Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Hadamard

Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (premier mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 535-556

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__535_0>

RECHERCHES

SUR LES

SOLUTIONS FONDAMENTALES

ET L'INTÉGRATION DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

(PREMIER MÉMOIRE.)

PAR M. HADAMARD.

L'existence, pour les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, de solutions présentant en un point arbitraire une singularité de nature déterminée, solutions qu'on peut appeler *fondamentales*, a été découverte par M. Picard dans des travaux bien connus (1) et démontrée d'une manière explicite en ce qui concerne les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x, y)\, u = 0.$$

Le cas général (les coefficients étant toutefois supposés analytiques) a été traité en même temps par MM. Hilbert (2) et Hedrick (3)

(1) *Comptes rendus*, 6 avril 1891 et 5 juin 1900.

(2) Cours professé à Göttingue en 1901.

(3) *Ueber den analytischen Character der Lösungen von Differentialgleichungen*; Diss., Göttingue, 1901.

et par nous-même (¹), la méthode employée étant d'ailleurs la transposition au cas elliptique de celle que nous avions appliquée au cas hyperbolique dans une communication au Congrès de 1900.

Les premières recherches de cette nature qui aient été faites pour un nombre de variables supérieur à deux sont dues à M. Fredholm (²). Elles sont spéciales aux équations à coefficients constants, dans lesquelles il n'intervient que des dérivées toutes du même ordre. Mais cet ordre peut être quelconque.

Il sera intéressant d'étendre au cas général, où les coefficients sont variables, les résultats de forme si remarquable obtenus par M. Fredholm (³). Nous nous bornerons ici, comme dans une Note (⁴) précédemment présentée à l'Académie des Sciences et dont le présent travail constitue le développement, au cas le plus simple, celui d'une équation du second ordre.

Celui-ci (où les solutions de M. Fredholm se réduisent au potentiel ordinaire) a fait, peu de temps avant la Note dont je viens de parler, l'objet d'un travail de M. Holmgren (⁵), lequel a obtenu les solutions de la forme $u = \frac{U}{r}$ pour les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + lu = 0.$$

(¹) Cours professé au Collège de France, 1901. — *Notice scientifique*, 1901.

(²) *Sur les équations de l'équilibre d'un corps élastique* (*Acta math.*, t. XXIII).

(³) Les remarques intéressantes que M. Le Roux a présentées (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 28 décembre 1903) à propos de la solution que nous allons exposer, présentent avec les recherches de M. Fredholm un rapport évident. Elles introduisent, en effet, une intégrale complète de l'équation des caractéristiques; une telle intégrale intervient dans la méthode de M. Fredholm, c'est l'ensemble des plans qui vérifient l'équation en question. On intègre, dans l'un et l'autre cas, en faisant varier les constantes de manière que la caractéristique correspondante passe par le point considéré. Il resterait à déterminer, dans le cas général, les fonctions arbitraires de manière à vérifier les conditions du problème, ce qui semble malheureusement beaucoup plus difficile que dans le cas traité par M. Fredholm. L'intervention des intégrales abéliennes rencontrées par M. Le Roux s'explique d'elle-même, grâce à cette analogie.

(⁴) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 14 décembre 1903.

(⁵) *Ueber die Existenz der Grundlösung bei einer linearen partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung vom elliptischen Typus* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. I, 1903).

On a ainsi une généralisation étendue du potentiel newtonien.

Rappelons toutefois que l'équation ainsi traitée par M. Holmgren ne représente pas la forme générale d'une équation linéaire du second ordre. Une telle équation étant donnée, il n'existe en général aucun choix de variables qui permette d'y rendre constants les coefficients des dérivées secondes (¹).

La méthode que je vais exposer permet de combler cette lacune et de déterminer la solution fondamentale pour une équation quelconque. Toutefois, comme elle est au fond la généralisation de celle à laquelle j'ai fait allusion pour le cas de deux variables, nous serons obligés de supposer les coefficients analytiques.

Si l'on tient compte des valeurs imaginaires des variables, les potentiels et les intégrales analogues de M. Holmgren sont infinis non seulement en un point réel, mais sur tout le cône isotrope qui a pour sommet ce point.

La surface qui, dans le cas général, remplace ce cône isotrope est aisée à indiquer immédiatement : c'est le conoïde caractéristique (²) qui a pour sommet le point considéré. Si $\Gamma = 0$ est l'équation de cette surface, la solution est infinie comme une puissance (non entière positive) de Γ.

Ce sont des singularités de cette espèce que nous devons d'abord étudier.

I. — Les intégrales à singularité algébroïde. Cas d'une caractéristique régulière.

1. Soit, dans l'espace à n dimensions,

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$

une multiplicité que nous supposerons d'abord régulière.

