ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES VORONOÏ

Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 207-267

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__207_0>

SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE

ET SES APPLICATIONS

A LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES.

PAR M. GEORGES VORONOÏ.

INTRODUCTION.

La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin et la formule de Fourier, pour le développement de la fonction $f(x)$ en série trigonométrique, ont leur origine commune dans le théorème suivant (1) :

THÉORÈME. — *La somme* $\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n\geqq a}^{n<b} f(n)$ *peut être développée en série infinie*

$$(I) \qquad \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n\geqq a}^{n<b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_a^b f(x)\cos 2\pi n x\,dx$$

à condition que la fonction $f(x)$ *soit continue dans l'intervalle* $a < x < b$ *et ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima,* a *et* b *étant deux nombres réels quelconques.*

En faisant dans la formule (I)

$$f(n) = f(x+1-n), \qquad a = x, \qquad b = x+1$$

(1) *Voyez*, par exemple, *Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet*, herausgegeben von Dedekind (Vierte Auflage, Braunschweig, 1894, supplément I, p. 288) et aussi le Mémoire de M. Franel : *Sur la formule sommatoire d'Euler* (*Mathematische Annalen*, Bd. XLVII, p. 433).

et en supposant que $0 < x < 1$, on obtient l'égalité

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(x+1-t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_x^{x+1} f(x+1-t)\cos 2\pi n t\,dt$$

qui, après la substitution $t = x + 1 - u$, se réduit à la série de Fourier

$$f(x) = \int_0^1 f(u)\,du + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2\cos 2\pi n x\int_0^1 f(u)\cos 2\pi n u\,du + 2\sin 2\pi n x\int_0^1 f(u)\sin 2\pi n u\,du\right]$$
$$(0 < x < 1).$$

L'intégration par parties effectuée dans la formule (I) conduit au résultat suivant :

$$\text{(II)}\quad \sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k[r_k(b)f^{(k)}(b) - r_k(a)f^{(k)}(a)]$$
$$+ (-1)^m\int_a^b r_{m-1}(x)f^{(m)}(x)\,dx \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

où l'on a posé

$$r_0(x) = \frac{1}{2}\varepsilon(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \quad \text{et} \quad r_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^{k+1}e^{2\pi n x i} + i^{k+1}e^{-2\pi n x i}}{(2\pi n)^{k+1}}$$
$$(k = 1, 2, \ldots);$$

le symbole $\varepsilon(x)$ a la valeur 0 quand x n'est pas un nombre entier et $\varepsilon(x) = 1$ quand x est un nombre entier.

En supposant que a et b soient des nombres entiers, la formule (II) devient

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=0}^{m-1} A_k[f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)] + (-1)^m\int_a^b r_{m-1}(x)f^{(m)}(x)\,dx$$
$$(m = 1, 2, \ldots),$$

où $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = \frac{1}{12}$, ...

C'est la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin avec le reste présenté sous la forme de Poisson [1].

La formule (II) présente une généralisation de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin due à M. Sonine [2].

Dans les recherches concernant la sommation des séries multiples, on rencontre souvent des sommes qui dépendent des valeurs des fonctions discontinues. Dans tous ces cas la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin n'est plus applicable, et l'on ne parvient, en général, à surmonter les difficultés qui en résultent qu'à l'aide des méthodes particulières.

Le problème le plus simple de cette espèce est le suivant : *étant donnée une fonction analytique $f(x)$ et une fonction numérique $\tau(n)$ qui n'est déterminée que pour les valeurs entières de la variable n, on demande la valeur de la somme* $\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)+\frac{1}{2}\sum_{n\geqq a}^{n<b}\tau(n)f(n)$ [3].

Les études que j'ai faites pendant plusieurs années des différentes sommes de cette espèce m'ont amené à remarquer que la formule (I) peut être généralisée, et je suis arrivé au résultat suivant :

THÉORÈME. — *La somme* $\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)+\frac{1}{2}\sum_{n\geqq a}^{n<b}\tau(n)f(n)$ *peut être développée en série infinie*

$$(\star)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)+\frac{1}{2}\sum_{n\geqq a}^{n<b}\tau(n)f(n)\\ &\quad=\int_a^b f(x)\,\mathfrak{z}(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_a^b f(x)\,\alpha(nx)\,dx,\end{aligned}$$

---

(1) POISSON, *Mémoire sur le calcul des intégrales définies* (*Mémoires de l'Institut de France*, année 1823, t. VI, p. 571).

(2) M. SONINE, *Sur une intégrale définie contenant la fonction numérique* $[x]$ (*Bulletins de l'Université de Varsovie*, 1885, n° 3, et aussi : *Sur les polynomes de Bernoulli et leurs applications* (*Bulletins de l'Université de Varsovie*, 1888, n° 3) (*en russe*).

(3) *Voyez*, par exemple, deux Mémoires de Kronecker : 1° *Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel*; 2° *Ueber eine summatorische Function* (*Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885, p. 841, et 1889, p. 867); *voyez* aussi : *Vorlesungen über Mathematik von Kronecker*, Bd. I, Leipzig, 1894, p. 147).

à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$ et ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima, $\delta(x)$ et $\alpha(x)$ étant deux fonctions analytiques qui ne dépendent que de la fonction numérique $\tau(n)$.

Le but de ce Mémoire est de démontrer le théorème énoncé dans le cas où la fonction numérique $\tau(n)$ désigne le nombre des diviseurs du nombre entier positif n. J'ai obtenu le remarquable résultat suivant :

En supposant que le symbole $\tau(n)$ désigne le nombre des diviseurs du nombre entier positif n, on peut poser dans la formule (*)

$$\delta(x) = \log x + 2C \qquad et \qquad \alpha(x) = 2[\xi(4\pi^2 x) + \eta(4\pi^2 x)],$$

où C désigne la constante d'Euler et les fonctions $\xi(x)$ et $\eta(x)$ vérifient les équations différentielles linéaires du second ordre

$$(1) \qquad x\frac{d^2\xi(x)}{dx^2} + \frac{d\xi(x)}{dx} - \xi(x) = 0 \qquad et \qquad x\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{d\eta(x)}{dx} + \eta(x) = 0.$$

Les intégrales des équations différentielles (1) sont bien connues depuis les travaux de Fourier et de Poisson ([1]). On les appelle quelquefois *fonctions de Fourier* ou *de Bessel* ou encore *fonctions cylindriques*. Les fonctions $\xi(x)$ et $\eta(x)$ rentrent dans la classe des fonctions étudiées par M. C. Neumann et on les appelle aussi fonctions de Neumann de la seconde espèce ([2]).

La fonction que je désigne par $\xi(x)$ peut être représentée par l'in-

---

([1]) FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Chap. VI, p. 332 (*Œuvres de Fourier*, t. I, Paris, 1888); POISSON, *Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides*, Section III[e], p. 335 (*Journal de l'École Polytechnique*, 19[e] cahier, 1823).

([2]) *Voyez* M. C. NEUMANN, *Theorie der Bessel'schen Functionen*, Leipzig, 1867; M. LOMMEL, *Studien über die Bessel'schen Functionen* (Leipzig, 1868); M. NICOLAS, *Étude des fonctions de Fourier* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, supplément au t. XI, 1882); MM. GRAY AND MATHEWS : *A Treatise on Bessel functions and their applications to Physics* (London, 1895).

tégrale définie

$$\xi(x) = 2\int_1^\infty \frac{e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt,$$

à condition que la partie réelle de $\sqrt{x}$ soit positive.

Quelques-unes des propriétés de la fonction $\xi(x)$ ont été indiquées par Riemann ([1]) et démontrées par Stieltjes ([2]).

La plus importante propriété de la fonction $\xi(x)$ qui, à ce que je crois, n'a pas été publiée jusqu'à présent, est la suivante :

Théorème. — *Le carré de la fonction d'Euler* $\Gamma(s)$ *peut être représenté par l'integrale définie*

$$\Gamma^2(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\xi(x)\,dx,$$

à condition que la partie réelle de s soit positive.

En vertu de ce théorème, la fonction $\xi(x)$ rentre dans la classe des fonctions remarquables qui sont définies par l'équation

$$\Gamma^k(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\,\xi(x, k)\,dx \tag{2}$$

pour les différentes valeurs de l'indice k. D'après cette définition, on a

$$\xi(x, 1) = e^{-x} \qquad \text{et} \qquad \xi(x, 2) = \xi(x).$$

Comme la fonction exponentielle e^{-x} appartient à la classe des fonctions définies par l'équation (2), en toute justice il faudrait, à mon avis, les appeler *ultra-exponentielles*.

Je définis la fonction $\eta(x)$ par la formule

$$\eta(x) = \lim_{\rho=0} \frac{\xi(-x+\rho i) + \xi(-x-\rho i)}{2}$$

à condition que $x > 0$ et $\rho > 0$.

([1]) Riemann, *Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe* (*Riemann's gesammelte mathematische Werke*. Leipzig, 1876, p. 58).

([2]) Stieltjes, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III, 1886, p. 201).

Dans mes recherches un rôle important appartient aux fonctions cylindriques que je désigne par $\xi_k(x)$ et $\eta_k(x)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Ces fonctions sont définies, d'une part, par la formule

$$\xi_k(x) = x^k \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}} (t^2-1)^{k-\frac{1}{2}} dt$$

à condition que la partie réelle de $\sqrt{x}$ soit positive et, d'autre part, par l'égalité

$$\eta_k(x) = \lim_{\rho=0} \frac{\xi_k(-x+\rho i)+\xi_k(-x-\rho i)}{2} \qquad \text{où} \qquad x > 0 \quad \text{et} \quad \rho > 0.$$

La fonction $\xi_k(x)$ peut être développée en une série semi-convergente (¹)

$$(3)\quad \xi_k(x) = \sqrt{\pi}(\sqrt{x})^{k-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \left[\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(2k+2\lambda-1)(2k+2\lambda-3)\ldots(2k+1-2\lambda)}{\lambda!\,(16\sqrt{x})^\lambda} + \vartheta \frac{(2k+2n-1)(2k+2n-3)\ldots(2k+1-2n)}{n!\,(16\sqrt{x})^n} \right]$$

où $|\vartheta| < 1$ et $n \geqq k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ce développement subsiste pour toutes les valeurs complexes de la variable x, les valeurs négatives de x et la valeur $x = 0$ étant exclues.

Le développement de la fonction $\eta_k(x)$ en série semi-convergente est le suivant :

$$(4)\quad \eta_k(x) = \sqrt{\pi}(\sqrt{x})^{k-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(2k+2\lambda-1)(2k+2\lambda-3)\ldots(2k+1-2\lambda)}{\lambda!\,(16\sqrt{x})^\lambda} \times \cos\left[2\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}\left(\lambda - k + \frac{1}{2}\right)\right] + \vartheta \frac{(2k+2n-1)(2k+2n-3)\ldots(2k+1-2n)}{n!\,(16\sqrt{x})^n} \right\}$$

où $-1 < \vartheta < 1$, $x > 0$ et $n \geqq k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

(¹) *Voyez*, par exemple, le Mémoire de Hankel : *Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art* (*Mathematische Annalen*, Bd. I, p. 491).

La forme remarquable du reste de ces séries permet de les employer avec succès dans les recherches concernant les fonctions $\xi_k(x)$ et $\eta_k(x)$, quoiqu'en faisant $n=\infty$ dans les formules (3) et (4) on obtienne des séries toujours divergentes, quelle que soit la valeur de x.

