

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Sur une importante simplification de la théorie des ondes que produisent, à la surface d'un liquide, l'émergence d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 27 (1910), p. 9-42

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__9_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR UNE IMPORTANTE SIMPLIFICATION
DE LA
THÉORIE DES ONDES

QUE PRODUISENT,
A LA SURFACE D'UN LIQUIDE,
L'ÉMERSION D'UN SOLIDE OU L'IMPULSION D'UN COUP DE VENT;

PAR J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — I. Sur la manière dont le potentiel des vitesses, dans le problème des ondes, dépend de l'état initial. — II. Intégration par la formule de Mac-Laurin en séries toujours convergentes, pour un canal sans extrémités et pour un bassin horizontalement indéfini en tous sens. — III. Propagation verticale du mouvement aux grandes profondeurs, dans ces cas d'un canal ou d'un bassin horizontalement indéfinis. — IV. Manière de traiter, au moins dans certains cas, le même problème des ondes pour des bassins horizontalement limités : non-extinction du mouvement par le bas.

I. — Sur la manière dont le potentiel des vitesses,
dans le problème des ondes, dépend de l'état initial.

1. Le résultat le plus intéressant des solutions originales que Poisson et Cauchy ont simultanément données, vers 1815, pour les problèmes des ondes infiniment petites *par émerision* ou *par impulsion superficielle*

produites au sein d'une masse liquide profonde ⁽¹⁾, a consisté dans les séries convergentes qu'ils ont obtenues pour y exprimer, en fonction des coordonnées x, y, z et du temps t , le potentiel φ des vitesses et la dénivellation h , dans l'hypothèse d'une *surface d'émerision* ou *d'impulsion* infiniment petite et d'un bassin indéfini latéralement comme en profondeur. Or leurs démonstrations de ces séries sont fort complexes; et comme l'emploi de celles-ci reste à peu près indispensable, même dans la solution plus récente que m'a donnée, vers 1880, une tout autre méthode ⁽²⁾, il était bien à désirer qu'une voie beaucoup plus courte, pour arriver aux séries en question, fût découverte. C'est précisément ce que vient de faire, dans sa Thèse, un jeune docteur ès sciences mathématiques, M. Vergne, ingénieur des Arts et Manufactures ⁽³⁾.

Je me propose ici de réduire à sa plus simple expression cette démonstration de M. Vergne, en l'étendant, pour cela, dans son esprit, au cas d'un bassin limité quelconque, et de montrer que les formules de Poisson et de Cauchy peuvent être, elles-mêmes, étendues aux ondes de bassins indéfinis en profondeur, mais latéralement limités par certaines parois verticales. Je pourrai me borner aux ondes *par émerision*, au calcul desquelles celui des ondes *par impulsion* se ramène, dans tous les cas, en remplaçant simplement la fonction φ par sa dérivée relative au temps t .

2. Commençons par rappeler les équations fondamentales des ondes dont il s'agit, produites au sein de la masse d'eau que limitent supérieurement, à l'état de repos, le plan horizontal des xy , et, inférieurement ou latéralement, des parois fixes, rencontrées en un point (que nous supposerons d'abord unique) par toute verticale descendante émanée de la surface libre $z = 0$.

⁽¹⁾ Le travail de Poisson est au Tome I des *Mémoires* de la nouvelle *Académie des Sciences de Paris*, et celui de Cauchy, au Tome I du *Recueil des Savants étrangers* ou des *Mémoires présentés par divers savants* à la même Académie.

⁽²⁾ Voir, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, fasc. 2, p. 496* à 515*.

⁽³⁾ *Contribution à la théorie des ondes liquides*, p. 47 à 50. Paris, Gauthier-Villars, 1909. Le présent Mémoire, bien que paraissant seulement dans le numéro de janvier 1910 des *Annales*, était presque entièrement rédigé dès le 27 mai 1909, jour de la soutenance de la thèse de M. Vergne, dont j'avais été *Rapporteur* à la Faculté des Sciences.

L'axe des z étant dirigé vers le bas, le petit potentiel φ des vitesses, qu'il faut déterminer, sur chacune de ces verticales, pour les valeurs de z comprises entre zéro (à très peu près) et l'ordonnée positive du point correspondant du fond, est une fonction astreinte à vérifier l'équation de Laplace

$$\Delta_2 \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

(ou à être *harmonique*), et à avoir, de plus, contre toute paroi fixe, sa dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ dans le sens normal nulle, mais, sur chaque élément de la surface libre $z=0$, sa dérivée analogue $\frac{d\varphi}{dz}$ égale, en tous les instants t positifs, à sa dérivée seconde par rapport au temps, $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, si l'on admet, comme nous le ferons pour simplifier, un choix d'unités de longueur ou de temps qui fasse égale à 1 la gravité g . A cette même surface libre $z=0$, la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ exprime d'ailleurs la petite *dénivellation* h , abaissement actuel, sur la verticale (x, y) , des molécules superficielles au-dessous de leur situation d'équilibre.

Enfin, les conditions d'état initial sont, d'une part, que, pour $t=0$, les vitesses s'annulent partout, leur potentiel φ s'annule, tandis que, d'autre part, la surface d'émergence $h_0 = f(x, y)$ étant connue, la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ reçoit alors, pour $z=0$, des valeurs données $f(x, y)$, nulles ou insensibles hors de cette surface d'émergence, c'est-à-dire hors de la région du plan des xy occupée primitivement par le solide émergé ⁽¹⁾. Toutefois, dans le cas d'un bassin limité latéralement, c'est-à-dire ayant une aire supérieure totale finie, c'est la valeur moyenne de $f(x, y)$

⁽¹⁾ En toute rigueur, si l'on appelle, par exemple, ε la plus grande valeur (absolue) des dénivellations *initiales* h_0 données, et que l'on pose

$$h_0 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \varepsilon F(x, y), \quad \varphi = \varepsilon \Phi,$$

la véritable fonction de x, y, z, t qu'il s'agit de former est Φ à la limite $\varepsilon = 0$, et non pas φ qui s'annule alors identiquement; la fonction $F(x, y)$ reste une donnée arbitraire.

sur toute cette aire, qui, seule, s'annulera, en raison du choix de la surface libre de repos pour plan des xy ⁽¹⁾.

3. Les équations ci-dessus, différenciées un nombre quelconque m de fois en t , entraînent évidemment, pour toute dérivée de φ par rapport au temps, la relation $\Delta_2 \frac{d^m \varphi}{dt^m} = 0$, avec les conditions $\frac{d}{dn} \frac{d^m \varphi}{dt^m} = 0$ (aux parois) et

$$(1) \quad \frac{d^{m+2} \varphi}{dt^{m+2}} = \frac{d}{dz} \frac{d^m \varphi}{dt^m} \quad (\text{pour } z = 0).$$

Autrement dit, en premier lieu, la fonction $\frac{d^m \varphi}{dt^m}$ est harmonique, comme le potentiel φ , et vérifie aux parois la même relation monome que ce potentiel. Or il suit de là, comme on sait, que les valeurs de $\frac{d^m \varphi}{dt^m}$ à tous les niveaux z seront entièrement déterminées par ses valeurs à la surface libre $z = 0$, et que, par suite, leur dérivée en z , au niveau $z = 0$ ou à tout autre, en résultera. Donc, en particulier, pour $m = 1$, les valeurs initiales de la dérivée première $\frac{d\varphi}{dt}$ dans tout le fluide, ainsi que leur dérivée en z pour $z = 0$, dépendront des seules valeurs données $f(x, y)$ de cette dérivée première, relatives aussi à la surface $z = 0$.

En deuxième lieu, la condition (1) montre, si l'on y fait $m = 1$, que cette connaissance des valeurs initiales de $\frac{d\varphi}{dt}$ au niveau $z = 0$, y entraîne finalement celle des valeurs initiales de $\frac{d^3 \varphi}{dt^3}$; d'où l'on déduira de même, en faisant successivement $m = 3, = 5, = 7, \dots$, les valeurs analogues, pour $z = 0$ et ensuite pour les divers niveaux z , de toutes les dérivées de φ en t d'ordre impair.

Quant aux dérivées d'ordre pair, elles sont initialement nulles. En effet, les valeurs initiales de φ étant données égales à zéro à la surface

(1) Elle s'annule aussi sur l'aire infinie totale d'un canal ou d'un bassin illimités, mais se confond alors pratiquement avec l'ordonnée négative, insensible, des parties de la surface libre initiale extérieures à la région d'émersion.

libre et, par suite, dans tout le fluide, la dérivée de φ en z est alors nulle pour $z = 0$ et l'équation

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (\text{pour } z = 0)$$

montre que la dérivée seconde de φ en t , $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, se trouve, dans le même cas, nulle à la surface et aussi, par suite, à tous les niveaux z . D'où l'on déduit, en faisant successivement $m = 2, = 4, = 6, \dots$, que toutes les dérivées paires de φ en t ont, pareillement, zéro comme valeur initiale dans tout le fluide.