(¹) La condition de possibilité de cette réduction étant que l'élément linéaire (14) (*voir* plus loin, p. 544) admette une représentation conforme sur le ds^2 euclidien, cette condition est donnée par les recherches de M. Cotton (*Thèse*, Chap. II, nᵒˢ 15-17).

(²) *Voir* nos *Leçons sur la propagation des ondes*, Ch. VII. Le conoïde caractéristique est la *surface à point singulier* de M. Darboux (*Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles*) et de M. Coulon (*Thèse*, Paris, Hermann, 1902, p. 21).

Cherchons une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + lu = 0 \tag{2}$$

ayant, au voisinage de cette multiplicité, la forme

$$u = \mathrm{U}\mathrm{H}^p, \tag{3}$$

où U est une fonction régulière et p un exposant constant.

Nous nous bornerons, d'ailleurs, au cas où toutes les données sont analytiques, ainsi que la fonction cherchée U.

Il n'y a évidemment pas lieu de considérer la valeur $p = 0$.

Pour p entier positif, nous retombons sur le problème classique de Cauchy. Mais il n'est pas sans intérêt, pour notre objet, de rappeler la forme des résultats obtenus.

Pour $p = 1$, le problème est manifestement indéterminé, puisque la relation (3) impose simplement à u la condition de s'annuler sur la multiplicité (1); on peut choisir arbitrairement les valeurs, sur cette multiplicité, de l'une des dérivées de u.

Mais, pour $p \geqq 2$, u est assujetti à la condition de s'annuler pour $\mathrm{H} = 0$, en même temps que ses dérivées jusqu'à l'ordre $p - 1$; on n'obtient alors, en général, d'autre solution que $u = 0$. La condition de possibilité est *que la multiplicité* (1) *soit caractéristique.*

S'il en est ainsi, le problème redevient indéterminé. Les travaux de Beudon montrent que *l'on peut se donner arbitrairement les valeurs de u sur une seconde multiplicité sécante à la première* (pourvu que l'intersection ne soit pas tangente à une bicaractéristique et que les données n'impliquent pas contradiction sur cette intersection); qu'ainsi, d'ailleurs, la solution sera complètement déterminée.

Passons au cas de p non entier positif. $\mathrm{H} = 0$ est alors, pour notre solution, une multiplicité singulière; la méthode employée (généralisation naturelle de la marche suivie pour le cas de deux variables) sera la même que dans nos *Leçons sur la propagation des ondes* (1).

D'après les conclusions obtenues en cet endroit, $\mathrm{H} = 0$ devra en-

(1) Paris, Hermann, 1903; p. 332 et suiv.

core être une caractéristique; autrement dit, si l'on pose

$$\pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

(4)
$$H = \sum_{i,k} a_{ik}\pi_i\pi_k,$$

on devra avoir

(5)
$$H = H_1 \Pi,$$

H_1 étant holomorphe.

Dans ces conditions, l'expression

(6)
$$\Pi U F''(\Pi) + \left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i} + MU\right)F'(\Pi) + \mathcal{F}(U)\,F(\Pi)$$
$$[M = \mathcal{F}(\Pi) - l\Pi],$$

qui représente ([1]) le résultat de substitution, dans le premier membre de l'équation (2), de la quantité

$$u = U\,F(\Pi),$$

devient, pour $F = \Pi^p$,

(7)
$$\left\{\sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i} + [M + (p-1)H_1]U + \frac{\Pi}{p}\mathcal{F}(U)\right\} p\Pi^{p-1}.$$

Dans le cas actuel, $\Pi = 0$ étant une multiplicité régulière, nous pouvons supposer que les multiplicités $\Pi =$ const. sont toutes caractéristiques et, d'autre part, prendre Π pour variable x_n. En même temps, nous pouvons admettre que les bicaractéristiques ([2]) situées sur les surfaces $x_n =$ const. ont pour équations $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} =$ const. On aura alors

$$a_{in} = 0 \qquad (i \neq n-1).$$

Au contraire, $a_{n,n-1}$ sera différent de zéro (sans quoi notre caractéristique serait multiple, hypothèse que nous exclurons), et nous pour-

---

([1]) *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 332.

([2]) *Ibid.*, p. 269.

rons, par conséquent, le supposer égal à l'unité. Enfin, pour simplifier l'écriture, nous ferons disparaître le coefficient a_n par le changement de u en $ue^{\int a_n dx_{n-1}}$. Remplaçant les lettres x_n et x_{n-1} par x et y, notre équation s'écrira

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \mathcal{F}_1(u) = 0, \tag{8}$$

$\mathcal{F}_1$ étant un nouveau polynome différentiel où ne figure aucune différentiation par rapport à x.