J'introduis dans mes recherches une nouvelle fonction $g(x)$, représentée par la somme de la série infinie

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\xi(4\pi^2 nx). \tag{5}$$

La fonction $g(x)$ est tout à fait analogue à la fonction $\frac{1}{e^{2\pi x}-1}$. Une des propriétés les plus importantes de la fonction $\frac{1}{e^{2\pi x}-1}$ est, comme on sait, le développement de cette fonction en des fractions simples

$$\frac{1}{e^{2\pi x}-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi x}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+ni}+\frac{1}{x-ni}\right).$$

La fonction $g(x)$ jouit de la propriété analogue, et l'on a la formule fondamentale

$$g(x)=-\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}C-\frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right). \tag{6}$$

Je déduis cette formule à l'aide de la formule connue de Riemann ([1])

$$\zeta(1-s)=\frac{2\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\zeta(s). \tag{7}$$

Il est digne d'attention que la formule précédente et la formule de Riemann, mise sous la forme

$$\zeta^2(1-s)=\frac{4\cos^2\frac{\pi s}{2}}{(4\pi^2)^s}\Gamma^2(s)\zeta^2(s),$$

([1]) Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse* (*Riemann's Werke*, p. 137).

présentent le résultat de l'application de la formule générale $(\star)$ aux cas

$$f(x) = \xi(4\pi^2 x) \qquad \text{et} \qquad f(x) = x^{s-1}.$$

On en pourrait conclure que la formule de Riemann (7) peut servir de base aux recherches concernant l'application ultérieure de la formule $(\star)$ aux fonctions numériques $\tau(n, k)$ définies par l'équation

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n, k)}{n^s}.$$

La formule fondamentale (6) fournit un moyen à l'aide duquel on peut représenter la somme $\sum\limits_{n>a}^{n \leqq b} \tau(n) f(n)$ par les intégrales définies. De cette manière je trouve l'expression suivante pour la fonction numérique $\varphi_k(x)$ représentée par la somme

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n \leqq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}, \tag{8}$$

(9)
$$\left\{ \begin{aligned} &\varphi_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C)\, dt + \sum_{\lambda=0}^{k} \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + r_k(x) \\ &\text{où} \\ &\qquad\qquad k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \\ &\text{et} \\ &r_k(x) = \frac{1}{2} 0^k \tau(x) - 2 \int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t)\, dt \\ &\qquad + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i\, dt. \end{aligned} \right.$$

Le symbole $\tau(x)$ a la valeur o quand x n'est pas un nombre entier positif et désigne le nombre des diviseurs de x quand x est un nombre entier positif.

D'après cette formule, la fonction analytique

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C)\, dt + \sum_{\lambda=0}^{k} \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \tag{10}$$

présente la valeur asymptotique de la fonction numérique $\varphi_k(x)$. La question de savoir : avec quelle erreur la fonction (10) représente-t-elle la fonction numérique $\varphi_k(x)$, surgit naturellement.

Le cas le plus simple de $k=0$ a été l'objet de plusieurs recherches (1).

On représente ordinairement la fonction $\varphi_0(x)$ qui est définie par la formule

$$\varphi_0(x) = \sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n)$$

sous la forme suivante :

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{n\leqq x} \mathrm{E}\,\frac{x}{n}.$$

Lejeune-Dirichlet a démontré que la fonction $\varphi_0(x)$ a la valeur asymptotique

$$x(\log x + 2\mathrm{C} - 1)$$

qui représente la fonction $\varphi_0(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas $\sqrt{x}$. Peu de temps avant sa mort, l'illustre géomètre a fait une nouvelle découverte concernant la fonction $\varphi_0(x)$, comme on peut le conclure, d'après la lettre de Lejeune-Dirichlet à Kronecker datée du 23 juillet 1858 (2), mais les nouveaux résultats concernant la fonction $\varphi_0(x)$ trouvés par Lejeune-Dirichlet n'ont pas été publiés, et, jusqu'à présent, on n'en sait pas plus sur le reste de la formule

$$\varphi_0(x) = x(\log x + 2\mathrm{C} - 1) + \mathrm{R}(x) \quad (3)$$

qu'après la publication, en 1849, du célèbre Mémoire de Lejeune-Dirichlet : *Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* (4).

La recherche de l'expression analytique précise pour la fonction

---

(1) Voyez *Zahlentheorie* von Paul Bachmann. Leipzig 1894, Zweiter Theil, XIII Abschnitt, p. 397.

(2) *Lejeune-Dirichlet's Werke*, Bd. II, Berlin 1897, p. 407.

(3) J'ai démontré récemment que l'ordre du reste $\mathrm{R}(x)$ ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt[3]{x}\log x$. *Voyez* mon Mémoire : *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. CXXVI, p. 241).

(4) *Lejeune-Dirichlet's Werke*, Bd. II, p. 49.

numérique $\varphi_0(x)$ présente un problème fondamental en vertu de la formule

$$(11)\qquad \sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)=\varphi_0(b)f(b)-\varphi_0(a)f(a)-\int_a^b\varphi_0(x)\,df(x).$$

Dans cette formule le symbole $\int_a^b\varphi_0(x)\,df(x)$ désigne l'intégrale définie prise dans le sens de Stieltjes (¹) et a la valeur bien déterminée tant que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle $a<x<b$.

En vertu de la formule (9), la fonction $\varphi_0(x)$ a pour expression

$$(12)\qquad \varphi_0(x)=x(\log x+2C-1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\tau(x)$$
$$-2\int_x^\infty g(t)\,dt+\int_0^\infty[g(-x+ti)-g(-x-ti)]i\,dt.$$

A l'aide de la formule (5), je trouve

$$\int_0^\infty[g(-x+ti)-g(-x-ti)]i\,dt$$
$$=\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}.$$

La recherche de la limite de la série obtenue offre le plus de difficultés, quoique tout le problème se réduise à la question de savoir s'il est permis dans la formule obtenue d'intervertir l'opération exprimée par le signe de sommation avec celle qui est exprimée par le signe lim. Je ne suis parvenu à donner une réponse affirmative à cette question que par l'analyse assez délicate.

J'ai réussi à démontrer que la fonction $r_k(x)$ définie par la formule (9) peut être développée en une série infinie suivante :

$$(13)\qquad r_k(x)=\frac{1}{2}o^k\tau(x)+\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\frac{(-1)^{k+1}\xi_{k+1}(4\pi^2nx)+\eta_{k+1}(4\pi^2nx)}{(4\pi^2n)^{k+1}}$$
$$(k=0,1,2\ldots).$$

(¹) Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII, 1894, p. 71).

En vertu des développements (3) et (4) des fonctions $\xi_{k+1}(x)$ et $\eta_{k+1}(x)$ en séries semi-convergentes, j'obtiens pour la fonction $r_k(x)$ l'expression remarquable suivante :

$$
\begin{aligned}
(14)\quad r_k(x) = \frac{1}{2}\,o^k\tau(x) + {} & 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{r-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \\
& + (-1)^{k+1}2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{s-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \\
& + \vartheta\, 2\sqrt{\pi}\, x^{\frac{k-r}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2r+1)(2k+2r-1)\ldots(2k+3-2r)}{2^{4r}r!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+r}{2}+\frac{3}{4}}} \\
& + (-1)^{k+1}\varepsilon\, 2\sqrt{\pi}\, x^{\frac{k-s}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2s+1)(2k+2s-1)\ldots(2k+3-2s)}{2^{4s}s!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+s}{2}+\frac{3}{4}}},
\end{aligned}
$$

où $-1 < \vartheta < 1$, $0 < \varepsilon < 1$ et $r \geqq k+1$, $s \geqq k+1$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

A l'aide des formules (9) et (14), je démontre les propositions suivantes :

I. *La fonction analytique*

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2C)\,dt + \sum_{\lambda=0}^{k}\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}$$

représente la fonction numérique $\varphi_k(x)$ *définie par la formule* (8) *avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction* $x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}$, $(k = 1, 2, \ldots)$.

II. *La fonction*

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2\mathrm{C})\,dt + \sum_{\lambda=0}^{k} \zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}$$

$$+\frac{1}{2}\,0^k\tau(x) + 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{2\lambda}\lambda!}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}$$

représente la fonction numérique $\varphi_k(x)$ *avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction* $x^{\frac{k-m}{2}+\frac{1}{4}}$ *où* $k=0, 1, 2, \ldots$ *et* $m=1, 2, \ldots$.

Il en résulte, par exemple, que la fonction

$$\psi_0(x) = x(\log x + 2\mathrm{C} - 1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\tau(x) + 2\sqrt{\pi}\,x^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$

jouit de la propriété suivante :

La valeur numérique de la différence $\varphi_0(x)-\psi_0(x)$ *tend vers la limite* 0 *à mesure que* x *croît infiniment.*

A l'aide du développement (13) de la fonction $r_0(x)$ en série infinie et à l'aide de la formule (11), je démontre deux théorèmes fondamentaux :

Théorème I. — *La somme* $\sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n)$ *peut être développée en série infinie*

$$\text{(III)}\quad \sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n) = \int_a^b f(x)(\log x + 2\mathrm{C})\,dx + \frac{1}{2}\tau(b)f(b) - \frac{1}{2}\tau(a)f(a)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\int_a^b f(x)\,[\xi(4\pi^2 nx)+\eta(4\pi^2 nx)]\,dx,$$

à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) et qu'elle ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima.

THÉORÈME II. — *La somme $\sum\limits_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)$ peut être développée en série*

$$(\mathrm{IV})\quad \sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)=\int_a^b f(x)(\log x+2C)\,dx+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k[r_k(b)f^{(k)}(b)-r_k(a)f^{(k)}(a)]$$
$$+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\int_a^b\frac{(-1)^m\xi_m(4\pi^2nx)+\eta_m(4\pi^2nx)}{(4\pi^2n)^m}f^{(m)}(x)\,dx,$$

à condition que la fonction $f(x)$ ait m dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$ bien déterminées et limitées dans l'intervalle (a, b), $(m=1, 2, \ldots)$.

La formule (III) présente un cas particulier de la formule générale $(\star)$ et est tout à fait analogue à la formule (I).

La formule (IV) présente une généralisation de la célèbre formule sommatoire de Poisson.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LA FONCTION ULTRA-EXPONENTIELLE $\xi(x)$.

SECTION I.

SUR LES FONCTIONS $\xi_k(x)$ ET $\eta_k(x)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Définition de la fonction $\xi(x)$.

1. Considérons l'intégrale définie

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du$$

qui représente la fonction connue $\Gamma(s)$ à condition que la partie réelle de la variable s soit positive. Le carré de la fonction $\Gamma(s)$ peut être défini par l'intégrale double

$$\Gamma^2(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (uv)^{s-1} e^{-(u+v)} du\, dv;$$

en effectuant le changement des variables u et v dans cette intégrale à l'aide de la substitution

$$uv = x \quad \text{et} \quad \frac{u+v}{2\sqrt{uv}} = t,$$

on obtiendra

$$\Gamma^2(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \int_1^{\infty} \frac{2e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

En désignant

$$(1) \qquad \xi(x) = \int_1^{\infty} \frac{2e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}} dt,$$

on aura, à cause de l'égalité précédente,

$$\Gamma^2(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\xi(x)\,dx.$$

Nous appellerons *ultra-exponentielle* la fonction $\xi(x)$ représentée par l'intégrale définie (1), à cause d'une certaine analogie qui existe entre les propriétés de la fonction $\xi(x)$ et celles de la fonction exponentielle e^{-x}.

2. Nous avons obtenu l'intégrale (1) qui définit la fonction $\xi(x)$ en supposant que la variable x soit positive. Mettons maintenant de côté cette restriction et considérons l'intégrale (1) en attribuant à la variable x toutes les valeurs complexes.

Pour que l'intégrale (1) ait un sens, il est nécessaire que l'on ait choisi pour le radical $\sqrt{x}$ une détermination de telle sorte que la partie réelle de $\sqrt{x}$ ne soit pas négative. Cette condition définit complètement le radical $\sqrt{x}$ tant que la valeur de x n'est pas négative; dans le cas $x < 0$, on peut prendre le radical purement imaginaire $\sqrt{x}$ avec une détermination arbitraire, et l'intégrale considérée aura toujours un sens; dans le cas $x = 0$, cette intégrale devient infiniment grande. On en conclut que la fonction $\xi(x)$ ne peut être définie uniformément dans tout le plan de la variable complexe x à l'aide de l'intégrale (1).

Définition. — *On appelle ultra-exponentielle la fonction $\xi(x)$ représentée par l'intégrale définie*

$$\xi(x) = \int_1^\infty \frac{2e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \tag{2}$$

à condition que la partie réelle du radical $\sqrt{x}$ soit positive.

En vertu de la définition établie, la fonction $\xi(x)$ est bien déterminée dans tout le plan de la variable complexe x, les valeurs négatives de x et la valeur $x = 0$ étant exclues.