En résumé, le potentiel φ des vitesses, considéré au point fixe quelconque (x, y, z) du *champ* qu'occupe le fluide, a initialement toutes ses dérivées par rapport au temps, d'ordre impair, calculables à partir des seules valeurs qui soient données, $f(x, y)$, de la dérivée première $\frac{d\varphi}{dt}$ à la surface $z = 0$, pourvu qu'on sache, pour tout le champ (à ordonnées z positives) qu'occupe le fluide *et qui est constamment le même* (à des écarts près négligeables, infiniment petits, au voisinage du niveau $z = 0$), intégrer l'équation $\Delta_2 = 0$ des fonctions harmoniques, sous la condition d'obtenir, pour la fonction cherchée, des valeurs arbitraires à la surface $z = 0$, avec une dérivée première partout nulle aux parois suivant le sens qui leur est normal. Et ce même potentiel φ aura *initialement*, encore au point fixe quelconque (x, y, z) , toutes ses dérivées d'ordre pair, par rapport au temps, égales à zéro.

Si donc nous appelons $\varphi'_0, \varphi''_0, \varphi'''_0, \dots$ les valeurs initiales, *en* (x, y, z) , de $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^3 \varphi}{dt^3}, \frac{d^5 \varphi}{dt^5}, \dots$, ainsi calculées à partir de $f(x, y)$, *ces valeurs régleront la manière dont y naîtra la fonction* φ ; car, pour t assez petit, elles donneront, en vertu de la série de Mac-Laurin,

$$\varphi = \varphi'_0 t + \varphi''_0 \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \varphi'''_0 \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots,$$

avec une approximation indéfinie pourvu que $\varphi'_0, \varphi''_0, \varphi'''_0, \dots$ soient finies et ne s'annulent pas identiquement. Et si cette série converge

quel que soit t , elle constituera évidemment l'intégrale générale du problème (1).

(1) Il peut être bon d'observer que, le plus souvent, les équations aux dérivées partielles déterminant dans l'état initial, comme il vient d'être dit, les dérivées $\frac{d^m \varphi}{dt^m}$, d'ordre impair, en fonction de leurs valeurs à la surface $z = 0$, s'intégreront par des sortes d'intégrales définies du genre des potentiels d'attraction, qui exprimeront ainsi chacune de ces dérivées et aussi, par suite (en les différentiant), sa propre dérivée première en z pour $z = 0$, à partir de laquelle se fera de même le calcul analogue de la dérivée impaire suivante. Or, il résulte de là que les valeurs initiales des dérivées impaires successives de φ contiendront, dans leur expression, des nombres de plus en plus grands de signes \int , ou qu'elles constitueront des intégrales définies ayant leur degré de multiplicité de plus en plus élevé. Donc le calcul effectif des termes de la série ci-dessus, obtenue pour représenter le potentiel φ des vitesses, exigera, généralement, de plus en plus d'intégrations à mesure que s'élèvera leur rang : ce sera une série dans le genre de celles qu'Émile Mathieu, le premier ou l'un des premiers, a données pour exprimer l'équilibre d'élasticité du parallélépipède rectangle, et avec lesquelles se familiarisent actuellement les géomètres, à la suite de Fredholm et de M. Volterra, mais sans avoir pu encore, ce semble, aboutir au calcul *effectif* d'aucun résultat (numérique) nouveau, ni même, d'une manière générale, à l'élucidation purement théorique du cas fréquent où se présente, à la frontière du corps étudié, une discontinuité soit géométrique, telle qu'un sommet ou une arête, soit seulement physique, dans le genre, par exemple, d'une annulation de vitesse avec changement de direction. Et il continuera probablement à en être de même, jusqu'à ce que cette belle théorie ait reçu quelque complément capital, susceptible d'en simplifier et d'en étendre l'application.

Quant à la difficulté spéciale qui s'y présente dans les cas de discontinuités à la frontière, les analystes ne paraissent y avoir remarqué que celui des discontinuités géométriques. Mais un problème que M. Émile Picard a rattaché, très ingénieusement, à la méthode de Fredholm, savoir, celui du pouvoir refroidissant d'un courant fluide *bon conducteur* normal à l'axe d'un cylindre solide immergé dans ce courant et maintenu à des températures constantes (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XXV, 1908, p. 589 à 591), montre que la discontinuité peut être, suivant les cas, ou géométrique, ou physique, sans que la question change essentiellement au point de vue analytique. Car, en posant ce problème dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (6^e série, t. I, 1905, p. 295 : *Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides*, p. 295), j'ai reconnu que l'emploi de deux coordonnées curvilignes α , β , orthogonales et isothermes, dont la première, α , est le paramètre caractéristique des filets fluides, y ramène le cas d'un cylindre quelconque, circulaire ou elliptique par exemple, au cas d'un mince plateau tangent au courant. Or, pour un tel plateau, la discontinuité, purement géométrique, consiste dans la courbure infinie des deux sommets de la section droite, infiniment aplatie, de part et d'autre de laquelle glisse, en se bifurquant sans se dévier, le filet fluide médian ou central $\alpha = 0$, tandis que, dans le cas où la section est, par exemple, une ellipse de courbure partout finie, la discontinuité consiste dans la brusque

4. Les expressions de $\varphi'_0, \varphi''_0, \varphi'''_0, \dots$ se simplifient notablement quand, le bassin étant assez profond et la fonction φ s'évanouissant, avec le mouvement, pour les grandes valeurs de z , les seules parois qu'il reste à considérer sont des bords verticaux, à normales dn parallèles en tous les points (x, y) de chacune de leurs ordonnées z ; de sorte qu'on puisse, le long d'une même ordonnée, différentier par rapport à z la relation $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, ou écrire $\frac{d}{dn} \frac{d\varphi}{dz} = 0$.

Alors, si l'on appelle τ la fonction, évidemment harmonique, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dz}$, non seulement sa valeur pour z infini, c'est-à-dire au fond, se trouve nulle, mais, de plus, sa dérivée suivant les normales horizontales dn aux parois le sera; et comme, en vertu de (1 bis), ses valeurs à la surface $z=0$ sont aussi nulles, cette fonction harmonique s'annulera identiquement. La condition (1 bis) deviendra donc, pour régir φ , la nouvelle équation indéfinie $\tau = 0$, c'est-à-dire

$$(2) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

C'est ce qu'avait déjà, au moins pour les bassins indéfinis latérale-

déviations (avec arrêt momentané) de ce filet fluide central $\alpha = 0$, aux deux points opposés où il aborde, puis quitte, la section droite et entre lesquels il s'est bifurqué pour en décrire de chaque côté un demi-contour. L'emploi des coordonnées curvilignes α, β et γ transforme donc, sans changer l'ordre de grandeur de la difficulté, les deux points anguleux affectés par le filet central en les deux sommets qu'offrait le contour du plateau mince.

Toutefois, deux articles récents de M. Léon Lichtenstein, insérés dans les *Comptes rendus* des séances des 18 octobre et 29 novembre 1909 de l'Académie des Sciences (t. CXLIX, p. 624 et 977), permettent d'espérer que cette difficulté relative aux discontinuités pourra être levée; car le second article, du 29 novembre 1909, la lève déjà pour un contour anguleux, sous les deux conditions restrictives que les angles γ diffèrent de zéro et que la fonction dite *noyau* n'y devienne infinie que de certaines manières (conditions malheureusement irréalisées dans la question précédente du pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un plateau mince et dans d'autres problèmes intéressants de Physique mathématique). D'ailleurs, une extrême complication, presque décourageante pratiquement, subsiste dans les calculs.

Pour en revenir à la question de nos ondes, on verra ci-après (n° 4) comment l'hypothèse d'une profondeur infinie réduit aux dérivées successives en z d'une fonction unique h_0 les résultats des intégrations de plus en plus multipliées destinées à donner $\varphi'_0, \varphi''_0, \varphi'''_0, \dots$: heureuse circonstance, sans laquelle le calcul des ondes d'émergence serait probablement, jusqu'à ce jour, resté inextricable.

ment, remarqué Poisson, qui avait d'ailleurs reconnu que cette équation (2) exprime la constance de la pression $z - \frac{d\varphi}{dt}$ exercée durant tout le mouvement autour de chaque molécule fluide. Appelons Z l'ordonnée verticale mesurant *hydrostatiquement* cette pression invariable, ordonnée nulle pour les molécules superficielles; et regardons l'abaissement *actuel*, $z - Z$, de la molécule au-dessous du *niveau hydrostatique de sa pression effective*, comme définissant sa dénivellation présente h , que l'on considérera ainsi pour les molécules intérieures non moins que pour celles de la surface (1). Nous aurons donc, d'une

(1) Les diverses particules fluides, supposées garder ces pressions hydrostatiques Z , seront évidemment en équilibre si, annulant leur vitesse, on les relève respectivement de h ; et elles conserveront en même temps leur volume, grâce à de petits déplacements horizontaux convenables, pourvu que, à tous les niveaux z , la valeur moyenne du relèvement h soit la même; car alors tous les feuilletts fluides actuellement horizontaux, dont l'aire, $\int d\sigma'$, égale la somme σ' des divers éléments $d\sigma'$ du plan des xy correspondant à la surface libre, décrivent dans leur relèvement un volume constant $\int h d\sigma'$, produit de σ' par ce relèvement moyen, et conservent ainsi entre eux, pour y loger la couche fluide intermédiaire, une capacité invariable.