Elle admettra la solution $u = \mathrm{U}x^p$ si l'on a

$$x\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\, \partial y} + p\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = x\mathcal{F}_1(\mathrm{U}). \tag{9}$$

2. Cette équation, analogue à l'équation différentielle bien connue

$$x\frac{dy}{dx} = ay + \ldots,$$

se traite, comme elle, en développant U suivant les puissances de x, soit

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 x + \ldots + \mathrm{U}_h x^h + \ldots; \tag{10}$$

ceci donne ([1])

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial y} = 0,\\ &(p+1)\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial y} = \mathcal{F}_1(\mathrm{U}_0) \quad + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &(p+h)\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial y} = \mathcal{F}_1(\mathrm{U}_{h-1}) + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Si p est un entier négatif il y a, en général, impossibilité ([2]) : cette

([1]) x figure, en général, explicitement dans les coefficients de $\mathcal{F}_1$: les termes provenant de cette circonstance sont ceux que nous avons remplacés par des points, dans les seconds membres des équations (11) (dans le premier terme, par contre, on fait $x = 0$).

([2]) Voir *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 339, n° 346.

impossibilité se reconnaît sur l'une des équations (11). Par exemple, pour $p = -1$, la seconde de ces équations cesse de contenir U_1 et donne

$$\mathcal{F}_1(U_0) = 0,$$

laquelle devra admettre une solution indépendante de y.

L'hypothèse de p entier négatif étant écartée, les équations (11) font connaître successivement les U_h. Chacune de ces fonctions n'est d'ailleurs déterminée qu'à un terme près indépendant de y. On peut donc se donner arbitrairement leurs valeurs pour $y = 0$, par exemple.

3. Pour établir la convergence du développement (10) ainsi obtenu, il suffit de remarquer que le rapport $\frac{p+h}{h}$, qui ne s'annule jamais dans l'hypothèse où nous nous plaçons et qui a pour limite 1 lorsque h augmente indéfiniment, est toujours supérieur en valeur absolue à un nombre positif fixe m. On majorera donc les fonctions U si l'on majore $\mathcal{F}_1$ en même temps que, dans l'équation qui fait connaître $\frac{\partial U_h}{\partial y}$, on remplace le coefficient $(p+h)$ par mh.

Or ceci revient [1] à faire, dans l'équation (9), $p = 0$ après avoir multiplié le second membre par $\frac{1}{m}$. On peut alors tout diviser par x et l'on est ramené au problème traité par Beudon et dont nous avons parlé plus haut. Comme, dans ce dernier problème, *on peut se donner arbitrairement les valeurs de* U *pour* $y = 0$ [c'est-à-dire *sur une multiplicité* $(n-1)^{uple}$ *quelconque sécante à la première et ne passant pas par une de ses bicaractéristiques*], il en est de même dans le problème proposé.

4. Nous aurions à plus forte raison majoré les U_h si, au lieu d'introduire le minimum m de $\frac{|p+h|}{h}$, nous avions introduit le mini-

---

(1) On doit toutefois observer que la condition $\frac{\partial U_0}{\partial y} = 0$ disparaîtrait pour $p = 0$ et avoir soin de la rétablir. Cette condition fait connaître, comme le veut la théorie de Beudon, l'ensemble des valeurs de U pour $x = 0$, une fois données celles qui correspondent à $y = 0$.

mum m_1 de $|p+h|$. Cette dernière quantité étant, dans chacune des équations (11), remplacée par m_1, l'équation (9) aurait été remplacée par la suivante :

$$m_1 \frac{\partial U}{\partial y} = x \mathcal{F}_1(U). \tag{12}$$

En opérant ainsi, nous ne serions pas parvenus au résultat que nous avions en vue, car il est aisé de voir que la série (10) ainsi formée est, en général, divergente, quel que soit x.

Seulement, le problème ainsi posé appartient à une catégorie sur laquelle il convient peut-être de s'arrêter un instant, car elle paraît offrir un grand intérêt au point de vue de l'Analyse et de la Physique mathématique.

L'équation (12) est une équation aux dérivées partielles aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, y$, où la quantité x ne figure que comme un paramètre. Supposons, par exemple, $n = 2$, pour simplifier : nous nous trouvons en présence d'une équation différentielle ordinaire dont les coefficients dépendent continûment du paramètre x.

On sait aujourd'hui établir, dans des cas très étendus, que les solutions d'une telle équation sont des fonctions continues et même analytiques de x. Mais les théorèmes ainsi obtenus ne sont pas applicables ici : *cela tient à ce que, pour $x = 0$, l'ordre de l'équation s'abaisse.*

Or cette circonstance paraît se rencontrer dans un grand nombre de questions importantes. L'une d'elles, en particulier, vient d'être étudiée par M. Duhem dans ses belles *Recherches sur l'Hydrodynamique.*

Les équations du mouvement des fluides parfaits, lorsqu'on les prend sous leur forme classique, sont du second ordre. Dans le cas des fluides compressibles, elles comportent l'existence d'ondes se propageant avec une vitesse déterminée, la vitesse du son.