Propriétés fondamentales de la fonction $\xi(x)$.

3. On peut donner à l'intégrale qui définit la fonction $\xi(x)$ la forme suivante :

$$\xi(x) = 2\int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}}\frac{dt}{t} + 2\int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\right)dt.$$

A l'aide de la formule connue

$$(1) \qquad \int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}}\frac{dt}{t} = -\log 2\sqrt{x} - C + \int_0^1 \left(1 - e^{-2t\sqrt{x}}\right)\frac{dt}{t}$$

où C désigne la constante d'Euler et de l'égalité précédente, on obtiendra

$$(2) \quad \xi(x) = -2\log 2\sqrt{x} - 2C + 2\int_0^1 \left(1 - e^{-2t\sqrt{x}}\right)\frac{dt}{t} + 2\int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\right)dt.$$

En observant que dans la formule (1) $\log 2\sqrt{x}$ est pris avec une détermination

$$\log 2\sqrt{x} = \log 2\,|\sqrt{x}| + \omega i \qquad \text{où} \qquad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2},$$

on aura

$$2\log 2\sqrt{x} = 2\log 2 + \log x.$$

Puisque, d'autre part,

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\right)dt = \log 2,$$

on peut mettre l'égalité (2) sous la forme suivante :

$$\xi(x) = -\log x - 2C + 2\int_0^1 \left(1 - e^{-2t\sqrt{x}}\right)\frac{dt}{t} + 2\int_1^\infty \left(1 - e^{-2t\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)dt.$$

A l'aide des théorèmes connus sur les valeurs moyennes des intégrales définies, on obtiendra pour la fonction $\xi(x)$ l'expression suivante :

$$\xi(x) = -\log x - 2C + \mathfrak{z}8\sqrt{x} \qquad \text{où} \qquad |\mathfrak{z}| < 1. \tag{3}$$

Prenons les dérivées par rapport à la variable x des deux parties de la formule précédente ; il viendra

$$\xi'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^1 e^{-2t\sqrt{x}}\,dt + \frac{2}{\sqrt{x}}\int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right)dt,$$

et l'on peut poser

$$\xi'(x) = -\frac{1}{x} + \mathfrak{z}\frac{4}{\sqrt{x}} \qquad \text{où} \qquad |\mathfrak{z}| < 1. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) font voir deux propriétés importantes de la fonction $\xi(x)$, à savoir :

I. *La somme* $\xi(x) + \log x$ *tend vers la limite* $-2C$ *quand le module de la variable* x *décroît infiniment.*

II. *Le produit* $x\xi'(x)$ *tend vers la limite* -1 *quand le module de la variable* x *décroît infiniment.*

4. Prenons les dérivées par rapport à la variable x des deux parties de la formule

$$\xi(x) = \int_1^\infty \frac{2e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \tag{5}$$

et multiplions les résultats obtenus par x ; on aura

$$x\xi'(x) = -2\sqrt{x}\int_1^\infty \frac{te^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

Prenons de nouveau les dérivées des deux parties de la formule obtenue; il viendra

$$\frac{dx\xi'(x)}{dx} = \int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}}\left(2t^2 - \frac{t}{\sqrt{x}}\right)\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

et l'intégration donne

$$\frac{dx\xi'(x)}{dx} = \int_1^\infty \frac{2e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt,$$

d'où il résulte, à cause de (5),

$$\frac{dx\xi'(x)}{dx} = \xi(x) \tag{6}$$

ou, autrement,

$$x\frac{d^2\xi(x)}{dx^2} + \frac{d\xi(x)}{dx} - \xi(x) = 0. \tag{7}$$

L'équation différentielle obtenue appartient à la classe des équations différentielles linéaires du second ordre qui définissent les fonctions cylindriques ou de Bessel ([1]).

L'équation différentielle (7) et les conditions complémentaires

$$\lim_{|x|=0}[\xi(x) + \log x] = -2C, \qquad \lim_{|x|=0} x\xi'(x) = -1$$

définissent uniformément la fonction ultra-exponentielle $\xi(x)$.

Développement de la fonction $\xi(x)$ en une série.

5. Considérons l'intégrale définie

$$\int_\rho^1 x\xi'(xt)\,dt,$$

ρ étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra. En effectuant l'intégration, on obtient

$$\xi(x) = \xi(x\rho) + \int_\rho^1 x\xi'(xt)\,dt.$$

([1]) *Voyez* le Mémoire de M. J. Nicolas : *Étude des fonctions de Fourier* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, supplément au Tome XI, 1882).

Comme, à cause de la formule (6) du n° 4, on a

$$\frac{dt\xi'(xt)}{dt} = \xi(xt),$$

l'intégration par parties donne

$$\xi(x) = \xi(x\rho) - x\rho\xi'(x\rho)\log\rho - x\int_\rho^1 \log t\,\xi(xt)\,dt.$$

En faisant tendre la variable ρ vers la limite o, on trouvera

$$(1) \qquad \xi(x) = -\log x - 2C - x\int_0^1 \log t\,\xi(xt)\,dt,$$

en vertu des propriétés de la fonction $\xi(x)$ démontrées au n° 3.

Les transformations ultérieures de la formule obtenue peuvent être effectuées à l'aide du procédé suivant :

Considérons l'intégrale définie

$$\int_\rho^1 \alpha(t)\xi(xt)\,dt,$$

la fonction $\alpha(t)$ étant prise arbitrairement. En désignant

$$\int_1^t \alpha(t)\,dt = \beta(t)$$

et

$$\int_1^t \frac{\beta(t)}{t}\,dt = \gamma(t),$$

on obtiendra, à l'aide de l'intégration par parties,

$$(2) \quad \int_\rho^1 \alpha(t)\xi(xt)\,dt = -\xi(x\rho)\beta(\rho) + x\rho\xi'(x\rho)\gamma(\rho) + x\int_\rho^1 \gamma(t)\xi(xt)\,dt.$$

L'application de la formule obtenue à la fonction

$$(3) \qquad \alpha_0(t) = -\log t$$

conduit à la série infinie des intégrales

$$\int_\rho^1 \alpha_0(t)\xi(xt)\,dt, \quad \int_\rho^1 \alpha_1(t)\xi(xt)\,dt, \quad \dots, \quad \int_\rho^1 \alpha_n(t)\xi(xt)\,dt, \quad \dots$$

dans lesquelles les fonctions

$$\alpha_0(t), \quad \alpha_1(t), \quad \dots, \quad \alpha_n(t), \quad \dots$$

sont liées par les relations

$$(4) \quad \int_1^t \alpha_n(t)\,dt = \beta_n(t) \qquad \text{et} \qquad \int_1^t \frac{\beta_n(t)}{t}\,dt = \alpha_{n+1}(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

6. Les égalités obtenues font voir les propriétés suivantes de la fonction $\alpha_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

I. *La fonction $\alpha_n(t)$ est positive dans l'intervalle $0 < t < 1$ et y décroît toujours.*

II. *La fonction $\alpha_n(t)$ a pour expression*

$$(5) \qquad \alpha_n(t) = p_n(t)\log t + q_n(t),$$

$p_n(t)$ et $q_n(t)$ étant deux polynomes du degré n.

Des égalités (4) on déduira, à l'aide des différentiations successives, l'équation

$$t\alpha_{n+1}^{(k+2)}(t) + (k+1)\,\alpha_{n+1}^{(k+1)}(t) = \alpha_n^{(k)}(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

De l'équation obtenue et des égalités (4) et (3) découle la propriété suivante de la fonction $\alpha_n(t)$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$:

III. *La fonction $\alpha_n(t)$ et ses dérivées $\alpha'_n(t), \dots, \alpha_n^{(2n)}(t)$ s'annulent quand $t = 1$, tandis que la valeur correspondante de la fonction $\alpha_n^{(2n+1)}(t)$ est toujours $\alpha_n^{(2n+1)}(1) = -1$.*

En observant que la fonction $\alpha_n(t)$ a pour expression

$$\alpha_n(t) = p_n(t)\log t + q_n(t)$$

où $p_n(t)$ et $q_n(t)$ désignent deux polynomes du degré n, on en conclut que la propriété (III) définit complètement la fonction $\alpha_n(t)$.

En différentiant $n+1$ fois la fonction $\alpha_n(t)$, par rapport à la variable t, on trouvera

$$\alpha_n^{(n+1)}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} \frac{(n+1)!}{\lambda!\,(n+1-\lambda)} t^\lambda p_n^{(\lambda)}(t)$$

et en désignant

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} \frac{(n+1)!}{\lambda!\,(n+1-\lambda)} t^\lambda p_n^{(\lambda)}(t) = \varphi(t),$$

on aura le polynome $\varphi(t)$ dont le degré ne surpasse pas n.

Puisque, d'après l'égalité précédente, on a

$$\alpha_n^{(n+1)}(t) = \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}}, \tag{6}$$

il en résulte que les équations

$$\alpha_n^{(n+1)}(1) = 0, \quad \alpha_n^{(n+2)}(1) = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n^{(2n)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n^{(2n+1)}(1) = -1$$

sont équivalentes aux équations

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^{(n)}(1) = -1,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi(t) = -\frac{(t-1)^n}{n!},$$

et, à cause de (6), il vient

$$\alpha_n^{(n+1)}(t) = -\frac{1}{n!} \frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}. \tag{7}$$

En développant la fonction $\alpha_n(t)$ en série de Taylor

$$\alpha_n(t) = \alpha_n(1) + \frac{t-1}{1}\alpha_n'(1) + \ldots + \frac{(t-1)^n}{n!}\alpha_n^{(n)}(1) + \int_1^t \frac{(t-u)^n}{n!}\alpha_n^{(n+1)}(u)\,du,$$

on obtiendra pour la fonction $\alpha_n(t)$, en vertu de (III) et (7), l'expression suivante :

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{(n!)^2}\int_1^t \frac{(t-u)^n(u-1)^n}{u^{n+1}}\,du.$$

L'intégration, dans la formule obtenue, peut être effectuée aisément, et, après les réductions, on arrivera au résultat suivant :

$$\alpha_n(t) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{t^{n-\lambda}}{[\lambda!\,(n-\lambda)!]^2}\left[-\log t + 2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-\lambda}\right) - 2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\right];$$

dans cette formule le symbole $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}$ a la valeur o quand $\lambda = 0$.

En vertu de la formule obtenue et de (5), on peut présenter les polynomes $p_n(t)$ et $q_n(t)$ sous la forme suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} p_n(t) = -\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{n} \frac{t^{n-\lambda}}{[\lambda!\,(n-\lambda)!]^2}, \\ q_n(t) = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{n} \frac{t^{n-\lambda}}{[\lambda!\,(n-\lambda)!]^2}\left[2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-\lambda}\right) - 2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \\ \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

7. Revenons maintenant à la formule (2); en y posant $\alpha(t) = \alpha_{m-1}(t)$, on aura

$$(9)\quad \int_\rho^1 \alpha_{m-1}(t)\,\xi(xt)\,dt$$
$$= -\xi(x\rho)\,\beta_{m-1}(\rho) + x\rho\,\xi'(x\rho)\,\alpha_m(\rho) + x\int_\rho^1 \alpha_m(t)\,\xi(xt)\,dt.$$

Puisque, à cause de (4) et (5),

$$\alpha_m(\rho) = p_m(\rho)\log\rho + q_m(\rho) \quad \text{et} \quad \beta_{m-1}(\rho) = \rho\,p'_m(\rho)\log\rho + p_m(\rho) + \rho\,q'_m(\rho),$$

on obtiendra en faisant $\rho = 0$

$$\lim_{\rho=0}\,[-\xi(x\rho)\,\beta_{m-1}(\rho) + x\rho\xi'(x\rho)\,\alpha_m(\rho)] = p_m(0)\,(\log x + 2C) - q_m(0)$$

et, à cause de (8), il vient

$$\lim_{\rho=0}[-\xi(x\rho)\,\beta_{m-1}(\rho)+x\rho\xi'(x\rho)\,\alpha_m(\rho)]$$
$$=\frac{1}{m!\,m!}\left[-\log x-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\right];$$

donc, en faisant $\rho=0$ dans la formule (9), on aura

$$x^m\int_0^1\alpha_{m-1}(t)\,\xi(xt)\,dt=\frac{x^m}{m!\,m!}\left[-\log x-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\right]$$
$$+x^{m+1}\int_0^1\alpha_m(t)\,\xi(xt)\,dt.$$

