}, l)}{\operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho}, l)},$$

il en résulte pour x l'expression

$$x = e_2 + \rho \frac{[1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho}, l)]^2}{\operatorname{sn}^2(2u\sqrt{\rho}, l)},$$

qui satisfait à l'équation différentielle donnée. Pour voir que x est identique à ρu , il suffit de remarquer de plus que pour des valeurs de u dont le module est suffisamment petit, on a un développement

de la forme

$$x = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots,$$

développement dans lequel c_0, c_1, c_2, \dots désignent des coefficients constants.

On a donc obtenu la formule

$$pu - e_2 = \rho \frac{[1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho}, l)]^2}{\operatorname{sn}^2(2u\sqrt{\rho}, l)},$$

ρ et l étant définis par les égalités

$$\begin{aligned} e_2 - e_3 &= \rho (\cos \psi + i \sin \psi), & l &= \sin \frac{\psi}{2}. \\ e_2 - e_1 &= \rho (\cos \psi - i \sin \psi), \end{aligned}$$

Cette formule ramène bien la fonction pu , dans le cas du discriminant négatif, à des fonctions elliptiques de module réel.

Remarque. — Comme vérification, on pourra, à l'aide de la formule précédente, retrouver les égalités

$$e_2 = p\omega_2 = p\omega'_2, \quad e_1 = p\left(\frac{\omega_2 - \omega'_2}{2}\right), \quad e_3 = p\left(\frac{\omega_2 + \omega'_2}{2}\right),$$

dans lesquelles ω_2 et ω'_2 désignent les intégrales

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{L}{\sqrt{\rho}} \quad \left(l = \sin \frac{\psi}{2}\right), \\ \omega'_2 &= \frac{i}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{iL'}{\sqrt{\rho}} \quad \left(l' = \cos \frac{\psi}{2}\right). \end{aligned}$$

II.

Nous venons de voir que, dans le cas du discriminant négatif, la fonction pu se ramène à des fonctions elliptiques de module réel ($l = \sin \frac{\psi}{2}$). Mais, d'autre part, on sait que cette fonction se ramène à la fonction $\operatorname{sn}(gu, k)$, le module k et le multiplicateur g étant définis par les égalités

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad g^2 = e_1 - e_3.$$

En comparant les deux expressions correspondantes de pu , nous serons conduits à des formules de transformation, pour les fonctions elliptiques sn , cn , dn , permettant de passer du module imaginaire k au module réel l .

La substitution à effectuer dans l'équation différentielle pour obtenir l'équation correspondant à la fonction sn de module k et de multiplicateur g , est, comme on sait,

$$x = e_3 + \frac{g^2}{s^2} \quad (g^2 = e_1 - e_3).$$

Les substitutions qui conduisent à la fonction sn , de module l , sont, nous venons de le voir,

$$x = e_2 + \rho t^2, \quad \frac{2t}{1+t^2} = s_1.$$

Si l'on élimine x et t entre ces relations, on trouve la formule

$$s_1 = \frac{\frac{2g}{\sqrt{\rho}} s \sqrt{1 - k^2 s^2}}{s^2 + \frac{g^2}{\rho} (1 - k^2 s^2)}.$$

En se reportant aux équations différentielles que doivent vérifier s et s_1 , et en se rappelant que s , s'annule en même temps que s , on voit qu'on peut prendre

$$s = \text{sn}(gu, k), \quad s_1 = \text{sn}(2u\sqrt{\rho}, l),$$

et la formule précédente devient

$$\text{sn}(2u\sqrt{\rho}, l) = \frac{\frac{2g}{\sqrt{\rho}} \text{sn}(gu, k) \text{dn}(gu, k)}{\text{sn}^2(gu, k) + \frac{g^2}{\rho} \text{dn}^2(gu, k)}$$

ou bien, en changeant u en $\frac{u}{g}$ et posant

$$\mathbf{M} = \frac{g}{2\sqrt{\rho}} \quad \text{ou} \quad 2\mathbf{M}^2 = i \sin \psi,$$

$$\text{sn}\left(\frac{u}{\mathbf{M}}, l\right) = \frac{4\mathbf{M} \text{sn}(u, k) \text{dn}(u, k)}{4\mathbf{M}^2 \text{dn}^2(u, k) + \text{sn}^2(u, k)}.$$