Si l'on admet, au contraire, la présence d'un frottement intérieur, ou, plus exactement, d'une viscosité, les phénomènes changent d'allure. *Si petit que soit le coefficient k de la viscosité,* aucune propagation n'est plus possible. Il y a là un paradoxe que M. Duhem a réussi à lever en introduisant la notion des *quasi-ondes.*

Or cette difficulté tient précisément à ce que *les termes qui dépendent de k sont d'un ordre supérieur à ceux qui subsistent pour* $k = 0$, à savoir du troisième ordre. Son étude approfondie conduirait donc à un problème tout analogue à celui qui se présente pour l'équation (12); par conséquent aussi, suivant toute probabilité, à des séries divergentes.

L'étude de telles séries peut aujourd'hui être abordée, grâce aux méthodes de M. Borel. Il importe de remarquer que nous sommes ici dans les conditions où ces méthodes s'appliquent sous leur forme la plus simple. Une solution de l'équation (12) étant développée suivant les puissances de x, le coefficient de x^h augmente indéfiniment comme $h!$. La fonction associée est représentée par une série de Maclaurin convergente ([1]).

5. Revenons au problème primitivement posé, celui qui concerne l'équation (8), pour dire un mot du cas où les coefficients ne sont pas analytiques. Celui-ci n'offre, en réalité, d'autre difficulté que celles qui se présentent également (lorsque n est supérieur à 2) pour la recherche des intégrales régulières. Si n est égal à 2, la solution est à peu près immédiate, au moins pour $p > 0$ (nous reviendrons plus loin sur l'hypothèse $p < 0$). Supposons d'abord, pour simplifier, que $y = 0$ est aussi une caractéristique. Si, sur cette caractéristique, nous nous donnons une série de valeurs de u, valeurs qui, dans le voisinage de $x = 0$, seront de l'ordre de x^p; puis que, d'autre part, sur la caractéristique $x = 0$, nous prenions $u = 0$, cet ensemble de conditions détermine une solution de l'équation donnée : il suffit de reprendre les formules connues qui déterminent cette solution pour constater qu'elle est le produit de x^p par une fonction régulière.

Si, d'autre part, $y = 0$ était une ligne quelconque et non une caractéristique, on n'aurait qu'à substituer aux formules en question celles que j'ai indiquées dans mon Mémoire *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* ([2]).

([1]) Au reste cette équation, sur laquelle je compte revenir dans un travail ultérieur, se traite sans difficulté en substituant au développement de Maclaurin un mode d'approximation un peu différent.

([2]) *Bull. Soc. math. Fr.*, t. XXXI, 1903; n° 4.

II. — Cas du conoïde caractéristique. Formation de la solution fondamentale.

6. Nous sommes, par ce qui précède, assurés de l'existence d'une solution de la forme (3) lorsque $\Pi = 0$ est une multiplicité régulière. Mais cette hypothèse n'est point vérifiée dans le problème que nous allons avoir à traiter : la multiplicité dont nous devrons partir est le *conoïde caractéristique* ayant pour sommet un point quelconque $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de l'espace à n dimensions, c'est-à-dire une hypersurface ayant ce point comme point conique. La question doit donc être étudiée à nouveau et nous arriverons, en fait, à des conclusions sensiblement différentes des précédentes.

Commençons par écrire l'équation du conoïde caractéristique de sommet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Le premier membre de celle-ci se déduira d'un mode de calcul bien connu depuis les travaux de Lipschitz sur les formes différentielles [1].

Partons, en effet, des équations différentielles

$$\frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \pi_i}} = -\frac{d\pi_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_i}} = ds, \tag{13}$$

qui fournissent les bicaractéristiques, si les π_i sont choisis de manière à vérifier initialement (et, par conséquent aussi, pour toute valeur de s), la condition $H = 0$.

Si nous faisons abstraction de cette dernière condition et que nous prenions, pour les π_i, des valeurs initiales π_{0i} tout à fait quelconques, les lignes définies par les équations différentielles (13) conserveront une signification simple : ce seront des géodésiques, à savoir celles qui conviennent à l'élément différentiel

$$\frac{1}{\Delta}\mathcal{G}(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{14}$$

---

[1] *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 408, 409.

où Δ est le discriminant de H (supposé différent de zéro, comme nous le ferons dans ce qui va suivre) et

$$\mathfrak{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \mathfrak{H}_{ik} X_i X_k$$

la forme adjointe de H.

Ne considérons que celles de ces géodésiques qui sont issues du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, la variable s étant prise nulle en ce point.

Les équations (13) ne changeant pas par le changement simultané de s en λs et des π_i en $\frac{\pi_i}{\lambda}$ (quelle que soit la constante λ), leurs intégrales ne contiendront les $2n+1$ quantités π_i, π_{0i}, s que par les $2n$ combinaisons

$$C_i = s\pi_i, \qquad c_i = s\pi_{0i} \tag{15}$$

et auront la forme

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n; a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ C_i &= \varphi_i(c_1, c_2, \ldots, c_n; a_1, a_2, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Ces relations ne devront d'ailleurs pas changer lorsqu'on permute x_i et a_i en même temps que c_i et $-C_i$, comme on le voit en donnant au paramètre λ la valeur -1.