Or la somme $\int h d\sigma'$, ou $\int \frac{d\varphi}{dt} d\sigma'$, est bien indépendante de z ; car l'équation $\Delta_2 h = 0$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2 h}{dz^2} = 0,$$

multipliée par $dx dy$ ou $d\sigma'$, et intégrée dans toute l'étendue σ' de la section du bassin faite au niveau z , donne, pour ses deux premiers termes, par une méthode bien connue, en appelant χ le contour de σ' , $\int_{\chi} \frac{d}{dn} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) d\chi$, somme à éléments nuls en vertu de la condition aux parois. Il reste donc simplement

$$\int_{\sigma'} \frac{d^2 h}{dz^2} d\sigma' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2}{dz^2} \int_{\sigma'} h d\sigma' = 0;$$

et le volume $\int_{\sigma'} h d\sigma'$ est une fonction linéaire de z . Or, comme le mouvement s'évanouit asymptotiquement pour z infini, ou que $\frac{d\varphi}{dt}$ s'y réduit à une constante, cette constante, multipliée par σ' , exprimera partout le volume $\int_{\sigma'} h d\sigma'$.

Le choix fait de la surface supérieure d'équilibre du fluide comme plan des xy obligeant

manière générale,

$$(3) \quad h = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Or, si nous différencions des nombres pairs de fois l'équation (2) par rapport au temps, il vient successivement, vu, finalement, cette équation (2) elle-même,

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} = \frac{d}{dz} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^3 \varphi}{dz^2}, \quad \frac{d^6 \varphi}{dt^6} = \frac{d^2}{dz^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^3 \varphi}{dz^3}, \quad \dots \quad \frac{d^{2n} \varphi}{dt^{2n}} = \frac{d^n \varphi}{dz^n},$$

et, en différenciant une fois de plus par rapport à t ,

$$(4) \quad \frac{d^{2n+1} \varphi}{dt^{2n+1}} = \frac{d^n}{dz^n} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^n h}{dz^n}.$$

Faisons $t = 0$ dans cette équation (4) et désignons par h_0 la valeur initiale, au point quelconque (x, y, z) , de $\frac{d\varphi}{dt}$ ou h , laquelle se déduit, comme on l'a vu, de ses valeurs données $f(x, y)$ relatives à la surface libre. Il viendra évidemment

$$\varphi'_0 = h_0, \quad \varphi''_0 = \frac{dh_0}{dz}, \quad \varphi'''_0 = \frac{d^2 h_0}{dz^2}, \quad \dots;$$

et le développement du potentiel φ des vitesses par la série de Mac-Laurin, valable du moins pour les valeurs assez petites de t , sera, en tous les points du fluide,

$$(5) \quad \varphi = th_0 + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \frac{dh_0}{dz} + \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{d^2 h_0}{dz^2} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n+1)} \frac{d^n h_0}{dz^n} + \dots$$

Ainsi se trouvera exprimée directement, *en fonction des dénivellations initiales de toute la masse fluide*, la suite de ses états ultérieurs.

d'ailleurs la surface libre (pour la conservation du volume total) à avoir son ordonnée h moyenne nulle, on aura identiquement $\int h \, d\sigma' = 0$.

En résumé, la différence $z - Z$ ou $\frac{d\varphi}{dt}$ exprime l'abaissement actuel de chaque molécule fluide au-dessous de son niveau d'équilibre.

II. — Intégration par la formule de Mac-Laurin, en séries toujours convergentes, pour un canal sans extrémités et pour un bassin horizontalement indéfini en tous sens.

5. Quand le bassin proposé est horizontalement indéfini soit seulement dans le sens des x (tant négatifs que positifs), avec largeur constante un suivant les y , soit aussi dans le sens des y , et que, dans le premier cas, le solide émergé étant, sur toute la largeur, un cylindre à génératrices parallèles aux y , la variable x est la seule coordonnée horizontale qui doit figurer, la dénivellation initiale h_0 s'exprime aisément par le moyen d'un potentiel ou logarithmique, dans le premier cas, ou newtonien, dans le second. De plus, ce potentiel est relatif à une matière fictive s'étendant soit, en file étroite, le long de l'axe des x , soit, en couche mince, sur le plan des xy , avec une densité, par unités ou de longueur, ou d'aire, égale au volume d'émergence donné, qui est $f(x)$, ou $f(x, y)$, aussi par unités ou de longueur, ou d'aire, de la superficie du bassin.

Appelons d'abord : d'une part, ξ l'abscisse, dans le plan vertical des xz , d'un point quelconque de la région cylindrique d'émergence contiguë à l'axe des x , ou, dans le second cas, ξ, η les deux coordonnées horizontales d'un point analogue de la région alors non cylindrique d'émergence ; et, d'autre part, (x, z) tout point du plan vertical des xz , sous l'axe des x , dans le premier cas, mais (x, y, z) , dans le second, tout point appartenant à la masse fluide, c'est-à-dire situé *sous* le plan des xy , à une distance quelconque z de ce plan ; enfin, r la distance $\sqrt{z^2 + (x - \xi)^2}$ ou $\sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, de ce point intérieur à l'élément quelconque $dm = f(\xi) d\xi$ ou $f(\xi, \eta) d\xi d\eta$, de l'aire ou du volume d'émergence.

On sait que le potentiel logarithmique $f(\log r) dm$, dans le cas du plan, et le potentiel newtonien $\int \frac{dm}{r}$ dans le cas de l'espace, étendus à tous les éléments $f dm$ de l'aire ou du volume d'émergence contigus au lieu $z = 0$, satisfont respectivement, hors de ce lieu, avec toutes leurs dérivées partielles, à l'équation correspondante

$$\frac{d^2 h_0}{dx^2} + \frac{d^2 h_0}{dy^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 h_0}{dx^2} + \frac{d^2 h_0}{dy^2} + \frac{d^2 h_0}{dz^2} = 0,$$

des fonctions harmoniques, vérifiée par la dénivellation h_0 . De plus, leur dérivée en z ,

$$\int \frac{z \, dm}{r^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\xi) \, d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2}$$

ou

$$-\int \frac{z \, dm}{r^3} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

devient, en y posant soit

$$\xi - x = R,$$

soit

$$\xi - x = R \cos \omega, \quad \eta - y = R \sin \omega,$$

et adoptant alors les coordonnées polaires R, ω ,

$$\begin{aligned} \int \frac{z \, dm}{r^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(x + R) \, dR}{z^2 + R^2}, \\ -\int \frac{z \, dm}{r^3} &= - \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \frac{z f(x + R \cos \omega, y + R \sin \omega) R \, dR}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Or, si l'on prend $R = zq$ (d'où $dR = z \, dq$) et qu'on fasse tendre vers zéro la valeur positive de z , il vient, à la limite $z = 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{z \, dm}{r^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) \, dq}{1 + q^2} = \pi f(x), \\ -\int \frac{z \, dm}{r^3} &= - \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \frac{f(x, y) q \, dq}{(1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = - 2\pi f(x, y); \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction cherchée h_0 , qui doit se réduire à $f(x)$ ou $f(x, y)$ pour $z = 0$, aura l'expression

$$h_0 = \begin{cases} \text{soit } \frac{1}{\pi} \int \frac{z \, dm}{r^2}, \\ \text{soit } \frac{1}{2\pi} \int \frac{z \, dm}{r^3}, \end{cases}$$

pourvu que ces expressions tendent asymptotiquement vers zéro aux grandes distances $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ de l'origine. Or, il est clair qu'elles y tendent en effet.

Donc on aura, pour exprimer la dénivellation initiale h_0 dans un bassin profond et horizontalement illimité, les deux intégrales définies

$$(6) \quad h_0 = \frac{1}{\pi} \int \frac{z \, dm}{r^2},$$

pour les ondes propagées horizontalement suivant un seul sens, et

$$(7) \quad h_0 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{z \, dm}{r^3},$$

pour les ondes propagées horizontalement en tous sens, c'est-à-dire en largeur non moins qu'en longueur.