On a ainsi l'une des formules de transformation cherchées; celles qui donnent la valeur de $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$ et la valeur de $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$ s'en déduisent aisément, comme nous allons nous en assurer.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons, à partir de maintenant, par s, c, d les fonctions elliptiques de module k et d'argument u , et par s_1, c_1, d_1 les fonctions elliptiques de module l et d'argument $\frac{u}{M}$. Avec ces notations, la formule déjà obtenue s'écrit

$$s_1 = \frac{4Msd}{4M^2d^2 + s^2}.$$

Pour avoir c_1 au signe près, il suffit de se servir de l'égalité $c_1^2 = 1 - s_1^2$; quant au signe, il est déterminé par la condition de donner lieu à une vérification qui sera expliquée dans la suite. On trouve ainsi

$$c_1 = \frac{4M^2d^2 - s^2}{4M^2d^2 + s^2}.$$

Enfin, pour avoir d_1 , on différentie par rapport à u les deux membres de la formule qui donne la valeur de s_1 et l'on trouve alors, après suppression dans les deux membres d'un facteur égal à c_1 ,

$$d_1 = \frac{4M^2c}{4M^2d^2 + s^2}.$$

Il est facile maintenant de résoudre par rapport à s, c, d les trois formules précédentes.

On trouve d'abord

$$\frac{1 + c_1}{1 - c_1} = \frac{4M^2d^2}{s^2}$$

ou

$$\frac{(1 + c_1)^2}{s_1^2} = \frac{4M^2d^2}{s^2},$$

et l'on a la vérification annoncée plus haut, en se reportant à la valeur de pu et en tenant compte d'une formule connue (*Formules et proposi-*

tions de Weierstrass rédigées par Schwartz, traduction Padé, p. 30),
savoir

$$\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} u, k)}{\operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u, k)}.$$

Connaissant $\frac{d^2}{s^2}$ on aura d^2 et s^2 en se servant de la relation

$$d^2 + l^2 s^2 = 1,$$

on en déduira

$$4M^2 d^2 + s^2$$

et la formule

$$d_1 = \frac{4M^2 c}{4M^2 d^2 + s^2}$$

fera alors connaître c sans ambiguïté.

Nous réunissons ici les formules de transformation que nous venons
d'obtenir :

$$s_1 = \frac{4Msd}{4M^2 d^2 + s^2}, \quad c_1 = \frac{4M^2 d^2 - s^2}{4M^2 d^2 + s^2}, \quad d_1 = \frac{4M^2 c}{4M^2 d^2 + s^2}$$

avec

$$s = \operatorname{sn}(u, k), \quad s_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right), \quad \dots,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\cos \psi + i \sin \psi}{2i \sin \psi}, \quad l^2 = \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad 2M^2 = i \sin \psi,$$

III.

La transformation permettant de passer du module imaginaire k au
module réel l peut être définie à l'aide de relations linéaires entre les
périodes qui correspondent à ces modules.

Posons, comme plus haut,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \varphi}}, \quad iL' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 \varphi}};$$

L et iL' forment un couple de périodes primitives de la fonction à
module réel $\operatorname{sn}(U, l)$.

On sait (voir *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 216) que la fonction $p(u; e_1, e_2, e_3)$ admet comme périodes primitives les quantités ω_1 et ω_3 définies par les égalités

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega'_2}{2}, & \omega_2 \sqrt{\rho} &= L, \\ \omega_3 &= \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega'_2}{2}, & \omega'_2 \sqrt{\rho} &= iL', \end{aligned}$$

et l'on peut en conclure que la fonction

$$s = \operatorname{sn}(gu, k)$$

admet comme périodes primitives les quantités K et iK' définies par les égalités

$$K = g\omega_1, \quad iK' = g\omega_3.$$

On déduit de là les relations

$$\begin{aligned} \frac{K}{g} &= \frac{L}{2\sqrt{\rho}} - \frac{iL'}{2\sqrt{\rho}}, \\ \frac{iK'}{g} &= \frac{L}{2\sqrt{\rho}} + \frac{iL'}{2\sqrt{\rho}}, \end{aligned}$$

ou, en se rappelant qu'on a posé $M = \frac{g}{2\sqrt{\rho}}$,

$$\begin{aligned} \frac{K}{M} &= L - iL', \\ \frac{iK'}{M} &= L + iL'; \end{aligned}$$

ces deux relations définissent la transformation ⁽¹⁾. Elles conduisent à une seconde démonstration de la formule

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{4M \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{4M^2 \operatorname{dn}^2(u, k) + \operatorname{sn}^2(u, k)} :$$

⁽¹⁾ Voir le Cours professé à la Faculté des Sciences par M. Hermite, 3^e éd., p. 242.

on vérifie que les deux membres sont des fonctions ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis; ces fonctions ne peuvent différer que par un facteur constant, et l'on voit que ce facteur est égal à l'unité en multipliant les deux membres par u et en comparant les limites des deux produits pour $u = 0$.