Les c_i ne sont, à une substitution linéaire à coefficients constants près, autres que les *variables normales* ξ_i de Lipschitz; on a

$$\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial H_0}{\partial c_i},$$

où H_0 est la forme H correspondant à $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$.

Les c_i (ou les ξ_i) sont d'ailleurs (moyennant la supposition $\Delta \neq 0$) des fonctions holomorphes des x, dans le voisinage du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Sur l'une quelconque des lignes (13), les variables normales ξ_i ou c_i sont proportionnelles à s.

Considérons maintenant la quantité

$$\Gamma = H(C_1, C_2, \ldots, C_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = H(c_1, c_2, \ldots, c_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{16}$$

C'est une forme quadratique à coefficients constants par rapport aux c_i et une fonction holomorphe des x; son développement suivant les puissances des $x_i - a_i$ commence par des termes du second degré, savoir

$$(17)\qquad \Gamma = \frac{1}{\Delta_0}\mathfrak{H}_0(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) + \ldots,$$

$\mathfrak{H}_0$ et Δ_0 étant la forme adjointe et le discriminant de H_0.

Γ n'est autre chose que *le carré de la distance géodésique du point* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *au point* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cette distance étant calculée à l'aide de l'élément linéaire (14).

Il résulte de là, en particulier, que la dérivée partielle de Γ par rapport à x_i n'est autre que $2C_i$ et que la fonction Γ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(18)\qquad H\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\middle| x_i\right) = 4\Gamma.$$

L'expression Γ est d'ailleurs symétrique par rapport aux deux points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dont elle dépend.

7. Cela posé, arrivons au problème que nous avons en vue et cherchons, pour l'équation donnée, une solution de la forme

$$(19)\qquad u = U\Gamma^p,$$

Γ étant la fonction que nous venons de former, dans laquelle le point a de coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sera considéré comme donné et le point $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ comme variable.

Remarquons que, pour tout point n suffisamment voisin de a, il passe une des lignes issues de a et définies par les équations différentielles (13). Sur ces lignes on a, d'après les relations (15),

$$(20)\qquad \frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial C_i}} = \frac{ds}{s}.$$

Écrivons, dans ces conditions, l'équation (7). H_1 est identiquement égal à 4, d'après l'équation (18). Quant à la quantité

$$M = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_k} + \sum \mathrm{a}_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i},$$

la formule (17) nous fait connaître sa valeur à l'origine; on a

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_k} = 2 \frac{\mathfrak{B}_{ik}}{\Delta} + \ldots,$$

et, par conséquent $\left(\text{les } C_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \text{ étant initialement nuls}\right)$,

$$M = \frac{2}{\Delta} \sum_{i,k} a_{ik} \mathfrak{B}_{ik} + \ldots = 2n + \ldots.$$

Nous avons donc

$$2 \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial C_i} + (2n + 4p - 4 + \ldots) U + \frac{\Gamma}{p} \mathcal{F}(U) = 0 \tag{21}$$

et, par conséquent, pour $\Gamma = 0$, en tenant compte de (20),

$$2s \frac{dU}{ds} + (n + 2p - 2 + \ldots) U = 2s \frac{dU}{ds} + \left(\frac{M}{2} + 2p - 2\right) U = 0. \tag{22}$$

Comme U doit être une fonction régulière de s, *cette équation n'est possible que si l'on a*

$$p = -\frac{n-2}{2} - p_1, \tag{23}$$

p_1 *étant un entier positif ou nul.* U est alors, pour s voisin de zéro, de l'ordre de s^{p_1}. Pour $p_1 = 0$ et, par conséquent,

$$p = -\frac{n-2}{2}, \tag{23'}$$

U aura, au point a, une valeur différente de *zéro*, que nous prendrons égale à *un*.

Cette solution est la seule que nous aurons besoin de considérer, les autres s'en déduisant aisément, comme nous le verrons plus loin.

8. Mais, d'après ce que nous avons vu précédemment, il est une série de valeurs de n pour lesquelles aucune des solutions précédentes n'existe (du moins en général) et pour lesquelles, par conséquent, *le problème est en général impossible :* ce sont les valeurs paires, le nombre p devenant alors un entier négatif. Cette impossibilité se retrouvera, bien entendu, dans le cours du calcul qui déterminera la solution.