En attribuant au nombre m les valeurs $m=1, 2, \ldots, n-1$ et en faisant la somme des égalités obtenues, on aura, en vertu de (1) et (3),

$$\xi(x)=\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{x^\lambda}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log x-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\right]\tag{10}$$
$$+x^n\int_0^1\alpha_{n-1}(t)\,\xi(xt)\,dt.$$

En désignant

$$R_n(x)=x^n\int_0^1\alpha_{n-1}(t)\,\xi(xt)\,dt,$$

on peut donner au reste $R_n(x)$ la forme suivante :

$$R_n(x)=-x^n\int_0^1\alpha_{n-1}(t)(\log xt+2C)\,dt+x^n\int_0^1\alpha_{n-1}(t)\,[\xi(xt)+\log xt+2C]\,dt.$$

Comme

$$-\int_0^1\alpha_{n-1}(t)(\log xt+2C)\,dt=\lim_{\rho=0}[\beta_{n-1}(\rho)(\log x\rho+2C)-\alpha_n(\rho)]$$

et

$$\lim_{\rho=0}[\beta_{n-1}(\rho)(\log xt+2C)-\alpha_n(\rho)]=\frac{1}{n!\,n!}\left[-\log x-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right],$$

il vient

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!\,n!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$+ x^n \int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,[\xi(xt) + \log xt + 2C]\,dt.$$

En vertu de la formule (3) du n° 3, on aura

$$\xi(xt) + \log xt + 2C = \Im 8\sqrt{xt} \qquad \text{où} \qquad |\Im| < 1.$$

En observant que la fonction $\alpha_{n-1}(t)$, d'après ce qui a été dit au n° 6, est positive dans l'intervalle $0 < t < 1$, on peut poser

$$\int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,[\xi(xt) + \log xt + 2C]\,dt = \Im 8\sqrt{x}\int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,dt \qquad \text{où} \qquad |\Im| < 1;$$

et puisque

$$\int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,dt = \frac{1}{n!\,n!},$$

il vient

$$\int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,[\xi(xt) + \log xt + 2C]\,dt = \Im 8\sqrt{x}\,\frac{1}{n!\,n!},$$

donc le reste $R_n(x)$ aura pour expression

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!\,n!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \Im 8\sqrt{x}\right]$$

où $|\Im| < 1$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (10), on aura

$$(11) \qquad \xi(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{x^\lambda}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right)\right] + \Im 8\sqrt{x}\,\frac{x^n}{n!\,n!}$$

où $|\Im| < 1$.

La formule obtenue subsiste, quelle que soit la valeur complexe de la variable x, les valeurs négatives de x et la valeur $x = 0$ étant exclues.

En faisant $n=\infty$, on obtient le développement connu en série infinie

$$\xi(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{x^\lambda}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log x-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\right] \tag{12}$$

de l'intégrale particulière $\xi(x)$ de l'équation différentielle linéaire

$$x\frac{d^2\xi(x)}{dx^2}+\frac{d\xi(x)}{dx}-\xi(x)=0.$$

Sur la fonction $\eta(x)$ complémentaire à la fonction $\xi(x)$.

8. On appellera complémentaire à la fonction $\xi(x)$ la fonction $\eta(x)$ définie par la formule

$$\eta(x)=\lim_{\rho=0}\frac{\xi(-x+\rho i)+\xi(-x-\rho i)}{2} \tag{1}$$

à condition que $x>0$ et $\rho>0$.

A l'aide de la formule (11) du n° 7, on obtient

$$\left\{\begin{aligned}\xi(-x+\rho i)&=\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{(-x+\rho i)^\lambda}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log(-x+\rho i)-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\right]\\&\quad+\Im_0 8\sqrt{-x+\rho i}\,\frac{(-x+\rho i)^n}{n!\,n!},\\ \xi(-x-\rho i)&=\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{(-x-\rho i)^\lambda}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log(-x-\rho i)-2C+2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\right]\\&\quad+\Im_1 8\sqrt{-x-\rho i}\,\frac{(-x-\rho i)^n}{n!\,n!}\end{aligned}\right.$$

où $|\Im_0|<1$ et $|\Im_1|<1$.

En observant que, par hypothèse, $x>0$ et $\rho>0$, on trouve

$$\lim_{\rho=0}\log(-x+\rho i)=\log x+\pi i \qquad \text{et} \qquad \lim_{\rho=0}\log(-x-\rho i)=\log x-\pi i,$$

et, en vertu de (1) et (2), il vient

$$\eta(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(-x)^{\lambda}}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right)\right] + \vartheta\, 8\sqrt{x}\,\frac{x^n}{n!\,n!}$$

où $x > 0$ et $-1 < \vartheta < 1$.

En faisant $n = \infty$ dans l'égalité obtenue, on aura

$$(3) \qquad \eta(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-x)^{\lambda}}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right)\right].$$

A l'aide de la série infinie obtenue, la fonction $\eta(x)$ peut être définie uniformément dans tout le plan de la variable complexe x, les valeurs négatives de x et la valeur $x = 0$ étant exclues.

En différentiant la série infinie (3) par rapport à la variable x, on démontrera que la fonction $\eta(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dx\eta'(x)}{dx} = -\eta(x)$$

ou, autrement,

$$x\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{d\eta(x)}{dx} + \eta(x) = 0.$$

L'équation différentielle obtenue et les conditions complémentaires

$$\lim_{|x|=0} [\eta(x) + \log x] = -2C, \qquad \lim_{|x|=0} x\eta'(x) = -1$$

définissent uniformément la fonction $\eta(x)$.

A l'aide du développement de la fonction $\eta(x)$ en série infinie (3), on déduira la formule suivante :

$$(5) \qquad \xi(x) = \lim_{\rho=0} \frac{\eta(-x+\rho i) + \eta(-x-\rho i)}{2}$$

où $x > 0$ et $\rho > 0$.

En vertu des relations (1) et (5), nous appelons *complémentaires* les fonctions $\xi(x)$ et $\eta(x)$.

Dans ce qui suit on ne considérera la fonction $\eta(x)$ qu'à condition que la variable x soit positive.

Sur la fonction $\xi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

9. Donnons à l'intégrale qui définit la fonction $\xi(x)$ la forme suivante :

$$\xi(x)=\int_1^\infty \frac{e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t-1}}\,\frac{2}{\sqrt{t+1}}\,dt.$$

En supposant que la variable x soit positive, on aura

$$0<\xi(x)<\sqrt{2}\int_1^\infty \frac{e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t-1}}\,dt;$$

et puisque

$$\sqrt{2}\int_1^\infty \frac{e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t-1}}\,dt=\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}},$$

on peut poser

$$\xi(x)=\vartheta\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{x}}\,e^{-2\sqrt{x}}$$

où $x>0$ et $0<\vartheta<1$.

En vertu de la formule obtenue, on conclut que toutes les intégrales définies

$$\xi_1(x)=\int_x^\infty \xi(x)\,dx,\quad \xi_2(x)=\int_x^\infty \xi_1(x)\,dx,\quad \ldots,\quad \xi_k(x)=\int_x^\infty \xi_{k-1}(x)\,dx,\quad \ldots$$

ont un sens.

En posant $\xi_0(x)=\xi(x)$, on peut définir toutes les fonctions

$$\xi_1(x),\quad \xi_2(x),\quad \ldots,\quad \xi_k(x),\quad \ldots$$

par la formule générale

$$\xi_k(x)=\int_x^\infty \xi_{k-1}(x)\,dx \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

En prenant les dérivées par rapport à la variable x des deux parties de cette formule, on aura

$$\frac{d\xi_k(x)}{dx}=-\xi_{k-1}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

En faisant $k = 1$, on obtient

$$\frac{d\xi_1(x)}{dx} = -\xi(x); \tag{2}$$

d'autre part, en vertu de la formule (6) du n° 4, on a

$$\frac{dx\xi'(x)}{dx} = \xi(x);$$

il en résulte

$$\xi_1(x) = -x\xi'(x) + \mathrm{A},$$

A étant une constante fixe. En observant que les fonctions $\xi_1(x)$ et $x\xi'(x)$ tendent vers la limite o quand la variable x croît infiniment, on en conclut que $\mathrm{A} = 0$; donc, on a

$$\xi_1(x) = -x\xi'(x). \tag{3}$$

Intégrons les deux parties de cette égalité entre les limites x et ∞, il viendra, à cause de (1),

$$\xi_2(x) = x\xi(x) + \xi_1(x).$$

En intégrant de nouveau, on trouvera

$$\xi_3(x) = x\xi_1(x) + 2\xi_2(x),$$

et ainsi de suite. En général, on aura

$$\xi_k(x) = x\xi_{k-2}(x) + (k-1)\xi_{k-1}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

De l'équation obtenue on peut éliminer les fonctions $\xi_{k-1}(x)$ et $\xi_{k-2}(x)$, en vertu des équations

$$\frac{d\xi_k(x)}{dx} = -\xi_{k-1}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\xi_k(x)}{dx^2} = \xi_{k-2}(x);$$

il viendra

$$x\frac{d^2\xi_k(x)}{dx^2} + (1-k)\frac{d\xi_k(x)}{dx} - \xi_k(x) = 0.$$

C'est l'équation différentielle générale des fonctions cylindriques.

10. Nous avons défini les fonctions $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ... par la formule (1) en supposant que la variable x soit positive. Les formules obtenues

$$\xi_0(x) = \xi(x), \qquad \xi_1(x) = -x\xi'(x)$$

et

$$\xi_k(x) = x\xi_{k-2}(x) + (k-1)\xi_{k-1}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

peuvent servir au prolongement analytique des fonctions $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ... dans le domaine de la variable x où la fonction $\xi(x)$ est bien déterminée. Dans ce domaine les fonctions considérées peuvent être représentées par les intégrales définies suivantes :

Théorème. — *L'intégrale définie*

$$(5) \qquad \xi_k(x) = x^k \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_1^\infty (t^2-1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-2t\sqrt{x}}\, dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

représente la fonction $\xi_k(x)$ pour toutes les valeurs complexes de la variable x, les valeurs négatives de x et la valeur $x = 0$ étant exclues.

Dans le cas $k = 0$, le théorème énoncé est évident puisque nous avons désigné $\xi_0(x) = \xi(x)$ et, en vertu de la formule (2) du n° 2, la fonction $\xi(x)$ est représentée par l'intégrale définie

$$\xi(x) = 2\int_1^\infty e^{-2t\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

En différentiant cette formule par rapport à la variable x, on obtiendra, à cause de (3),

$$\xi_1(x) = 2\sqrt{x}\int_1^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} e^{-2t\sqrt{x}}\, dt,$$

et l'intégration par parties donne

$$\xi_1(x) = 4x\int_1^\infty \sqrt{t^2-1}\, e^{-2t\sqrt{x}}\, dt$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi_1(x) = x\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_1^\infty (t^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{-2t\sqrt{x}}\, dt\,;$$

donc, le théorème est aussi démontré dans le cas $k = 1$.

A l'aide de l'équation (4), on démontrera que la fonction $\xi_k(x)$ sera représentée par l'intégrale définie (5) à condition que les fonctions $\xi_{k-1}(x)$ et $\xi_{k-2}(x)$ soient représentées par les intégrales correspondantes ($k = 2, 3, \ldots$).

Sur la fonction $\eta_k(x)$ complémentaire à la fonction $\xi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

11. On appellera complémentaire à la fonction $\xi_k(x)$ la fonction $\eta_k(x)$ définie par la formule

$$(1) \qquad \eta_k(x) = \lim_{\rho=0} \frac{\xi_k(-x+\rho i) + \xi_k(-x-\rho i)}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

à condition que $x > 0$ et $\rho > 0$.