6. Appelons θ l'angle fait avec la verticale descendante par le rayon vecteur r émané de l'élément quelconque dm de l'aire ou du volume d'émersion; ce qui permettra d'écrire

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}},$$

R^2 étant soit $(x - \xi)^2$, soit $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

Et, devant évaluer les dérivées successives en z de h_0 pour les porter dans la formule (5) du potentiel des vitesses, cherchons à différentier n fois en z l'élément, $\frac{z \, dm}{r^2}$ ou $\frac{z \, dm}{r^3}$, de l'intégrale, c'est-à-dire, plutôt, son facteur variable $\frac{\cos \theta}{r}$ ou $\frac{\cos \theta}{r^2}$. Or, celui-ci est fonction de z par l'intermédiaire de r et de θ ; et, de plus, une différentiation en z se fait sans que varient x ni y , ni, par suite, R : de sorte qu'on y a

$$r \cos \theta = z, \quad r \sin \theta = \text{la const. } R;$$

d'où

$$\frac{dr}{dz} = \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

Les différentiations en z se feront donc par la formule symbolique

$$(8) \quad \frac{d}{dz} = \cos \theta \frac{d}{dr} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{1}{r} \frac{d}{d\frac{1}{r}} + \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right).$$

Les deux expressions à différentier, $\frac{\cos \theta}{r}$, $\frac{\cos \theta}{r^2}$, étant homogènes en $\frac{1}{r}$ de degré entier positif, et leur dérivation en r accroissant d'une unité ce degré, tandis que leur dérivation en θ ne le change pas, mais introduit un facteur $-\sin \theta$, il est clair, par cette formule, que chaque dérivation en z produira un polynôme en $\frac{1}{r}$ également homogène, mais ayant son degré plus élevé de 1, et aussi un polynôme en $\cos \theta$ d'un degré également plus élevé de 1 que le polynôme différentié, mais non homogène, à raison du facteur $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ introduit, vu la forme de (8), par la dérivation en θ de ce polynôme. Comme les puissances de $\cos \theta$ s'expriment linéairement par les cosinus des multiples de θ , le résultat sera donc, après n dérivations en z , l'inverse de r^{n+1} ou de r^{n+2} , multiplié par une somme de termes respectivement proportionnels à $\cos \theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$, ..., $\cos(n+1)\theta$.

7. Commençons par le cas des ondes cylindriques, où l'expression à différentier n fois par la formule (8) est $\frac{\cos \theta}{r}$. En employant le troisième membre de (8), une première différentiation donne

$$\frac{d \frac{\cos \theta}{r}}{dz} = -\frac{1}{r^2} (\cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta) = -\frac{1}{r^2} \cos 2\theta;$$

et il vient ensuite, en appliquant de même le troisième membre de (8) à $-\frac{1}{r^2} \cos 2\theta$,

$$\frac{d^2 \frac{\cos \theta}{r}}{dz^2} = \frac{2}{r^3} (\cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta) = \frac{1 \cdot 2}{r^3} \cos 3\theta.$$

Il est clair qu'on aura, de proche en proche,

$$\frac{d^n \frac{\cos \theta}{r}}{dz^n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{r^{n+1}} \cos(n+1)\theta.$$

Par suite, vu que, en vertu de (6), h_0 a l'expression $\int \frac{\cos \theta}{\pi r} dm$, et

aussi qu'on a

$$\frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots(2n+1)} = \frac{1}{1.3.5\dots(2n+1)} \frac{1}{2^n},$$

la formule (5) de Mac-Laurin (p. 17) deviendra

$$(9) \quad \varphi = \int \frac{tdm}{\pi r} \left[\frac{\cos \theta}{1} - \frac{\cos 2\theta}{1.3} \frac{t^2}{2r} + \frac{\cos 3\theta}{1.3.5} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^2 - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{\cos(n+1)\theta}{1.3.5\dots(2n+1)} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^n \mp \dots \right].$$

C'était précisément la formule à obtenir de Poisson, sous la forme que lui a donnée M. Rousier dans sa Thèse (1) et dont la dérivée en t exprime les dénivellations h :

$$(10) \quad h = \int \frac{dm}{\pi r} \left[\cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{1} \frac{t^2}{2r} + \frac{\cos 3\theta}{1.3} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^2 - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{\cos(n+1)\theta}{1.3\dots(2n-1)} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^n \mp \dots \right].$$

Les séries placées sous le signe \int , dans ces formules (9) et (10), se trouvant visiblement convergentes non seulement pour les très petites valeurs de t , mais pour t quelconque, il est clair que ces intégrales définies constituent la solution générale du problème.

8. Passons au cas d'ondes d'émergence initialement limitées en tous sens et produites dans un bassin horizontalement indéfini. Ce sont alors les dérivées successives en z de $\frac{\cos \theta}{r^2}$ qu'il faut prendre. La formule (8) donne, en utilisant son troisième membre,

$$(11) \quad \frac{d}{dz} \frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{1.2}{r^3} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \\ = -\frac{1.2}{r^3} \left(\frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \right) \\ = -\frac{1.2}{r^3} \left[\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cos(-2\theta) \right].$$

(1) *Ondes par émergence*, p. 41. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Posons, en général,

$$\begin{aligned}
 (12) \quad P_n = & \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \right) \cos n\theta \\
 & + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-3}{2n-2} \right) \cos(n-2)\theta \\
 & + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-5}{2n-4} \right) \cos(n-4)\theta + \dots \\
 & + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2p-1}{2p} \right) \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-2p-1}{2n-2p} \right) \cos(n-2p)\theta \\
 & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2p+1}{2p+2} \right) \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-2p-3}{2n-2p-2} \right) \cos(n-2p-2)\theta + \dots \\
 & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-1}{2n} \right) \cos(-n\theta).
 \end{aligned}$$

L'expression $\frac{\cos\theta}{r^2}$, d'où l'on est parti, et la relation (11) se trouveront comprises dans la formule générale

$$(12 \text{ bis}) \quad \frac{d^{n-1} \frac{\cos\theta}{r^2}}{dz^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1.2.3\dots n}{r^{n+1}} P_n.$$

Il suffit donc, pour démontrer celle-ci, de faire voir que, si elle est vraie pour une valeur de n , elle sera vraie aussi pour la valeur suivante. Or, la formule (8) de différentiation, appliquée, toujours de la même manière, au second membre de (12 bis), donne

$$\frac{d^n \frac{\cos\theta}{r^2}}{dz^n} = (-1)^n \frac{1.2.3\dots(n+1)}{r^{n+2}} \left(P_n \cos\theta + \frac{\sin\theta}{n+1} \frac{dP_n}{d\theta} \right);$$

en sorte que la relation à démontrer est

$$(13) \quad P_{n+1} = P_n \cos\theta + \frac{\sin\theta}{n+1} \frac{dP_n}{d\theta}.$$

Effectuons le calcul du second membre de (13) sur l'expression (12)

de P_n . Il vient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-1}{2n}\right) \left(\cos n\theta \cos \theta - \frac{n}{n+1} \sin n\theta \sin \theta\right) + \dots \\ & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-2p-1}{2n-2p}\right) \\ & \quad \times \left[\cos(n-2p)\theta \cos \theta - \frac{n-2p}{n+1} \sin(n-2p)\theta \sin \theta\right] \\ & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2p+1}{2p+2}\right) \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-2p-3}{2n-2p-2}\right) \\ & \quad \times \left[\cos(n-2p-2)\theta \cos \theta - \frac{n-2p-2}{n+1} \sin(n-2p-2)\theta \sin \theta\right] + \dots \\ & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-1}{2n}\right) \left[\cos(-n\theta) \cos \theta - \frac{(-n)}{n+1} \sin(-n\theta) \sin \theta\right], \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant tous les produits soit de deux cosinus, soit de deux sinus, par de simples cosinus, au moyen de la formule double

$$(\cos a \cos b, -\sin a \sin b) = \frac{\cos(a+b)}{2} \pm \frac{\cos(a-b)}{2},$$

puis ajoutant les termes affectés d'un même cosinus et n'écrivant explicitement, avec les premier et dernier termes du résultat, que le terme général intermédiaire où figure en facteur $\cos(n-2p-1)\theta$,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n+1}{2n+2}\right) \cos(n+1)\theta + \dots \\ & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2p+1}{2p+2}\right) \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n-2p-1}{2n-2p}\right) \cos(n-2p-1)\theta + \dots \\ & + \left(\frac{1}{2} \dots \frac{2n+1}{2n+2}\right) \cos(-n\theta - \theta). \end{aligned}$$

C'est bien, précisément, ce qu'exprime la formule (12) de P_n lorsqu'on y remplace n par $n+1$ (1).