9. Pour effectuer ce calcul, remarquons que l'équation (22) nous donne les valeurs de U sur notre conoïde. On a (puisque U est égal à 1 au sommet)

$$\text{(24)} \qquad U = e^{\int_0^s -\frac{1}{2s}\left(\frac{M}{2}+2p-2\right) ds}.$$

Déterminons une fonction U_0 qui soit égale, *dans tout l'espace,* à l'expression précédente; autrement dit, qui vérifie, dans tout l'espace, l'équation (22). U_0 sera une fonction holomorphe des x, comme on le voit immédiatement en prenant pour variables les c_i. On aura, évidemment,

$$U = U_0 + \Gamma V,$$

V étant une fonction régulière.

Remplaçant U par cette valeur dans l'équation (21), nous voyons que V satisfera à l'équation

$$\text{(25)} \qquad 2(p+1)\sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial C_i} + (p+1)(M+4p)V + \Gamma \mathcal{F}(V) + \mathcal{F}(U_0)$$
$$= (p+1)\left[4s\frac{dV}{ds} + (M+4p)V\right] + \mathcal{F}(U_0) + \Gamma\mathcal{F}(V) = 0.$$

Nous déterminerons une fonction U_1 par l'équation

$$\text{(25')} \qquad 4s\frac{dU_1}{ds} + (M+4p)U_1 + \frac{1}{p+1}\mathcal{F}(U_0) = 0,$$

supposée vérifiée dans tout l'espace. Cette équation admet une solution holomorphe et une seule; elle s'écrit, en effet [en tenant compte de ce que U_0 est une solution de (22)],

$$\frac{d}{ds}\frac{sU_1}{U_0} = -\frac{1}{4(p+1)U_0}\mathcal{F}(U_0)$$

et donne

$$U_1 = -\frac{U_0}{s}\int_0^s \frac{1}{4(p+1)}\frac{\mathcal{F}(U_0)}{U_0}\,ds.$$

U_1 est d'ailleurs, comme U_0, une fonction holomorphe des c_i et, par conséquent, des x.

La suite du calcul est maintenant évidente. On posera

$$U = U_0 + \Gamma U_1 + \ldots + \Gamma^h U_h + \ldots, \tag{26}$$

et le développement ainsi écrit donnera une solution du problème si les U_h sont donnés par les équations successives

$$4s\frac{dU_h}{ds} + [M + 4(p+h-1)]U_h + \frac{1}{(p+h)}\mathcal{F}(U_{h-1}) = 0 \tag{27}$$

ou

$$U_h = -\frac{U_0}{4(p+h)s^h}\int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0}\mathcal{F}(U_{h-1})\,ds. \tag{27'}$$

Si n est impair et, par suite, p non entier, tous les $p+h$ seront égaux à des entiers augmentés de $\frac{1}{2}$: par conséquent, toutes les expressions (27′) existeront. Ce seront, d'ailleurs, des fonctions holomorphes; si l'on suppose que l'on ait pris pour variables indépendantes les c_i (ou les variables normales de Lipschitz, ce qui revient au même) et que la quantité $\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_{h-1})$ ait pour développement

$$\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_{h-1}) = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \ldots,$$

où $P_0, P_1, \ldots$ sont des ensembles homogènes par rapport aux variables ainsi choisies et de degrés marqués par leurs indices, on aura

$$\frac{U_h}{U_0} = -\frac{1}{4h(p+h)}P_0 - \frac{1}{4(p+h)(h+1)}P_1 - \ldots - \frac{1}{4(p+h)(h+k)}P_k - \ldots$$

10. Reste à examiner la convergence du développement (26).

Continuons à prendre des variables indépendantes normales (celles de Lipschitz, ou bien les c_i) : soit σ la somme de ces variables. Chacun des coefficients de l'équation donnée sera majoré par une fonction de la forme

$$\frac{K}{1-\frac{\sigma}{R}}$$

(K et R étant des constantes), de sorte que si l'on a

$$U \ll \frac{A}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^m}$$

on aura

$$\mathcal{F}(U) \ll \frac{KA\,m(m+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{m+3}}.$$

Dans ces conditions, je dis que, en posant

$$U_h = U_0 v_h,$$

on aura

$$(28) \qquad v_h \ll \frac{A_h}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{(2\alpha+2)h}},$$

les A_h étant des constantes à déterminer.

Tout d'abord, nos hypothèses donnent immédiatement, pour $M+2p-2$ (puisque Γ est une forme quadratique à coefficients constants), la majorante

$$M+4p-4 = M-2n \ll 4\alpha\left(\frac{1}{1-\frac{\sigma}{R}}-1\right)$$

(α étant une constante); d'où, pour U_0 et $\frac{1}{U_0}$,

$$\left.\begin{matrix} U_0 \\ \frac{1}{U_0}\end{matrix}\right\} \ll \frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{\alpha}}.$$

Ceci permet d'étendre à l'expression $\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_0 v)$ la majoration obtenue tout à l'heure pour l'expression $\mathcal{F}$ elle-même : moyennant l'hypothèse

$$v \leqq \frac{A}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^m},$$

on aura

$$\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_0 v) \leqq \frac{K' A (m+\alpha)(m+\alpha+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{m+2\alpha+3}}.$$