A l'aide de l'équation (4) du n° 9, on obtient

$$\xi_k(-x+\rho i) = (-x+\rho i)\xi_{k-2}(-x+\rho i) + (k-1)\xi_{k-1}(-x+\rho i),$$
$$\xi_k(-x-\rho i) = (-x-\rho i)\xi_{k-2}(-x-\rho i) + (k-1)\xi_{k-1}(-x-\rho i);$$

il en résulte, à cause de (1),

$$(2) \qquad \eta_k(x) = -x\eta_{k-2}(x) + (k-1)\eta_{k-1}(x) \qquad (k = 2, 3 \ldots).$$

En vertu de l'égalité (3) du n° 9, on aura

$$\xi_1(-x+\rho i) = -(-x+\rho i)\xi'(-x+\rho i),$$

et

$$\xi_1(-x-\rho i) = -(-x-\rho i)\xi'(-x-\rho i);$$

on en conclut que

$$(3) \qquad \eta_1(x) = x \lim_{\rho=0} \frac{\xi'(-x+\rho i) + \xi'(-x-\rho i)}{2}.$$

Ayant égard au développement (12) (n° 7) de la fonction $\xi(x)$ en série infinie, on trouve

$$\lim_{\rho=0} \frac{\xi'(-x+\rho i) + \xi'(-x-\rho i)}{2}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda \frac{(-x)^{\lambda-1}}{\lambda!\lambda!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right)\right] - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-x)^{\lambda-1}}{\lambda!\lambda!}.$$

D'autre part, à l'aide du développement (3) (n° 8) de la fonction $\eta(x)$ en série infinie, on obtient

$$\eta'(x) = -\sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda \frac{(-x)^{\lambda-1}}{\lambda!\,\lambda!}\left[-\log x - 2C + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right)\right] + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-x)^{\lambda-1}}{\lambda!\,\lambda!};$$

il en résulte

$$\lim_{\rho=0} \frac{\xi'(-x+\rho i) + \xi'(-x-\rho i)}{2} = -\eta'(x).$$

En substituant ce résultat dans la formule (3), on aura

$$\eta_1(x) = -x\eta'(x).$$

Puisque la fonction $x\eta'(x)$, en vertu de la formule (4) du n° 8, vérifie l'équation

$$\frac{dx\eta'(x)}{dx} = -\eta(x),$$

de l'égalité précédente il suit

$$\frac{d\eta_1(x)}{dx} = \eta(x). \tag{4}$$

A l'aide de l'équation (2), on démontrera que l'équation

$$\frac{d\eta_k(x)}{dx} = \eta_{k-1}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

a lieu quelle que soit la valeur entière positive de l'indice k.

En éliminant les fonctions $\eta_{k-1}(x)$ et $\eta_{k-2}(x)$ des équations

$$\eta_k(x) = -x\eta_{k-2}(x) + (k-1)\eta_{k-1}(x),$$

$$\frac{d\eta_k(x)}{dx} = \eta_{k-1}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\eta_k(x)}{dx^2} = \eta_{k-2}(x),$$

on obtiendra l'équation différentielle

$$x\frac{d^2\eta_k(x)}{dx^2} + (1-k)\frac{d\eta_k(x)}{dx} + \eta_k(x) = 0.$$

C'est aussi l'équation différentielle générale des fonctions cylindriques présentée sous une autre forme.

Développement des fonctions $\xi_k(x)$ et $\eta_k(x)$ en séries semi-convergentes.

12. Nous avons démontré au nº 10 que l'intégrale définie

$$\xi_k(x) = x^k \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_1^\infty (t^2-1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-2t\sqrt{x}}\,dt$$

représente la fonction $\xi_k(x)$ à condition que la partie réelle du radical $\sqrt{x}$ soit positive.

Effectuons dans cette intégrale le changement de la variable t à l'aide de la substitution

$$t = 2u^2+1 \qquad \text{où} \qquad u > 0.$$

La nouvelle forme de l'intégrale considérée sera

$$(1) \qquad \xi_k(x) = x^k e^{-2\sqrt{x}} \frac{2^{2k+2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_0^\infty u^{2k}(u^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4u^2\sqrt{x}}\,du.$$

Supposons maintenant que le radical $\sqrt{x}$ soit mis sous la forme

$$(2) \qquad \sqrt{x} = re^{\varphi i}.$$

Puisque la partie réelle de $\sqrt{x}$ est positive, l'argument φ doit satisfaire aux conditions

$$(3) \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

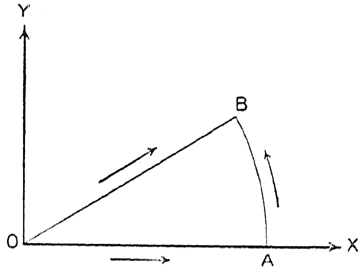
Menons, de l'origine O des coordonnées, la droite OB définie par l'équation

$$(4) \qquad (\text{OB}) \qquad z = ue^{-\frac{\varphi}{2}i}$$

et par les conditions $0 < u < \text{R}$; puis, décrivons l'arc AB du cercle ayant le rayon R et le centre à l'origine O (*fig.* 1). En supposant que la partie réelle du radical $(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}}$ soit positive, considérons l'intégrale

$$\int z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz$$

Fig. 1.



prise le long du contour fermé OABO. Puisque la fonction

$$z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}$$

est holomorphe à l'intérieur de ce contour, on aura, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{(OABO)} z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz = 0.$$

En partageant le chemin de l'intégration OABO en trois parties OA, AB et BO, on obtient

$$(5)\quad \int_{(OA)} z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz + \int_{(AB)} z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz = \int_{(OB)} z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz.$$

En observant que le module de la fonction $z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}$ sur le chemin de l'intégration AB ne surpasse pas la limite

$$\left| z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}} \right| < \mathrm{R}^{2k}(\mathrm{R}^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4r\mathrm{R}^2\cos\varphi},$$

dans le cas $k \geqq 1$, ni la limite

$$\left| z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}} \right| < \frac{e^{-4r\mathrm{R}^2\cos\varphi}}{[illegible]},$$

dans le cas $k=0$, on en conclut que l'intégrale

$$\int_{(\mathrm{AB})} z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz$$

tend vers la limite o à mesure que le rayon R de l'arc du cercle AB croît infiniment. En faisant $R=\infty$, on obtient, en vertu de (4) et (5),

$$\int_0^\infty z^{2k}(z^2+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4z^2\sqrt{x}}\,dz = \int_0^\infty e^{-i\frac{\varphi(2k+1)}{2}} u^{2k}(u^2 e^{-\varphi i}+1)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4ru^2}\,du.$$

En désignant, pour abréger,

$$e^{-\varphi i} = \alpha, \tag{6}$$

on aura, à cause de (1),

$$\xi_k(x) = x^k e^{-2\sqrt{x}} \frac{2^{2k+2}\alpha^{k+\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_0^\infty u^{2k}(1+\alpha u^2)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4ru^2}\,du. \tag{7}$$

13. La fonction $(1+\alpha u^2)^{k-\frac{1}{2}}$ peut être développée en série suivant les puissances entières et croissantes de αu^2 :

$$(1+\alpha u^2)^{k-\frac{1}{2}} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-\alpha u^2)^\lambda \frac{\Gamma(\lambda-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+1)} + \varepsilon(-\alpha u^2)^n \frac{\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}$$

où $|\varepsilon|<1$, à condition que $n \geqq k$, puisque la partie réelle de α est positive, en vertu de (3) et (6).

En multipliant les deux parties de cette égalité par $u^{2k}e^{-4ru^2}du$ et en les intégrant entre les limites o et ∞, on obtiendra

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u^{2k}(1+\alpha u^2)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4ru^2}\,du = {} & \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-\alpha)^\lambda \frac{\Gamma(\lambda-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty u^{2k+2\lambda} e^{-4ru^2}\,du \\ & + \mathfrak{I}(-\alpha)^n \frac{\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})\Gamma(n+1)} \int_0^\infty u^{2k+2n} e^{-4ru^2}\,du\end{aligned}$$

où $|\mathfrak{I}|<1$. A l'aide de la formule

$$\int_0^\infty u^{2m} e^{-4ru^2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(4r)^{m+\frac{1}{2}}},$$

on peut prêter à l'égalité précédente la forme suivante :

$$\int_0^\infty u^{2k}(1+\alpha u^2)^{k-\frac{1}{2}} e^{-4ru^2}\,du = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(-\alpha)^\lambda}{(4r)^{\lambda+k+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\lambda-k+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+1)} + \mathfrak{I}\frac{1}{2}\frac{(-\alpha)^n}{(4r)^{n+k+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(n-k+\frac{1}{2})\Gamma(n+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (7) et en observant que

$$\frac{r}{\alpha} = \sqrt{x},$$

à cause de (2) et (6), on aura

$$\xi_k(x) = (\sqrt{x})^{k-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(-k+\frac{1}{2})} \times \left[\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(-1)^\lambda}{(4\sqrt{x})^\lambda} \frac{\Gamma(\lambda-k+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)} + \mathfrak{I}\frac{(-1)^n}{(4\sqrt{x})^n}\frac{\Gamma(n-k+\frac{1}{2})\Gamma(n+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\right]$$

où

$$|\mathfrak{I}| < 1 \quad \text{et} \quad n \geqq k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

dans le cas $x > 0$, la variable $\mathfrak{I}$ satisfait aux conditions $0 < \mathfrak{I} < 1$.

A l'aide des formules

$$\frac{\Gamma(\lambda+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} = \frac{(2k+2\lambda-1)(2k+2\lambda-3)\ldots(2k+1)}{2^\lambda}$$

et

$$\frac{\Gamma(\lambda-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k+\frac{1}{2})} = (-1)^\lambda \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k+1-2\lambda)}{2^\lambda},$$

on peut présenter l'égalité précédente sous une autre forme

$$(\mathrm{I}) \quad \xi_k(x) = \sqrt{\pi}(\sqrt{x})^{k-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \left[\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(2k+2\lambda-1)(2k+2\lambda-3)\ldots(2k+1-2\lambda)}{\lambda!(16\sqrt{x})^\lambda} + \mathfrak{I}\frac{(2k+2n-1)(2k+2n-3)\ldots(2k+1-2n)}{n!(16\sqrt{x})^n}\right]$$

où $|\mathfrak{I}| < 1$ et $n \geqq k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; dans le cas $x > 0$, on a $0 < \mathfrak{I} < 1$.

En faisant $k=0$ et $n=0$, on aura

$$\xi(x) = \vartheta \frac{\sqrt{\pi}}{(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} e^{-2\sqrt{x}}, \qquad \text{où} \qquad |\vartheta| < 1. \tag{8}$$

La formule obtenue fait voir la propriété remarquable de la fonction $\xi(x)$, à savoir : *dans chaque point à l'infini la fonction $\xi(x)$ s'annule*.

La série (I) ne définit pas la fonction $\xi_k(x)$, puisqu'en faisant $n=\infty$ on obtient toujours la série divergente, quelle que soit la valeur attribuée à la variable x; néanmoins, cette série peut servir au calcul des valeurs approchées de la fonction $\xi_k(x)$ correspondant aux valeurs de x dont le module est suffisamment grand.

La formule (I), dans le cas $k=0$ et $x>0$, a été obtenue par Riemann [1].

14. Nous avons défini la fonction $\eta_k(x)$ au nº 11 par la formule

$$\eta_k(x) = \lim_{\rho=0} \frac{\xi_k(-x+\rho i)+\xi_k(-x-\rho i)}{2}, \tag{9}$$

à condition que $x>0$ et $\rho>0$.

On peut développer la fonction $\eta_k(x)$ aussi en une série semi-convergente. En vertu des formules (9) et (I), il vient

$$\text{(II)} \quad \eta_k(x) = \sqrt{\pi}(\sqrt{x})^{k-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(2k+2\lambda-1)(2k+2\lambda-3)\dots(2k+1-2\lambda)}{\lambda!\,(16\sqrt{x})^{\lambda}} \cos\left[2\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}(\lambda-k+\tfrac{1}{2})\right] + \vartheta\,\frac{(2k+2n-1)(2k+2n-3)\dots(2k+1-2n)}{n!\,(16\sqrt{x})^{n}} \right\}$$

où

$$x>0, \qquad -1<\vartheta<1 \qquad \text{et} \qquad n \geqq k \qquad (k=0, 1, 2, \dots).$$

---

(1) RIEMANN, *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe* (*Riemann's Gezammelte Mathematische Werke*, Leipzig, 1876, p. 58). *Voyez* aussi le Mémoire de Hankel, *Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art* (*Mathematische Annalen*, Bd. I, p. 491) et le Mémoire de STIELTJES, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III, 1886, p. 201).