(1) La relation (13), jointe à l'expression $\cos \theta$ de P_1 , permet de reconnaître que P_n est le coefficient de x^n dans le développement en série, par la formule du binôme et sui-

9. Il importe de remarquer sur la formule (12) que chaque terme de P_n atteint sa valeur absolue la plus grande quand $\theta = 0$, ou quand le cosinus y vaut 1, et que, tous les termes étant alors positifs, P_n est maximum. Or, la valeur nulle de θ correspond à $z = r$, et la dérivée $n - 1^{\text{ième}}$ en z de $\frac{\cos \theta}{r^2}$ se confond alors avec la dérivée $n^{\text{ième}}$ en r de $-\frac{1}{r}$, c'est-à-dire avec $(-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{r^{n+1}}$; ce qui, d'après (12 bis), donne $P_n = 1$. Ainsi, toutes les fonctions P_n de θ , qui sont, au fond, des polynômes en $\cos \theta$, se réduisent à l'unité pour $\theta = 0$ et acquièrent alors leur valeur absolue la plus grande.

La formule (12 bis) se trouvant ainsi démontrée et la dérivée $n^{\text{ième}}$ en z de l'expression (7) de h_0 (p. 20) étant, par suite,

$$(14) \quad (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}{2\pi} \int \frac{P_{n+1} dm}{r^{n+2}},$$

vant les puissances de x , du radical

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}} = 1 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n + P_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

En effet, d'une part, le terme en x du second membre est visiblement $x \cos \theta$. D'autre part, les deux différentiations respectives en x et en θ de (a) donnent

$$(b) \quad \begin{aligned} & (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-\frac{3}{2}} (\cos \theta - x) \\ & = P_1 + 2P_2 x + \dots + n P_n x^{n-1} + (n+1) P_{n+1} x^n + \dots, \end{aligned}$$

$$(c) \quad (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-\frac{3}{2}} (-x \sin \theta) = \frac{dP_1}{d\theta} x + \frac{dP_2}{d\theta} x^2 + \dots + \frac{dP_n}{d\theta} x^n + \dots$$

Ajoutons les trois relations (a), (b) et (c), après les avoir multipliées respectivement par $\cos \theta$, par $x \cos \theta - 1$ et par $\sin \theta$. Il vient

$$\begin{aligned} 0 = & \left(2 P_1 \cos \theta - 2 P_2 + \frac{dP_1}{d\theta} \sin \theta \right) x + \dots \\ & + \left[(n+1)(P_n \cos \theta - P_{n+1}) + \frac{dP_n}{d\theta} \sin \theta \right] x^n + \dots \end{aligned}$$

Or l'annulation, qui doit être identique, de tous les coefficients des puissances de x , revient bien à poser, entre deux fonctions P consécutives, la formule générale (13).

Les polynômes, de degré égal à l'indice n , que fournissent les coefficients P du développement (a), quand on les exprime au moyen de la variable $\cos \theta$, sont par définition, comme on sait, les *polynômes dits de Legendre*.

la formule (5) de Mac-Laurin (p. 17) donne, pour le potentiel φ des vitesses,

$$(15) \quad \varphi = \frac{t}{2\pi} \int \frac{dm}{r^2} \left[P_1 - \frac{P_2}{3} \frac{t^2}{r} + \frac{P_3}{4 \cdot 5} \left(\frac{t^2}{r} \right)^2 - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{P_{n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)} \left(\frac{t^2}{r} \right)^n \mp \dots \right],$$

et, pour sa dérivée en t , expression de la dénivellation h , le développement

$$(16) \quad h = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dm}{r^2} \left[P_1 - P_2 \frac{t^2}{r} + \frac{P_3}{4} \left(\frac{t^2}{r} \right)^2 - \frac{P_4}{5 \cdot 6} \left(\frac{t^2}{r} \right)^3 + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{P_{n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n)} \left(\frac{t^2}{r} \right)^n \mp \dots \right].$$

Considérons, dans cette dernière formule (par exemple) la série placée sous le signe f . Le rapport, au terme général qui s'y trouve écrit, du terme suivant où $n+1$ remplacerait n , y est, en valeur absolue, abstraction faite des facteurs P_{n+1} , P_{n+2} au plus égaux à 1, $\frac{n+2}{(2n+1)(2n+2)} \frac{t^2}{r}$, ou sensiblement, pour n très grand, $\frac{t^2}{4rn}$, quantité tendant vers zéro quelque grande que soit la valeur actuelle de t . Donc les séries sous les signes f de (15), (16) sont toujours convergentes; et ces formules expriment la solution générale du problème.

C'est sous cette forme que l'a obtenue M. Vergne dans sa Thèse (p. 45 et 49), après avoir reconnu que l'équation indéfinie (2) (p. 15) indiquait le développement (5) par la formule de Mac-Laurin.

Déjà Poisson, plusieurs années avant de faire son Mémoire sur les ondes, avait eu l'occasion de voir que l'intégrale générale de l'équation binôme (2) se composait de deux parties, comportant, chacune, une fonction arbitraire, et que l'une de ces parties avait précisément le développement (5) par la série de Mac-Laurin. Mais, lors de la rédaction de son Mémoire sur les ondes, et quoique il y ait remarqué l'équation (2) dans le cas d'une profondeur infinie, il ne paraît pas avoir songé à en faire usage. Cela aurait cependant bien abrégé sa démonstration de deux formules fondamentales du n° 34 de son Mémoire, qui, ensemble, reviennent aux nôtres (5) et (7) ci-dessus. Il n'en a,

du reste, pas dégagé explicitement l'intégrale du problème, sous sa forme définitive et complète (15), due à M. Vergne, s'étant contenté de trouver, au n° 38 de son Mémoire, les expressions en série de φ et de h à la surface libre $z = 0$.

10. Les valeurs les plus importantes des fonctions P sont justement, à part leur maximum 1 atteint pour $\theta = 0$, celles qu'elles prennent à la surface libre, c'est-à-dire à la limite $\theta = \frac{\pi}{2}$. Tandis que, dans le cas des mouvements à deux coordonnées x, z auquel répondent les formules (9) et (10), les facteurs $\cos(n+1)\theta$ s'interprètent immédiatement soit à la limite $\theta = 0$, qui leur fait, pareillement, atteindre leur maximum 1, soit à l'autre limite $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui leur donne la suite des valeurs 0, -1, 0, +1, ..., les valeurs numériques correspondantes des facteurs analogues P_1, P_2, \dots du cas des trois coordonnées x, y, z , dans les formules (15) et (16), ne résultent pas simplement de l'expression générale (12) de P_n . Mais on les déduit facilement et directement de (7).

C'est ce qu'on a déjà vu, au commencement du n° 9, pour leur valeur commune 1 à la limite $\theta = 0$. Et quant à l'autre limite $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $z = 0$, il suffit de supposer z très petit dans la fonction $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire dans l'expression

$$\frac{1}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{z^4}{R^4} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{z^6}{R^6} + \dots \right. \\ \left. \mp \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2p-1}{2p} \frac{z^{2p}}{R^{2p}} \pm \dots \right),$$

pour voir que sa dérivée $n^{\text{ième}}$, nulle à la limite $z = 0$ si n est impair, devient, à cette même limite, quand n prend la valeur paire $2p$, $(-1)^p \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2p-1}{2p} \frac{(2p)(2p-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{r^{2p+1}}$. En identifiant cette expression, changée de signe, au second membre de (12 bis), qui représente,

en général, $-\frac{d^n \frac{1}{r}}{dz^n}$ et qui est $(-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{r^{n+1}} P_n$ pour toutes les

valeurs positives de n , mais seulement $-\frac{1.2.3\dots n}{r^{n+1}}P_n$ pour les valeurs paires, il vient, à la limite $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $z = 0$,

$$P_{2p-1} = 0, \quad P_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2p-1}{2p}.$$

Ces valeurs de P_n portées, par exemple, dans (16), donnent, pour les dénivellations h de la superficie, d'abord,

$$h = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dm}{r^2} \left[-P_2 \frac{t^2}{r} - \frac{P_4}{5.6} \left(\frac{t^2}{r}\right)^3 - \dots - \frac{P_{2p+2}}{(2p+3)(2p+4)\dots(4p+2)} \left(\frac{t^2}{r}\right)^{2p+1} - \dots \right],$$

puis, en remplaçant P_2, P_4, \dots par leurs expressions numériques, observant que le dénominateur du terme général contient alors le produit

$$\begin{aligned} 2.4.6\dots(4p+2) &= 2^{2p+1}[1.2.3\dots(2p+1)] \\ &= 2^{2p+1}(2.4.6\dots 2p)[1.3.5\dots(2p+1)] \end{aligned}$$

et supprimant enfin haut et bas les facteurs impairs communs,

$$(17) \quad h = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dm}{r^2} \left[\frac{t^2}{2r} - \frac{1}{2.5} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^3 + \dots \pm \frac{1}{(2.4\dots 2p)(2p+3)(2p+5)\dots(4p+1)} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^{2p+1} \mp \dots \right],$$

formule obtenue par Poisson au n° 38 de son Mémoire.