Supposons, dans ces conditions, la condition (28) vérifiée pour une certaine valeur de h. On aura

$$\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_0 v_h) \leqq \frac{K' A_h[(2\alpha+2)h+\alpha](\alpha+1)(2h+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{(2\alpha+2)(h+1)+1}} \leqq \frac{K' A_h(\alpha+1)^2(2h+1)^2}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{(2\alpha+2)(h+1)+1}}$$

et, par conséquent [d'après (27')],

$$v_{h+1} \leqq \frac{K' A_h(\alpha+1)^2(2h+1)^2}{2(p+h)s^{h+1}} \int_0^s \frac{s^h\,ds}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^l} \qquad [l=(2\alpha+2)(h+1)+1].$$

La quantité $\frac{1}{s^{h+1}}\int_0^s \frac{s^h\,ds}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^l}$ peut s'écrire (σ étant proportionnel à s) :

$$\frac{1}{\sigma^{h+1}}\int_0^\sigma \frac{\sigma^h\,d\sigma}{\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^l},$$

et l'on voit aisément que (moyennant l'inégalité $l \geqq h+2$, qui est vérifiée ici) elle admet pour majorante

$$\frac{2}{(h+1)\left(1-\frac{\sigma}{R}\right)^{l-1}}.$$

Donc on a, finalement,

$$v_{h+1} \leqq \frac{A_{h+1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{R}\right)^{(2\alpha+2)(h+1)}},$$

où l'on a

$$A_{h+1} = A_h \frac{K'(\alpha+1)^2(2h+1)^2}{2(p+h)(h+1)}.$$

Le rapport $\frac{A_{h+1}}{A_h}$ tendant vers une limite finie pour $h = \infty$, la convergence du développement (26) est assurée ([1]).

On peut remarquer que le calcul précédent s'applique sans modification à la recherche de l'intégrale (holomorphe) V de l'équation donnée qui prend, sur le conoïde caractéristique, des valeurs données, pourvu que l'on connaisse une fonction holomorphe quelconque V_0 prenant, pour $\Gamma = 0$, les valeurs en question. Il suffira de poser

$$V = V_0 + V_1\Gamma + \ldots + V_h\Gamma^h + \ldots \tag{29}$$

et de déterminer les V_h (pour $h \geqq 1$) par des équations du type (27) (avec $p = 0$).

Ce problème admet donc une solution holomorphe et une seule.

11. Nous venons de considérer exclusivement la valeur $p = -\frac{n-2}{2}$. Il est aisé d'obtenir les intégrales qui correspondent aux autres va-

---

([1]) Si l'on avait essayé d'appliquer le calcul des limites sous sa forme classique, c'est-à-dire de trouver un problème différentiel dont la solution fournisse une majorante de celle que l'on a en vue, on serait arrivé aisément au problème suivant : *Trouver une intégrale* $v = v_0 + \Gamma v_1 + \Gamma^2 v_2 + \ldots$ *de l'équation*

$$\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial\Gamma\, \partial\sigma} + \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial\Gamma^2} + \frac{\partial v}{\partial\Gamma} = A \frac{\partial^2 v}{\partial\sigma^2} + B \frac{\partial v}{\partial\sigma} + Cv \qquad (A,\ B,\ C \text{ fonctions de } \sigma),$$

prenant, pour $\Gamma = 0$, *des valeurs données* v_0.

Ce problème appartient à une catégorie fort peu étudiée jusqu'ici, celle où l'équation change de type dans le domaine considéré. Sa solution s'obtient d'ailleurs comme il est indiqué dans le texte.

leurs de p données par la formule (23). La fonction u que nous venons d'obtenir est, en effet, une fonction, non seulement des x, mais aussi des a, et c'est évidemment une fonction analytique de ces quantités. Les fonctions $\frac{\partial u}{\partial a_1}, \frac{\partial u}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial a_n}$ sont des solutions de l'équation donnée, et l'on voit immédiatement qu'elles présentent, au point a, la singularité correspondant à $p_1 = 1$. On aurait de même les solutions correspondant aux valeurs suivantes de p_1 en différentiant à nouveau par rapport aux a.

12. Supposons maintenant n pair. Prenons, par exemple, $n = 4$, d'où $p = 1$. U_0 continuant à recevoir la valeur (24), l'équation (25) devient impossible si l'on n'a pas

$$\mathcal{F}(U_0) = 0$$

sur tout le conoïde caractéristique.

Il est clair que cette condition ne sera pas vérifiée en général. Si, par exemple, on donne tous les coefficients de l'équation, à l'exception de l, elle fera connaître les valeurs de cette quantité sur tout le conoïde ayant pour sommet le point donné (ainsi qu'on le voit en remarquant que l'expression de U_0 est indépendante de l et différente de *zéro*).