En faisant $k = 0$ et $n = 0$, on aura

$$\eta(x) = \vartheta \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{x}} \qquad \text{où} \qquad -1 < \vartheta < 1.$$

D'après la formule obtenue, on conclut que la fonction $\eta(x)$ tend vers la limite 0 quand x croît infiniment.

SECTION II.

SUR LA FONCTION SOMMATOIRE $g(x)$.

Inversion de l'intégrale définie $\Gamma^2(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\xi(u)\,du.$

15. Considérons l'intégrale définie

$$\Gamma^2(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\xi(u)\,du$$

obtenue au n° 1 qui représente la fonction $\Gamma^2(s)$ à condition que la partie réelle de la variable s soit positive. En remplaçant dans cette intégrale s par $s+1$, on aura

$$\Gamma^2(s) = \int_0^\infty \frac{u^s}{s^2}\xi(u)\,du,$$

en vertu de la propriété connue de la fonction $\Gamma(s)$, à savoir :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Multiplions les deux parties de l'égalité précédente par $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{ds}{x^s}$ en supposant que le nombre x soit positif, et intégrons les fonctions obtenues par rapport à la variable complexe s dans le domaine défini par les conditions

$$s = a + ti \quad \text{et} \quad -\infty < t < \infty,$$

le nombre positif a étant une constante prise arbitrairement; le résultat obtenu peut être présenté sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{x^s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^{-s}\frac{ds}{s^2}\int_0^{\infty} u^s \xi(u)\,du.$$

On démontrera sans peine qu'il est permis d'intervertir les intégrations dans l'intégrale double obtenue, d'où il résulte

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{x^s}\,ds = \int_0^{\infty} \xi(u)\,du \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{u}{x}\right)^s \frac{ds}{s^2}.$$

L'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{u}{x}\right)^s \frac{ds}{s^2}$$

est bien connue. Comme on sait,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{u}{x}\right)^s \frac{ds}{s^2} = \log\frac{u}{x},$$

à condition que $\frac{u}{x} \geqq 1$ et $a > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{u}{x}\right)^s \frac{ds}{s^2} = 0,$$

à condition que $0 < \frac{u}{x} \leqq 1$ et $a > 0$.

On en conclut que l'égalité (1) peut être remplacée par la suivante :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{x^s}\,ds = \int_x^{\infty} \log\frac{u}{x}\,\xi(u)\,du.$$

En intégrant par parties à l'aide de l'égalité

$$\xi(u) = \frac{du\,\xi'(u)}{du}$$

qui a été obtenue au n° 4, on trouvera

$$\xi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{x^s}\,ds.$$

La formule obtenue subsiste, quelle que soit la valeur positive de x, à condition que le paramètre a, pris arbitrairement, soit positif.

Définition de la fonction $g(x)$.

16. Introduisons dans nos recherches la fonction numérique $\tau(n)$ qui désigne le nombre des diviseurs du nombre entier positif n et considérons la somme de la série infinie

$$(1)\qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\xi(4\pi^2 nx).$$

La fonction $g(x)$ représentée par cette somme infinie est bien déterminée pour toutes les valeurs complexes de la variable x, les valeurs négatives de x et la valeur $x=0$ étant exclues. Pour le démontrer, il suffit de recourir à la formule (8) du n° 13; d'après cette formule, on aura

$$\xi(4\pi^2 nx) = \mathfrak{I}\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(2\pi\sqrt{nx})^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{où} \qquad |\mathfrak{I}| < 1.$$

Désignons, pour abréger, par α la partie réelle de $\sqrt{x}$, il viendra

$$(2)\qquad |\xi(4\pi^2 nx)| < \sqrt{\pi}\,\frac{e^{-4\pi\alpha\sqrt{n}}}{|4\pi^2 nx|^{\frac{1}{4}}}.$$

En prenant un nombre positif N, aussi grand que l'on voudra, on obtient

$$\left|\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n)\xi(4\pi^2 nx)\right| < \sqrt{\pi}\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n)\,\frac{e^{-4\pi\alpha\sqrt{n}}}{|4\pi^2 nx|^{\frac{1}{4}}}.$$

La fonction $ue^{-4\pi\alpha\sqrt{u}}$ de la variable positive u décroît toujours à condition que

$$u > \frac{1}{4\pi^2\alpha^2};$$

on en conclut que l'inégalité

$$\left|\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n)\xi(4\pi^2 n x)\right| < N e^{-4\pi\alpha\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\pi}}{|4\pi^2 x|^{\frac{1}{4}}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{5}{4}}} \tag{3}$$

aura lieu tant que

$$N > \frac{1}{4\pi^2\alpha^2}. \tag{4}$$

En observant que

$$\sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{5}{4}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{5}{4}}},$$

et en posant, d'après la désignation usuelle ([1]),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{5}{4}}} = \zeta^2\left(\tfrac{5}{4}\right),$$

on obtiendra, en vertu de (3),

$$\left|\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n)\xi(4\pi^2 n x)\right| < N e^{-4\pi\alpha\sqrt{N}} \frac{\zeta^2\left(\frac{5}{4}\right)}{|4x|^{\frac{1}{4}}}, \tag{5}$$

à condition de (4).

D'après l'inégalité obtenue, on conclut que la série infinie (1) est toujours convergente, si petite que soit la partie réelle de $\sqrt{x}$.

En supposant que la partie réelle de $\sqrt{x}$ satisfasse à la condition

$$R(\sqrt{x}) \geqq \sqrt{p}, \tag{6}$$

p étant un nombre positif, pris arbitrairement, on aura, à cause de (5), l'inégalité

$$\left|\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n)\xi(4\pi^2 n x)\right| < N e^{-4\pi\sqrt{Np}} \frac{\zeta^2\left(\frac{5}{4}\right)}{(4p)^{\frac{1}{4}}}$$

---

[1]) *Voyez*, par exemple, BACHMANN, *Zahlentheorie*, zweiter Theil; p. 326. Leipzig, 1894.

qui subsiste à condition que

$$N > \frac{1}{4\pi^2 p}.$$

Le théorème suivant est donc démontré :

THÉORÈME. — *La série infinie* (1) *dont la somme représente la fonction* $g(x)$ *est uniformément convergente dans chaque domaine de la variable complexe* x *défini par l'inégalité* (6).

En désignant $x = u + iv$, on aura

$$R(\sqrt{x}) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{u^2+v^2}+u)},$$

et la condition (6) se réduit à la suivante :

$$v^2 \geqq 4p(p-u).$$

Sur les intégrales définies qui représentent la fonction $g(x)$ à condition que $x > 0$.

17. Considérons l'intégrale définie

$$\xi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{x^s}\,ds,$$

obtenue au n° 15, qui représente la fonction $\xi(x)$ à condition que $x > 0$ et $a > 0$.

Supposons qu'au paramètre a on ait attribué une valeur quelconque satisfaisant à la condition $a > 1$.

Remplaçant x par $4\pi^2 nx$ dans la formule considérée, multiplions les deux parties de l'égalité obtenue par $\tau(n)$; il viendra

$$\tau(n)\xi(4\pi^2 nx) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,\frac{\tau(n)}{n^s}\,ds.$$

Prenons un nombre positif N, aussi grand que l'on voudra, et considérons la somme

$$\sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n)\xi(4\pi^2 n x).$$

D'après la formule précédente, on peut prêter à cette somme la forme suivante :

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n)\xi(4\pi^2 n x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s} \sum_{n=1}^{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^s}\, ds.$$

En introduisant la fonction de Riemann $\zeta(s)$, on aura

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},$$

puisque, par hypothèse,

$$s = a + ti \qquad \text{où} \qquad a > 1,$$

et l'on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s) - \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

En observant que

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \right| < \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^a},$$

on peut poser, à cause de l'égalité précédente,

$$\sum_{n=1}^{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s) + \varepsilon \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^a} \qquad \text{où} \qquad |\varepsilon| < 1.$$

En substituant le résultat obtenu dans l'égalité (1), on trouvera

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n)\xi(4\pi^2 n x)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varepsilon \frac{\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\, ds \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^a}.$$

En observant que

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \qquad \text{et} \qquad |\Gamma(s+1)| < \Gamma(a+1),$$

on aura

$$|\Gamma(s)| < \frac{\Gamma(a+1)}{|s|}.$$

A l'aide de cette inégalité, on peut obtenir la limite supérieure du module de l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varepsilon \frac{\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds$$

qui figure dans la seconde partie de l'égalité (2), il viendra

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varepsilon \frac{\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds\right| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma^2(a+1)}{(4\pi^2 x)^a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{a^2+t^2},$$

et l'on peut poser

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varepsilon \frac{\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds = \frac{\mathfrak{S}}{2a}\,\frac{\Gamma^2(a+1)}{(4\pi^2 x)^a} \qquad \text{où} \qquad -1 < \mathfrak{S} < 1.$$

En vertu du résultat obtenu, l'égalité (2) devient

$$\sum_{n=1}^{n=N} \tau(n)\,\xi(4\pi^2 n x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds + \frac{\mathfrak{S}}{2a}\,\frac{\Gamma^2(a+1)}{(4\pi^2 x)^a}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^a}.$$

En faisant $N = \infty$ dans cette égalité, on obtiendra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\,\xi(4\pi^2 n x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds,$$

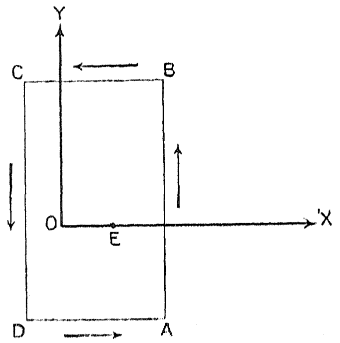
et, à cause de la formule (1) du n° 16, on aura

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds. \tag{3}$$

Cette formule subsiste à condition que $x > 0$ et $a > 1$.

18. Considérons maintenant le contour fermé ABCDA (*fig.* 2) composé de quatre droites AB, BC, CD et DA qui sont déterminées de

Fig. 2.



la manière suivante :

$$(4)\qquad \begin{cases} (\mathrm{AB}) & s = a + ti, & -\mathrm{T}_0 < t < \mathrm{T}_1, \\ (\mathrm{BC}) & s = u + \mathrm{T}_1 i, & -\alpha < u < a, \\ (\mathrm{CD}) & s = -\alpha + ti, & -\mathrm{T}_0 < t < \mathrm{T}_1, \\ (\mathrm{DA}) & s = u - \mathrm{T}_0 i, & -\alpha < u < a. \end{cases}$$

A supposer que les nombres positifs T_0 et T_1 soient aussi grands que l'on voudra, et que les paramètres a et α satisfassent aux conditions

$$a > 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < 1.$$

L'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma^2(s)\,\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds,$$

prise le long du contour fermé ABCDA, aura, en vertu du théorème de Cauchy, la valeur

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{ABCDA})} \frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds \\ &\quad = \left[\mathrm{D}_s \frac{s^2\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\right]_{s=0} + \left[\mathrm{D}_s \frac{(s-1)^2\zeta^2(s)\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\right]_{s=1}, \end{aligned}$$

puisque la fonction

$$\frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{}$$

a deux pôles du second ordre à l'intérieur du contour ABCDA qui correspondent aux valeurs de la variable s,

(O) $$s = 0$$

et

(E) $$s = 1.$$

En observant que la fonction $s\Gamma(s)$ est développable par la série de Taylor aux environs du point O ($s = 0$) et que la fonction $(s-1)\zeta(s)$ est développable par la série de Taylor aux environs du point E ($s = 1$), on obtient

$$s\Gamma(s) = 1 - Cs + \ldots \qquad \text{et} \qquad (s-1)\zeta(s) = 1 + C(s-1) + \ldots,$$