III. — Propagation verticale du mouvement aux grandes profondeurs, dans ces cas d'un canal ou d'un bassin horizontalement indéfinis.

11. La méthode que j'ai suivie, vers 1880, pour traiter la question des ondes par émergence (1) et qui consiste à diviser la difficulté, en faisant intervenir successivement diverses équations aux dérivées par-

(1) Voir, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, fasc. II, p. 496* à 515*.

tielles du problème (dont l'une est du quatrième ordre), conduit à mettre le potentiel φ , dans les deux cas du problème plan (à coordonnées x, z) et du problème à trois coordonnées x, y, z , sous une forme commune

$$(18) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \left[f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, z\right) \text{ ou } f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

où $\psi(\gamma)$ désigne la fonction particulière, évaluable de diverses manières,

$$(19) \quad \psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2) d\mu, \quad \text{donnant} \quad \psi'(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos(\gamma - \mu^2) d\mu,$$

et où f , fonction paire de sa première variable, se trouve définie par l'une des deux formules

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{T}, x, z) = \mathbf{F}(x + \mathbf{T}, z) + \mathbf{F}(x - \mathbf{T}, z), \\ f(\mathbf{T}, x, y, z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\mathbf{T}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{T} \cos \mu d\mu \\ \quad \times \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(x + \mathbf{T} \cos \mu \cos \theta, y + \mathbf{T} \cos \mu \sin \theta, z) d\theta, \end{array} \right.$$

de manière à donner soit

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{T}^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 f}{d\mathbf{T}^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2}.$$

Enfin, la fonction $\mathbf{F}(x, z)$ ou $\mathbf{F}(x, y, z)$, dont dépend l'expression de f , désigne la dénivellation initiale h_0 , que représentent ici, d'après (6) et (7) (p. 20), les deux intégrales définies

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(x, z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{z dm}{z^2 + (x - \xi)^2}, \\ \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{z dm}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right.$$

On peut voir, à l'endroit cité de mon *Cours d'Analyse infinitésimale*, et aussi dans un Mémoire du Tome XIII (4^e série; 1885) de la *Société*

des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille (1), que cette méthode facilite notablement l'étude des ondes visibles, c'est-à-dire des phénomènes produits à la surface $z=0$ (2). Mais elle paraît moins avantageuse pour le calcul des phénomènes intérieurs. Je vais montrer néanmoins qu'elle fait, assez simplement, connaître les circonstances produites, *sous la région d'émergence*, aux grandes profondeurs z , c'est-à-dire aux distances z de la surface très grandes par rapport aux dimensions de cette région, circonstances qu'avaient étudiées déjà Poisson aux paragraphes IV et VII de son Mémoire de 1815.

12. A ces grandes profondeurs z , le volume d'émergence est évidemment assimilable à un simple élément dm , dont la verticale sera prise comme axe des z ; en sorte que, dans (21), $F(x, z)$ et $F(x, y, z)$ deviendront

$$\frac{z dm}{\pi(z^2 + x^2)} \quad \text{et} \quad \frac{z dm}{2\pi(z^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les valeurs (20) de la fonction f , où x et y pourront d'ailleurs être annulés puisqu'on se meut uniquement, ici, le long de l'axe des z , deviendront respectivement, la première,

$$(22) \quad f(T, 0, z) = \frac{2z dm}{\pi(z^2 + T^2)},$$

et, la seconde,

$$f(T, 0, 0, z) = \frac{z dm}{\pi} \frac{d}{dT} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T \cos \mu \, d\mu}{(z^2 + T^2 \cos^2 \mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Après avoir remplacé, sous le signe f , $T^2 \cos^2 \mu$ par $T^2 - T^2 \sin^2 \mu$, prenons comme variable d'intégration le produit $T \sin \mu = \lambda$ (d'où $T \cos \mu \, d\mu = d\lambda$); et il viendra successivement, par l'effectuation de

(1) *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse*, p. 578 à 651.

(2) Voir notamment les pages 634 à 639 de ce Mémoire, où sont étudiées les ondes près du lieu d'émergence.

l'intégration indéfinie,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}, 0, 0, z) &= \frac{z \, dm}{\pi} \frac{d}{d\mathbf{T}} \int_0^{\mathbf{T}} (z^2 + \mathbf{T}^2 - \lambda^2)^{-\frac{3}{2}} d\lambda \\ &= \frac{z \, dm}{\pi} \frac{d}{d\mathbf{T}} \left[\frac{\lambda (z^2 + \mathbf{T}^2 - \lambda^2)^{-\frac{1}{2}}}{z^2 + \mathbf{T}^2} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\mathbf{T}} = \frac{dm}{\pi} \frac{d}{d\mathbf{T}} \frac{\mathbf{T}}{z^2 + \mathbf{T}^2}. \end{aligned}$$

On a donc, en définitive,

$$(23) \quad f(\mathbf{T}, 0, 0, z) = \frac{dm}{\pi} \frac{z^2 - \mathbf{T}^2}{(z^2 + \mathbf{T}^2)^2}.$$

Et les deux formules (22), (23), où il reste à remplacer \mathbf{T} par $\frac{\alpha^2}{2}$, réduisent les deux expressions (18) du potentiel φ à celles-ci :

$$(24) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2} \, dm}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{2z}{z^2 + \frac{\alpha^4}{4}}, \frac{z^2 - \frac{\alpha^4}{4}}{\left(z^2 + \frac{\alpha^4}{4}\right)^2} \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) dz.$$

13. Cherchons, par exemple, la dénivellation h , dérivée de φ en t . Une règle de différentiation exposée aux endroits cités donnera immédiatement, en appelant β le quotient de t par α ,

$$(25) \quad h = \frac{2\sqrt{2} \, dm}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{2z}{z^2 + \frac{t^4}{4\beta^4}}, \frac{z^2 - \frac{t^4}{4\beta^4}}{\left(z^2 + \frac{t^4}{4\beta^4}\right)^2} \right] \psi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta.$$

Posons, pour abrégé, avec M. Rousier dans sa Thèse de doctorat,

$$(26) \quad \frac{2z}{t^2} = \gamma;$$

puis, multipliant *haut et bas*, respectivement, les deux fractions entre crochets, par $\frac{4\beta^4}{t^4}$ et par son carré, c'est-à-dire par $\frac{\gamma^2\beta^4}{z^2}$ et par son carré, nous aurons

$$h = \frac{2\sqrt{2} \, dm}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{2\gamma^2\beta^4}{z(\gamma^2\beta^4 + 1)}, \frac{\gamma^2\beta^4(\gamma^2\beta^4 - 1)}{z^2(\gamma^2\beta^4 + 1)^2} \right] \psi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta.$$

Remplaçons

$$\frac{\gamma^2\beta^4}{\gamma^2\beta^4 + 1} \quad \text{par} \quad 1 - \frac{1}{1 + \gamma^2\beta^4}$$

et

$$\frac{\gamma^2 \beta^2 (\gamma^2 \beta^2 - 1)}{(\gamma^2 \beta^2 + 1)^2} \quad \text{par} \quad 1 - \frac{3}{1 + \gamma^2 \beta^2} + \frac{2}{(1 + \gamma^2 \beta^2)^2};$$

de plus, rappelons-nous que, parmi les propriétés de la fonction ψ signalées aux endroits cités, se trouve celle-ci,

$$\int_0^\infty \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Nous aurons enfin, pour les deux formules respectives de h ,

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{dm}{\pi^2} \left[1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta}{1 + \gamma^2 \beta^4} \right], \\ h = \frac{dm}{2\pi^2} \left[1 - \frac{12\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta}{1 + \gamma^2 \beta^4} + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta}{(1 + \gamma^2 \beta^4)^2} \right]. \end{array} \right.$$

Le calcul de h est ainsi ramené à celui de deux intégrales qui rentrent dans le type général

$$(28) \quad I_n = \int_0^\infty \frac{\psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta}{(1 + \gamma^2 \beta^4)^n}.$$

14. D'après la seconde (19) (p. 29), cette formule revient à poser

$$I_n = \int_0^\infty \frac{d\beta}{(1 + \gamma^2 \beta^4)^n} \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos \left(\frac{\beta^2}{2} - \mu^2 \right) d\mu,$$

ou bien, en écrivant $\beta = \sqrt{2}\nu$ et $d\beta = \sqrt{2}d\nu$,

$$(29) \quad I_n = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{d\nu}{(1 + 4\gamma^2 \nu^4)^n} \int_0^\nu \cos(\nu^2 - \mu^2) d\mu.$$