Si l'on voulait qu'à chaque point de l'espace correspondît une intégrale de la forme (3) avec $\Pi = \Gamma$, on serait évidemment conduit à des conditions assez compliquées et, sans doute, à une catégorie relativement restreinte d'équations.

La conclusion sera évidemment analogue pour toute autre valeur paire de n, l'impossibilité apparaissant sur l'équation (27) qui correspond à $h = -p = \frac{n-2}{2}$.

Les résultats obtenus par M. Picard pour le cas de deux variables nous conduisent alors à ajouter à notre expression (3) des termes logarithmiques et à poser

$$u = U\Gamma^p + V\Gamma^q \log\Gamma. \tag{30}$$

Si nous substituons cette nouvelle valeur de u, nous constatons immédiatement que les termes logarithmiques ne peuvent disparaître que si le coefficient $V\Gamma^q$ de $\log\Gamma$ est lui-même une solution.

Or, d'après ce que nous venons de voir, notre équation n'en admet aucune de cette forme pour q non entier positif. Nous devrons donc faire $q = 0$.

Dans ces conditions, les équations (27) correspondant à $h < -p$ ne sont pas changées. Mais celle qui est relative à $h = -p$ devient

$$\mathcal{F}(U_{-p-1}) + 4s\frac{dV}{ds} + (M-4)V = 0. \tag{31}$$

V doit donc, sur le conoïde caractéristique, être égale à la fonction holomorphe V_0 qui est définie par l'équation différentielle (31).

Nous avons vu tout à l'heure comment on obtenait, sous la forme (29), le développement d'une fonction satisfaisant à cette condition et à l'équation donnée.

Si nous calculons V de cette façon et que nous substituions dans l'équation donnée l'expression

$$V\log\Gamma + \Gamma^p \sum_{h=1}^{h=-p-1} U_h\Gamma^h, \tag{32}$$

il résulte de ce qui précède que, dans le résultat de substitution, les termes en $\Gamma^{p-1}, \ldots, \frac{1}{\Gamma}$ disparaîtront. Ce résultat de substitution $\mathfrak{M}$ sera donc une fonction holomorphe et il ne restera plus qu'à ajouter à l'expression (32) une solution holomorphe quelconque W de l'équation

$$\mathcal{F}(W) = -\mathfrak{M}$$

pour arriver à une intégrale

$$V\log\Gamma + U\Gamma^p \qquad \left(U = W\Gamma^{-p} + \sum_{h=1}^{-p-1} U_h\Gamma^h\right)$$

de la proposée.

On pourrait d'ailleurs poursuivre le calcul comme précédemment, en déterminant les U_h, pour $h = -p + i$, par les équations de récurrence

$$4s\frac{dU_{-p+i}}{ds}+(M+4i-4)U_{-p+i}$$
$$+\frac{1}{i}\left[\mathcal{F}(U_{-p+i-1})+4s\frac{dV_i}{ds}+(M+4i-4)V_i\right]=0.$$

On voit que, en toute hypothèse, l'infini logarithmique ne se superpose pas à l'autre; quel que soit l'ordre d'infinitude de la partie méromorphe, le coefficient de $\log\Gamma$ est une fonction régulière, solution de l'équation.

13. Bien entendu, si Γ était remplacé par le premier membre de l'équation d'une caractéristique *régulière*, on pourrait prendre, pour l'exposant q de la formule (30), une valeur quelconque et, de toute solution $V\Gamma^q$ ainsi obtenue, en déduire d'autres représentées par la formule en question. Les calculs seraient tout analogues à ceux du numéro précédent.

Pour $q=0$, en considérant deux multiplicités caractéristiques sécantes, on obtiendrait des intégrales ayant la forme considérée par M. Coulon (¹).

14. L'application des résultats qui précèdent aux équations du type elliptique est évidente et il suffit de rappeler à cet égard les résultats donnés par M. Sommerfeld (²). L'existence de la solution (19) ou (30) et le fait qu'elle est analytique tant par rapport aux x que par rapport aux a suffisent pour généraliser les formules classiques de la théorie du potentiel et pour énoncer les propositions suivantes :

Une équation (2) à caractéristiques imaginaires n'a que des solutions analytiques;

Si deux solutions d'une telle équation sont tangentes le long d'une multiplicité $(n-1)^{uple}$, elles sont le prolongement analytique l'une de l'autre;

(¹) *Thèse*, n° 18, p. 46-51.

(²) *Encyclopädie der Math. Wissensch.*, II, 7 c.

Puis encore (par la considération de fonctions analogues à celle de Green) :

Pour une aire telle que le problème d'y déterminer une solution de l'équation adjointe par ses valeurs sur le contour soit toujours possible, ce problème est aussi toujours déterminé pour l'équation donnée.

Etc., etc.

Il convient, au contraire, de s'arrêter un peu plus sur le cas hyperbolique. C'est ce que nous ferons dans un Mémoire suivant.