C étant la constante d'Euler; il en résulte

$$\left[D_s \frac{s^2\,\Gamma^2(s)\,\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\right]_{s=0} = -2C\zeta^2(0) + 2\zeta(0)\zeta'(0) - \zeta^2(0)\log 4\pi^2 x,$$

$$\left[D_s \frac{(s-1)^2\zeta^2(s)\,\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\right]_{s=1} = 2C\frac{\Gamma^2(1)}{4\pi^2 x} + 2\frac{\Gamma(1)\Gamma'(1)}{4\pi^2 x} - \frac{\Gamma^2(1)}{4\pi^2 x}\log 4\pi^2 x.$$

Puisque

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2}, \qquad \zeta'(0) = -\tfrac{1}{2}\log 2\pi \qquad \text{et} \qquad \Gamma'(1) = -C,$$

il vient

$$\left[D_s \frac{s^2\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\right]_{s=0} + \left[D_s \frac{(s-1)^2\zeta^2(s)\Gamma^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\right]_{s=1} = -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x},$$

et l'égalité (5) prend la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(ABCDA)} \frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds = -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}.$$

En partageant le chemin de l'intégration ABCDA en quatre parties AB, BC, CD et DA, on obtient l'égalité

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{(AB)} f(s)\,ds + \int_{(BC)} f(s)\,ds + \int_{(CD)} f(s)\,ds + \int_{(DA)} f(s)\,ds\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$f(s) = \frac{\Gamma^2(s)\,\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}. \tag{7}$$

Considérons deux intégrales définies

$$\int_{(BC)} f(s)\,ds \quad \text{et} \quad \int_{(DA)} f(s)\,ds.$$

En vertu des équations (4), on peut présenter ces intégrales sous la forme suivante :

$$\int_{(BC)} f(s)\,ds = -\int_{-\alpha}^{a} f(u + T_1 i)\,du \quad \text{et} \quad \int_{(DA)} f(s)\,ds = \int_{-\alpha}^{a} f(u - T_0 i)\,du. \tag{8}$$

Cherchons la limite à laquelle tendent ces intégrales définies à mesure que les nombres T_0 et T_1 croissent infiniment. Dans ce but, considérons l'intégrale définie

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\,du$$

qui représente la fonction $\Gamma(s)\zeta(s)$ à condition que la partie réelle de s soit plus grande que 1.

En observant que dans ce cas

$$\frac{1}{s-1} = \int_0^1 u^{s-2}\,du \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{s} = \int_0^1 u^{s-1}\,du,$$

on peut prêter à l'égalité précédente la forme suivante :

$$\Gamma(s)\zeta(s) - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2s} = \int_0^1 u^{s-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)du + \int_1^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\,du.$$

Les deux parties de l'égalité obtenue ont un sens à condition que la partie réelle de s soit plus grande que -1; on en conclut que la formule

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \int_0^1 u^{s-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)du + \int_1^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\,du$$

définit la fonction $\Gamma(s)\zeta(s)$ à condition que

$$R(s) > -1 \quad \text{et} \quad s \neq 0, \quad s \neq 1.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$(9) \quad \Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{s}\left[\int_0^1 u^s\, d\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right) + \int_1^\infty u^s\, d\,\frac{1}{e^u-1}\right].$$

Cela posé, supposons que la partie réelle de s soit comprise entre les limites

$$-\alpha \leqq R(s) \leqq a, \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad a > 1;$$

on aura les inégalités

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_0^1 u^s\, d\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\right| < \int_0^1 u^{-\alpha} d\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right), \\ &\left|\int_1^\infty u^s\, d\,\frac{1}{e^u-1}\right| \quad < -\int_1^\infty u^a\, d\,\frac{1}{e^u-1}. \end{aligned}\right.$$

En désignant, pour abréger,

$$\int_0^1 u^{-\alpha}\, d\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right) - \int_1^\infty u^a\, d\,\frac{1}{e^u-1} = A,$$

on peut poser, à cause de (9) et (10),

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \vartheta\,\frac{A}{s} \quad \text{où} \quad |\vartheta| < 1.$$

En vertu de l'égalité (7), on aura

$$f(s) = \frac{1}{(4\pi^2 x)^s}\left[\frac{1}{s(s-1)} + \vartheta\,\frac{A}{s}\right]^2.$$

On en conclut que les intégrales (8) tendent vers la limite 0 à mesure que les nombres T_0 et T_1 croissent infiniment.

En faisant $T_0 = \infty$ et $T_1 = \infty$ dans l'égalité (6), on obtient, à cause de (4) et (7),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-\infty i}^{-\alpha+\infty i}\frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds = -\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}C-\frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x},$$

et, en vertu de (3), il vient

$$(11)\quad g(x) = -\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}C-\frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-\infty i}^{-\alpha+\infty i}\frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds.$$

Effectuons dans l'intégrale obtenue le changement de la variable s à l'aide de la substitution

$$s = 1-\sigma;$$

on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-\infty i}^{-\alpha+\infty i}\frac{\Gamma^2(s)\zeta^2(s)}{(4\pi^2 x)^s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\alpha-\infty i}^{1+\alpha+\infty i}\frac{\Gamma^2(1-\sigma)\zeta^2(1-\sigma)}{(4\pi^2 x)^{1-\sigma}}\,d\sigma.$$

A l'aide de la formule de Riemann [1]

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\zeta(s),$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\alpha-\infty i}^{1+\alpha+\infty i}\frac{\Gamma^2(1-\sigma)\zeta^2(1-\sigma)}{(4\pi^2 x)^{1-\sigma}}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\alpha-\infty i}^{1+\alpha+\infty i}\frac{x^{\sigma-1}\zeta^2(\sigma)}{4\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}\,d\sigma,$$

et la formule (11) devient

$$(12)\quad g(x) = -\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}C-\frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{\sigma-1}\zeta^2(\sigma)}{4\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}\,d\sigma$$

où l'on a posé

$$a = \alpha+1.$$

---

(1) RIEMANN, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Riemann's Werke*, p. 137).

La formule obtenue subsiste, quelle que soit la valeur positive de la variable x, à condition que le paramètre a vérifie les inégalités

$$1 < a < 2.$$

Sur l'intégrale définie $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^{s-1}}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,ds.$

19. Considérons deux intégrales définies, bien connues,

$$\pi\cot\pi s = \int_0^1 \frac{t^{s-1}-t^{-s}}{1-t}\,dt \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{\sin\pi s} = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt.$$

Ces formules subsistent à condition que la partie réelle de s soit comprise entre les limites 0 et 1 ; en les différentiant par rapport à la variable s, on obtient

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi s} = \int_0^1 \frac{t^{s-1}\log t + t^{-s}\log t}{1-t}\,dt \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi^2\cos\pi s}{\sin^2\pi s} = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}\log t}{1+t}\,dt.$$

La première intégrale définie peut être mise sous la forme suivante :

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi s} = \int_0^1 \frac{t^{s-1}\log t}{1-t}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{-s}\log t}{1-t}\,dt.$$

En effectuant le changement de la variable t dans la seconde intégrale définie qui figure dans cette égalité, à l'aide de la substitution

$$t = \frac{1}{u},$$

on aura

$$\int_0^1 \frac{t^{-s}\log t}{1-t}\,dt = \int_1^{\infty} \frac{u^{s-1}\log u}{1-u}\,du,$$

et l'égalité précédente devient

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi s} = \int_0^1 \frac{t^{s-1}\log t}{1-t}\,dt + \int^{\infty} \frac{u^{s-1}\log u}{1-u}\,du,$$

d'où il résulte

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi s}=\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\log t}{1-t}\,dt.$$

En faisant la somme des égalités obtenues

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi s}=\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\log t}{1-t}\,dt \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi^2\cos\pi s}{\sin^2\pi s}=\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\log t}{1+t}\,dt,$$

on obtient

$$-\pi^2\,\frac{1+\cos\pi s}{\sin^2\pi s}=\int_0^\infty t^{s-1}\log t\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt.$$

On peut prêter à cette égalité la forme suivante :

$$\frac{\pi^2}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}}=\int_0^\infty t^{s-1}\log\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt. \tag{1}$$

Nous avons obtenu cette formule en supposant que la partie réelle de la variable s soit comprise entre les limites 0 et 1. En observant que les deux parties de la formule obtenue ont un sens à condition que

$$0<R(s)<2,$$

on en conclut que la formule (1) est encore vraie quand la partie réelle de s est comprise entre les limites 0 et 2.

20. On peut effectuer l'inversion de l'intégrale (1) à l'aide du procédé qui a été exposé au n° 15.

Désignons, pour abréger,

$$\log\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)=\varphi(t); \tag{2}$$

il viendra, à cause de (1),

$$\frac{\pi^2}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}}=\int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)\,dt.$$

En intégrant par parties, on obtient, à cause de (2),

$$\frac{\pi^2}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}} = -\int_0^\infty \frac{t^s}{s}\varphi'(t)\,dt,$$

puisque, d'après l'hypothèse, $0 < R(s) < 2$.

Désignons

$$t\varphi'(t) = \psi(t) \tag{3}$$

et intégrons de nouveau par parties, il viendra

$$\frac{\pi^2}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}} = \int_0^\infty \frac{t^s}{s^2}\psi'(t)\,dt.$$

Cela posé, multiplions les deux parties de l'égalité obtenue par $\frac{x^s}{2\pi i}ds$ en supposant que le nombre x soit positif et intégrons les fonctions obtenues, par rapport à la variable complexe s, dans le domaine défini par les conditions

$$s = a + ti \quad \text{et} \quad -\infty < t < \infty,$$

la valeur du paramètre a étant choisie de manière que l'on ait

$$0 < a < 2;$$

on obtient le résultat suivant :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\pi^2 x^s}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s\frac{ds}{s^2}\int_0^\infty t^s\psi'(t)\,dt.$$

Dans l'intégrale double obtenue il est permis d'intervertir les intégrations, et l'on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\pi^2 x^s}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}}ds = \int_0^\infty \psi'(t)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{2\pi i}(tx)^s\frac{ds}{s^2}.$$

Puisque

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}(tx)^s\frac{ds}{s^2}=\log tx,$$

à condition que $tx \geqq 1$, et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}(tx)^s\frac{ds}{s^2}=0,$$

à condition que $0 < tx \leqq 1$, il viendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi^2 x^s}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}}ds=\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\log tx\,\psi'(t)\,dt.$$

En intégrant par parties, on obtiendra, à cause de (2) et (3),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi^2 x^s}{2\sin^2\frac{\pi s}{2}}ds=\log x\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\right),$$

d'où il résulte

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s-1}}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}ds=\frac{\log x}{2\pi^2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right). \tag{4}$$

La formule obtenue subsiste, quelle que soit la valeur positive de x, à condition que le paramètre a vérifie les inégalités $0 < a < 2$.

Développement de la fonction $g(x)$ en une série infinie.

21. Revenons à la formule (12)

$$g(x)=-\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}C-\frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s-1}\zeta^2(s)}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}ds$$

où $x > 0$ et $1 < a < 2$, obtenue au n° 18. L'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^{s-1}\zeta^2(s)}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,ds$$

qui figure dans cette formule peut être développée en une série infinie.

Dans ce but, remplaçons dans la formule (4) du n° 20 x par $\frac{x}{n}$ et multiplions les deux parties de l'égalité obtenue par $\frac{\tau(n)}{n}$; il viendra

$$\frac{1}{2\pi^2}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s-1}}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,\frac{\tau(n)}{n^s}\,ds.$$

En attribuant à la variable entière positive n les valeurs satisfaisant aux conditions

$$0 < n \leqq \mathrm{N},$$

faisons la somme des égalités obtenues, on aura

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{n\leqq \mathrm{N}}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s-1}}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\sum_{n=1}^{n\leqq \mathrm{N}}\frac{\tau(n)}{n^s}\,ds.$$

En supposant que le paramètre a satisfasse aux conditions $1 < a < 2$, on peut poser

$$\sum_{n=1}^{n\leqq \mathrm{N}}\frac{\tau(n)}{n^s}=\zeta^2(s)+\varepsilon\sum_{n>\mathrm{N}}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^a} \qquad \text{où} \qquad |\varepsilon| < 1,$$

et l'égalité précédente devient

$$(1)\quad \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{n\leqq \mathrm{N}}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s-1}\zeta^2(s)}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varepsilon\,\frac{x^{s-1}}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,ds\sum_{n>\mathrm{N}}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^a}.$$

En observant que le module de la fonction $\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}$, où $s = a + ti$, est défini par la formule

$$\left|\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\right| = \frac{1}{e^{\pi t} + e^{-\pi t} - 2\cos\pi a},$$

on aura l'inégalité

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varepsilon\,\frac{x^{s-1}}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,ds\right| < \frac{x^{a-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t} - 2\cos\pi a};$$

donc, on peut prêter à l'égalité (1) la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s-1}\zeta^2(s)}{4\sin^2\frac{\pi s}{2}}\,ds - \vartheta\,\frac{x^{a-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}-2\cos\pi a}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^a}\end{aligned}$$

où $-1 < \vartheta < 1$.