Remplaçons μ et ν , assimilées aux deux coordonnées rectangulaires d'un plan, par les deux coordonnées polaires ρ et ω qu'indiquent les formules de transformation

$$\nu = \rho \cos \omega, \quad \mu = \rho \sin \omega.$$

L'élément $d\nu d\mu$ du champ devient $\rho d\omega d\rho$; et le champ lui-même,

constitué par l'espace compris, dans l'angle des coordonnées positives ν , μ , entre l'axe des abscisses ν et la bissectrice $\mu = \nu$ de cet angle, se trouvera limité, de $\rho = 0$ à $\rho = \infty$, entre les deux angles polaires $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{4}$. Il viendra donc

$$I_n = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^\infty \frac{\cos(\rho^2 \cos 2\omega) \cdot \rho d\rho}{(1 + 4\gamma^2 \rho^2 \cos^2 \omega)^n}.$$

Adoptons, au lieu de la variable d'intégration ρ , le produit

$$\alpha = (2\gamma \cos^2 \omega) \rho^2; \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = \frac{\alpha}{2\gamma \cos^2 \omega}, \quad \rho d\rho = \frac{d\alpha}{4\gamma \cos^2 \omega};$$

et posons, pour abrégier,

$$(30) \quad X = \frac{\cos 2\omega}{2\gamma \cos^2 \omega} = \frac{1}{2\gamma} (1 - \tan^2 \omega).$$

L'expression de I_n sera enfin

$$(31) \quad I_n = \frac{1}{2\gamma \sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \int_0^\infty \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{(1 + \alpha^2)^n}.$$

Or la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{(1 + \alpha^2)^n}$, où le paramètre X est essentiellement positif entre les limites 0 , $\frac{\pi}{4}$, de ω , se déduit, par $n - 1$ différentiations en X , de la formule de Laplace, bien connue ⁽¹⁾,

$$(32) \quad \int_0^\infty \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2} e^{-X},$$

après qu'on l'a multipliée *haut et bas*, sous le signe \int , par X^2 , et écrite alors (grâce à la notation $X\alpha = u$) sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\cos u du}{X^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} e^{-X} X^{-1}.$$

Une première différentiation en X , qui nous suffira ici, donne, en

⁽¹⁾ Voir, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, fasc. II, p. 263*.

divisant finalement par $-2X$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u \, du}{(X^2 + u^2)^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-X}}{2X} (-X^{-2} - X^{-1}).$$

Et il en résulte, par la substitution inverse de $X\alpha$ à u , avec multiplication des deux membres par X^3 ,

$$(33) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(X\alpha) \, d\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} = \frac{\pi}{2} e^{-X} \frac{1 + X}{2}.$$

Donc, pour $n = 1$ et pour $n = 2$, les formules (31), (32), (33) et (30) donnent, si l'on pose finalement $\text{tang } \omega = \psi$,

$$(34) \quad I_1 = \frac{\pi}{4\gamma\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-\frac{1-\psi^2}{2\gamma}} d\psi, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{\pi}{16\gamma^2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-\frac{1-\psi^2}{2\gamma}} (1 - \psi^2) d\psi.$$

Et les deux expressions (27) à évaluer de h (p. 32) deviennent enfin, après quelques réductions évidentes,

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{dm}{\pi z} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 e^{-\frac{1-\psi^2}{2\gamma}} d\psi \right), \\ h = \frac{dm}{2\pi z^2} \left[1 - \frac{2}{\gamma} \int_0^1 e^{-\frac{1-\psi^2}{2\gamma}} d\psi + \frac{1}{2\gamma^2} \int_0^1 e^{-\frac{1-\psi^2}{2\gamma}} (1 - \psi^2) d\psi \right]. \end{array} \right.$$

15. Les intégrations en ψ y subsistant peuvent s'effectuer en série de deux manières, suivant que l'on veut avoir le développement de Mac-Laurin de h et retrouver ainsi les formules (10), (16) (p. 22 et 26), spécifiées pour $\theta = 0$, ou suivant qu'on a en vue les séries les plus avantageuses pour le calcul de h .

Dans le premier cas, on développe l'exponentielle $e^{-\frac{1-\psi^2}{2\gamma}}$ suivant les puissances de $\frac{1-\psi^2}{2\gamma}$; et l'on est conduit à évaluer les intégrales de la forme

$$(36) \quad J_p = \int_0^1 (1 - \psi^2)^p d\psi,$$

où p prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ... Comme $J_0 = 1$, et

qu'on a évidemment, grâce à une intégration finale par parties,

$$J_p - J_{p-1} = - \int_0^1 \psi^2 (1 - \psi^2)^{p-1} d\psi = \frac{1}{2p} \int_{\psi=0}^{\psi=1} \psi d(1 - \psi^2)^p = - \frac{1}{2p} J_p;$$

d'où résulte la formule de récurrence

$$J_p = \frac{2p}{2p+1} J_{p-1};$$

il vient successivement

$$J_1 = \frac{2}{3}, \quad J_2 = \frac{2}{3} \frac{4}{5}, \quad \dots, \quad J_p = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{2p}{2p+1}.$$

On en déduit très vite, pour les deux formules (35),

$$h = \frac{dm}{\pi z} \left(1 - \frac{1}{1} \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1.3} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1.3.5} \frac{1}{\gamma^3} + \dots \right),$$

$$h = \frac{dm}{2\pi z^2} \left(1 - \frac{2}{1} \frac{1}{\gamma} + \frac{3}{1.3} \frac{1}{\gamma^2} - \dots \pm \frac{n+1}{1.3.5\dots(2n-1)} \frac{1}{\gamma^n} \mp \dots \right).$$

Comme l'inverse de γ désigne ici, d'après (26), $\frac{t^2}{2r}$, la première de ces formules équivaut bien à (10). Quant à la seconde, en y remplaçant l'inverse de γ par $\frac{1}{2} \frac{t^2}{r}$, le terme général de la série devient aisément

$$\pm \frac{1.2.3\dots(n+1)}{1.2.3\dots(2n)} \left(\frac{t^2}{r} \right)^n, \quad \text{ou bien} \quad \pm \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(2n)} \left(\frac{t^2}{r} \right)^n;$$

et cette formule est alors identique à (16) (p. 26), où les fonctions P valent ici 1.

16. Mais il est préférable de faire sortir des signes f , dans (35), le facteur $e^{-\frac{1}{2\gamma}}$ et de développer alors, suivant les puissances de $\frac{\psi^2}{2\gamma}$, l'exponentielle $e^{\frac{\psi^2}{2\gamma}}$ restée sous le signe f , ou son produit par $1 - \psi^2$. L'intégration terme à terme se fait immédiatement; et, en posant, avec Poisson,

$$(37) \quad \frac{t^2}{4z} = q \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\gamma} = q,$$

il vient

$$(38) \left\{ \begin{aligned} h &= \frac{dm}{\pi z} \left[1 - 2e^{-q} \left(q + \frac{q^2}{1.3} + \frac{q^3}{1.2.5} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q^n}{1.2.3\dots(n-1)(2n-1)} + \dots \right) \right], \\ h &= \frac{dm}{2\pi z^2} \left[1 - 4e^{-q} \left(q + \frac{q^3}{1.2.3.5} + \frac{q^4}{1.3.5.7} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q^n}{1.2.3\dots(n-3)(n-1)(2n-3)(2n-1)} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

La vitesse descendante $\frac{dh}{dt}$ des molécules étant $\frac{dh}{dq} \frac{dq}{dt}$, c'est-à-dire $\frac{dh}{dq} \frac{t}{z}$, la différentiation des expressions précédentes donne respectivement

$$(39) \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{t dm}{\pi z^2} e^{-q} \left(-1 + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{1.2.3.5} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^n}{1.2.3\dots n(2n-1)(2n+1)} + \dots \right), \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{t dm}{\pi z^3} e^{-q} \left(-1 + q - \frac{q^2}{2.5} - \frac{q^3}{2.3.5.7} - \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{3q^n}{(2.3.4\dots n)(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Ces formules avaient été obtenues tout autrement par Poisson aux nos 27 et 51 de son Mémoire de 1815; et il en avait déduit que, sur la verticale du lieu d'émersion, le mouvement, d'abord ascendant, ne s'annule, pour devenir ensuite descendant, qu'une seule fois dans le cas des ondes cylindriques d'un canal, tandis que, dans celui d'ondes propagées en longueur et en largeur, il redevient une fois encore ascendant avant de s'éteindre. Et, en effet, la parenthèse des seconds membres de (39), négative pour $q=0$, mais sans cesse croissante dans la première formule, y devient définitivement positive dès qu'elle s'est annulée (1), tandis que, dans la seconde formule, elle a sa déri-

(1) M. Rousier, dans sa Thèse de Doctorat, a étudié assez complètement ce phénomène, pour lequel il a suivi la méthode ci-dessus, dont je lui avais communiqué l'idée (p. 26 à 28), et où il s'est servi aussi de la formule (10) (p. 42 et 43). Il a donné encore, en y employant la même formule (10), quelques détails sur la propagation du mouvement, toujours dans le même cas d'un canal ou de deux coordonnées x, z , le long d'une droite inclinée à 45° sous l'horizon, ou pour laquelle on aurait $\theta = \frac{\pi}{7}$.

vée première en q d'abord positive, mais sans cesse décroissante; en sorte que cette parenthèse redevient elle-même définitivement négative après s'être annulée deux fois. Le mouvement n'y est donc descendant que dans l'intervalle des deux racines (trouvées, par Poisson, voisines de 1, 137 et de 5, 72) (1).