En vertu de la formule (12) du n° 18, on obtient

$$g(x) = -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right) + R(x, N) \tag{2}$$

où

$$R(x, N) = \vartheta\,\frac{x^{a-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}-2\cos\pi a}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^a}\quad(-1<\vartheta<1 \text{ et } 1<a<2).$$

En faisant $N = \infty$, on aura

$$\lim_{N=\infty} R(x, N) = 0,$$

et la formule (2) devient

$$g(x) = -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right).$$

La formule obtenue est déduite à l'aide de la supposition que la variable x est positive. En étudiant la somme de la série infinie

$$(4)\qquad -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C + \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right),$$

on démontrera sans peine que cette série est convergente, quelle que soit la valeur de la variable complexe x, les valeurs négatives de x et la valeur $x=0$ étant exclues.

En choisissant pour $\log x$ la détermination

$$(5)\qquad \log x = \log|x| + \omega i \qquad \text{où} \qquad -\pi < \omega < \pi,$$

on aura le prolongement analytique uniforme de la fonction représentée par la somme infinie (4).

Puisque les deux parties de la formule (3) ont un sens dans le même domaine de la variable x et représentent deux fonctions holomorphes, on en conclut que cette formule subsiste, à condition (5), quelle que soit la valeur de x, les valeurs négatives de x et la valeur $x=0$ étant exclues.

Étude des valeurs de la fonction $g(x)$.

22. Nous avons défini au n° 16 la fonction $g(x)$ par la formule

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,\xi(4\pi^2 n x).$$

En désignant

$$x = re^{\omega i},$$

on obtiendra, en vertu de la formule (2) du n° 16, l'inégalité

$$(1)\qquad |g(x)| < \sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\cos\frac{\omega}{2}\sqrt{nr}}}{(4\pi^2 nr)^{\frac{1}{4}}}.$$

La somme infinie qui figure dans la seconde partie de cette inégalité tend vers la limite 0 à mesure que le produit $r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\omega}{2}$, c'est-à-dire la partie réelle de $\sqrt{x}$, croît infiniment; il en résulte

$$\lim g(x) = 0 \qquad \text{à condition que} \qquad \lim \mathrm{R}(\sqrt{x}) = +\infty.$$

A l'aide de l'inégalité (1), on démontrera sans peine le théorème suivant :

Théorème I. — *Le produit $x^s g(x)$ tend vers la limite* 0 *quand la partie réelle de $\sqrt{x}$ croît infiniment, quelle que soit la valeur de s.*

Supposons que la partie réelle de $\sqrt{x}$ satisfasse à la condition

$$r^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\omega}{2} \geqq \sqrt{p},$$

le nombre positif p étant pris arbitrairement.

En vertu de l'inégalité (1), il viendra

$$|g(x)| < \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{np}}}{(4\pi^2 np)^{\frac{1}{4}}}.$$

Le théorème suivant est donc démontré :

Théorème II. — *Le module de la fonction $g(x)$ ne surpasse pas une limite fixe dans le domaine de la variable x défini par l'inégalité*

$$\mathrm{R}(\sqrt{x}) \geqq \sqrt{p},$$

p étant un nombre positif, pris arbitrairement. Dans chaque point à l'infini de ce domaine la fonction $g(x)$ s'annule.

Considérons, en second lieu, le cas $|x| < 1$. Nous avons vu au n° 21 que la fonction $g(x)$ est développable par la série infinie suivante :

$$(2) \qquad g(x) = -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}\mathrm{C} - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \log\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right).$$

A l'aide des formules

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_s \zeta^2(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \log n,$$

on obtient, dans le cas $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) = -\sum_{\lambda=1}^{\infty} 2x^{2\lambda-1}\zeta^2(2\lambda)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\log n\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} 4x^{2\lambda-1}\zeta(2\lambda)\zeta'(2\lambda),$$

d'où il résulte, à cause de (2),

$$g(x) = -\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}C - \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\lambda=1}^{\infty} x^{2\lambda-1}[2\zeta^2(2\lambda)\log x + 4\zeta(2\lambda)\zeta'(2\lambda)]$$
$$(|x| < 1).$$

La formule obtenue fait voir la propriété suivante de la fonction $g(x)$:

Théorème III. — *La fonction* $g(x) + \frac{1}{4}\log x + \frac{\log 4\pi^2 x}{4\pi^2 x}$ *tend vers la limite* $-\frac{1}{2}C$ *à mesure que le module de la variable* x *décroît infiniment.*

23. Considérons, enfin, le cas

$$R(\sqrt{x}) < \sqrt{p}.$$

En supposant que la partie réelle de x soit positive ou nulle, on aura $r < 2p$; donc, en faisant $p < \frac{1}{2}$, on reviendra au cas précédent où $|x| < 1$. Pour cette cause, considérons la fonction $g(-x)$ en supposant que la partie réelle de x soit positive.

En observant que dans ce cas

$$\log(-x) = \log x \mp \pi i,$$

où le signe $\pm$ est celui de la partie imaginaire de x, on obtient, en vertu de la formule (2),

$$g(-x) = -\frac{1}{4}(\log x \mp \pi i) - \frac{1}{2}C$$
$$+ \frac{\log 4\pi^2 x \mp \pi i}{4\pi^2 x} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\log\frac{x}{n} \mp \pi i\right)\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right),$$

et il en résulte

$$(3)\qquad g(-x) = -g(x) - \frac{1}{2}\log x - C$$
$$\pm \pi i \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi^2 x} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \right].$$

La somme infinie qui figure dans la seconde partie de l'égalité obtenue peut être étudiée à l'aide du lemme suivant :

Lemme. — *Si petit que soit un nombre positif ρ, pris arbitrairement, on peut toujours déterminer une constante* A *de manière que l'inégalité*

$$\tau(n) < A n^{\rho}$$

ait lieu, quelle que soit la valeur entière positive de n.

La démonstration de ce lemme n'offre pas de difficultés.

Prenons maintenant un nombre positif ρ, aussi petit que l'on voudra, et désignons par ρ_0 un nombre quelconque satisfaisant aux conditions

$$0 < \rho_0 < \rho.$$

Supposons que la constante A_0 soit déterminée de manière que l'inégalité

$$(4)\qquad \tau(n) < A_0 n^{\rho_0}$$

ait lieu, quelle que soit la valeur entière positive de n.

En désignant

$$x = a + bi \qquad \text{où} \qquad a > 0,$$

on obtiendra

$$\left| \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right| < \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{|a^2 - n^2|},$$

et, à cause de (4), il vient

$$\tau(n) \left| \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right| < 2 A_0 \sqrt{a^2+b^2} \, \frac{n^{\rho_0}}{|a^2 - n^2|}.$$

A l'aide de cette inégalité, on trouve

$$\left|\sum_{n>0}^{n\leqq a-1} \tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)\right| < 2\mathrm{A}_0\sqrt{a^2+b^2}\sum_{n>0}^{n\leqq a-1}\frac{n^{\rho_0}}{a^2-n^2},$$

$$\left|\sum_{n>a+1}^{\infty} \tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)\right| < 2\mathrm{A}_0\sqrt{a^2+b^2}\sum_{n>a+1}^{\infty}\frac{n^{\rho_0}}{n^2-a^2}.$$

En observant que

$$\sum_{n>0}^{n\leqq a-1}\frac{n^{\rho_0}}{a^2-n^2} < \frac{1}{a^{1-\rho}}\sum_{n>0}^{n\leqq a-1}\frac{1}{(a-n)n^{\rho-\rho_0}} < \frac{2}{a^{1-\rho}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\rho-\rho_0}},$$

$$\sum_{n>a+1}^{\infty}\frac{n^{\rho_0}}{n^2-a^2} < \frac{1}{a^{1-\rho}}\sum_{n>a+1}^{\infty}\frac{1}{(n-a)\,n^{\rho-\rho_0}} < \frac{1}{a^{1-\rho}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\rho-\rho_0}},$$

et en posant

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\rho-\rho_0}} = \zeta(1+\rho-\rho_0),$$

on obtient

$$(5)\qquad \left|\sum_{n>0}^{n\leqq a-1}\tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)+\sum_{n>a+1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)\right| < 6\mathrm{A}_0\zeta(1+\rho-\rho_0)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^{1-\rho}}.$$

D'autre part, on a

$$(6)\qquad \sum_{n>a-1}^{n\leqq a+1}\tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right) = \tau(\mathrm{E}a)\left(\frac{1}{a-\mathrm{E}a+bi}+\frac{1}{a+\mathrm{E}a+bi}\right)$$
$$+\,\tau(\mathrm{E}a+1)\left(\frac{1}{a-\mathrm{E}a-1+bi}+\frac{1}{a+\mathrm{E}a+1+bi}\right)$$

et, à l'aide du lemme précédent, on obtiendra

$$(7)\qquad \left|\sum_{n>a-1}^{n\leqq a+1}\tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)\right| < \mathrm{A}_1\frac{a^{\rho}}{(a-\mathrm{E}a)(\mathrm{E}a+1-a)}$$

où A_1 ne surpasse pas une limite fixe, quelle que soit la valeur positive de a.

En vertu des inégalités (5) et (7), on obtient

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)\right| < A a^{\rho}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}+\frac{1}{(a-Ea)(Ea+1-a)}\right]$$

où A désigne une constante fixe et, à cause de (3), on peut poser

$$(8)\qquad \begin{aligned} g(-x) = {} & -g(x)-\frac{1}{2}\log x - C \pm \frac{\pi i}{4} \mp \frac{i}{4\pi x} \\ & + \Im a^{\rho}\frac{A}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}+\frac{1}{(a-Ea)(Ea+1-a)}\right] \end{aligned}$$

où $|\Im| < 1$.

Cela posé, supposons que le nombre a satisfasse aux conditions

$$(9)\qquad \alpha < a - Ea < \beta,$$

α et β étant deux fractions positives données.

Prenons un nombre positif p vérifiant les inégalités

$$(10)\qquad 0 < p < \alpha$$

et examinons les valeurs de la fonction $g(-x)$ dans le domaine de la variable x défini par l'inégalité

$$(11)\qquad R(\sqrt{-x}) < \sqrt{p}$$

et les conditions (9).

En vertu des inégalités (9), (10) et (11), on aura

$$R(\sqrt{x}) > \sqrt{p};$$

il en résulte que la fonction $g(x)$, en vertu du théorème II, sera finie dans le domaine considéré de la variable x.

En observant que

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} < 1+\frac{2p}{a} < 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(a-Ea)(Ea+1-a)} < \frac{1}{\alpha(1-\beta)},$$

à cause de (9), (10) et (11), on obtient, à l'aide de la formule (8), l'inégalité

$$|g(-x)| < P a^{\rho},$$

et, à plus forte raison,

$$|g(-x)| < P |x|^{\rho};$$

dans cette inégalité P désigne une constante fixe.

Le théorème suivant est donc démontré :

THÉORÈME IV. — *Quelque petit que soit un nombre positif ρ, pris arbitrairement, on peut toujours déterminer une constante P de manière que l'inégalité*

$$|g(-x)| < P |x|^{\rho}$$

ait lieu à la seule condition que la partie réelle de x vérifie les inégalités

$$\alpha < R(x) - ER(x) < \beta,$$

les fractions positives α et β étant prises arbitrairement.

(*A suivre.*)