IV. — Manière de traiter, au moins dans certains cas, le même problème des ondes pour des bassins horizontalement limités : non-extinction du mouvement par le bas.

17. Quand le canal, au lieu d'être indéfini dans les deux sens des x tant négatifs que positifs, a sa section $x = 0$ occupée par une paroi verticale, s'étendant depuis la surface libre jusqu'aux plus grandes profondeurs, et n'est ainsi indéfini que du côté des x positifs, ou quand on barre de même, du côté, par exemple, des x négatifs, un bassin indéfini, par une paroi verticale occupant le plan $x = 0$, il suffit d'imaginer le canal ou le bassin prolongés de nouveau, indéfiniment, du côté des x négatifs où ils n'existent plus, mais avec une région et un volume d'émersion qui y seraient exactement symétriques de la région et du volume d'émersion réels par rapport au plan de la paroi, pour que cette symétrie supposée des circonstances du mouvement maintienne, à toute époque t , dans le plan $x = 0$, même en l'absence de la paroi, le fluide que celle-ci oblige effectivement à glisser sur sa surface, et pour qu'elle assure ainsi la vérification par ce fluide, dans le cas où la paroi n'existerait pas, de la condition, que son existence entraîne, d'annulation de la composante normale de la vitesse. Donc le problème pourra se traiter comme dans les cas précédents où le canal était sans extrémités et, le bassin, horizontalement indéfini en tous sens, mais avec surface et volume totaux d'émersion comprenant, outre les surface et volume d'émersion *vrais*, leur *image* vue à travers le plan de la paroi comme *miroir*. Et la *réflexion* du mouvement par la paroi se trouvera ainsi remplacée par la propagation directe *effective*, dans le canal ou bassin réels, des mouvements *censés issus de l'image*, qui se superposeront aux mouvements directs analogues émanés de la vraie région d'émersion et non encore sortis du canal ou du bassin *effectifs*.

(1) Les parties précédentes de ce Mémoire viennent d'être résumées dans trois Notes insérées aux *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences (t. CL, p. 491, 577 et 655).

18. Le même raisonnement ramène encore le problème au cas d'un bassin indéfini, avec surface et volume d'émersion *quadruples* des vrais, si l'on introduit dans le bassin une seconde paroi verticale perpendiculaire à la première, nouvelle paroi dont le plan, assimilé toujours à un miroir, donnera, en arrière d'elle et de son prolongement au delà de son angle avec la paroi précédente, encore une image tant du bassin effectif que de son image à travers cette première paroi. Car les deux nouvelles images ainsi introduites se trouveront symétriques *aussi* par rapport à celle-ci; de sorte que le phénomène, dans le bassin indéfini, comportera deux plans verticaux rectangulaires de symétrie, susceptibles dès lors de limiter le fluide à la manière de vraies parois.

Et si la seconde paroi, au lieu d'être perpendiculaire à la première, fait avec elle un angle égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de quatre droits, mais que, de plus, le volume d'émersion soit symétrique par rapport au plan bissecteur de cet angle, il est clair que n volumes pareils d'émersion, dont l'un sera le vrai, régulièrement disposés, dans le bassin indéfini, tout autour de l'arête verticale suivant laquelle se joignent les deux parois, amèneront, par raison de symétrie, de part et d'autre du plan de chacune de celles-ci, l'annulation en tous leurs points de la composante normale de la vitesse, comme si ces deux plans limitaient effectivement la masse fluide et la réduisaient à ce que contient leur angle dièdre.

19. Mais qu'arrivera-t-il si n devient infini, ou si les deux parois verticales sont parallèles, qu'elles se trouvent, par exemple, construites suivant deux sections normales, $x = 0$, $x = a$, d'un canal à une distance donnée a l'une de l'autre, la région cylindrique d'émersion étant d'ailleurs quelconque entre elles. Concevons alors qu'on prenne successivement, dans le plan longitudinal des xz , un grand nombre $2k$ d'images de l'aire effective d'émersion, savoir, les deux premières, symétriques de cette aire effective d'émersion par rapport aux deux parois, puis, les deux suivantes, symétriques de ces deux premières, chacune, relativement à la paroi par rapport à laquelle son image n'a pas encore été formée; et ainsi de suite, jusqu'à deux dernières, constituant le $k^{\text{ième}}$ couple d'images, restées sans symétriques, chacune, par rapport à une des deux parois, mais qui se trouveront évidemment très distantes du bassin donné (compris entre ces deux plans $x = 0$, $x = a$).

Si l'on supprime alors les parois, en rendant le canal indéfini des deux côtés des x tant négatifs que positifs, et si l'on adopte comme aire totale d'émersion l'ensemble de l'aire vraie et de ses $2k$ images, le défaut de symétrie des causes du phénomène, de part et d'autre de chaque plan de paroi en particulier, ne tiendra qu'à l'existence de celle d'entre ces deux images *éloignées* qui manquera de symétrie par rapport au plan en question, mais dont il est clair que l'influence dans l'intervalle des deux plans devient insensible, en raison de cet éloignement même, à mesure qu'on prend k de plus en plus grand. Donc, ce qui se passera au sein du fluide indéfini, entre les deux abscisses $x = 0$, $x = a$, différera aussi peu qu'on voudra des phénomènes qu'y offrirait le canal limité, pourvu qu'on fasse croître suffisamment k . Et il est inévitable, par raison de continuité, que les solutions précédentes, soit en série [formules (5) et (6), ou même (9) et (10)], soit sous forme d'intégrale définie (n° 11, p. 29 et 30), subsistent à la limite $k = \infty$, de manière à embrasser ainsi le cas d'un canal de longueur finie.

20. Effectivement, cherchons ce que devient alors l'expression (6) de la dénivellation initiale h_0 (p. 20), savoir

$$(40) \quad h_0 = \frac{1}{\pi} \int \frac{z \, dm}{r^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\xi) \, d\xi}{z^2 + (\xi - x)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(x + R) \, dR}{z^2 + R^2},$$

où $f(x + R)$ est maintenant une fonction périodique, de période $2a$, et à valeur moyenne nulle (comme on a vu à la fin du n° 2, p. 12).

Reconnaissons d'abord que cette intégrale reste finie et déterminée, malgré son champ d'intégration devenu infini, et sans même qu'on ait besoin d'annuler la valeur moyenne de $f(\xi)$, que nous appellerons plus généralement M . En effet, dans les éléments de l'intégrale qui correspondent aux grandes distances $r = \sqrt{z^2 + (\xi - x)^2}$, comme sont notamment tous ceux où $\pm R$ est très grand, le facteur $\frac{z}{r^2}$ ou $\frac{z}{z^2 + R^2}$, peut, avec une erreur relative négligeable, être censé constant sur toute l'étendue d'une période $2a$; ce qui permet d'y remplacer, sous le signe \int , $f(x + R)$ par sa valeur moyenne M . Ces éléments deviennent donc $M d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{R}{z}$, différentielle de signe invariable quand R croît de $-\infty$ à ∞ . Or ses valeurs ont en tout la somme πM .

Ainsi l'expression (40) de h_0 , même dans l'hypothèse de M différent

de zéro, ou en ajoutant les valeurs absolues de ses éléments, reste finie et déterminée, malgré une valeur alors infinie de l'aire d'émersion. Seulement la dénivellation initiale h_0 ne s'évanouirait pas aux grandes profondeurs z , comme elle doit le faire, si la moyenne M n'était pas nulle. Car, aux points (x, z) très profonds, les distances r sont constamment assez grandes pour permettre de remplacer, dans tout le champ d'intégration, $f(x + R)$ par sa moyenne M ; et la formule (40) y devient, à une première approximation, $h_0 = M$. L'évanouissement asymptotique de h_0 pour z infini est donc assuré dès que $M = 0$.

21. Dans le cas analogue d'un bassin indéfini en tous sens, avec volume d'émersion s'étendant sur tout le plan des xy et composé de parties *limitées* dont toutes auraient la même ordonnée moyenne M , cas où la formule (7) (p. 20) donne

$$(41) \quad h_0 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{z \, dm}{r^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{z f(x + R \cos \omega, y + R \sin \omega) R \, dR}{r^3},$$

on pourra de même, aux grandes distances $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ du point (x, y, z) pour lequel on évalue h_0 , regarder le facteur $\frac{z}{r^3}$ comme constant sur l'étendue de toute partie limitée du plan des xy où la valeur moyenne de $f(\xi, \eta)$, ou de $f(x + R \cos \omega, y + R \sin \omega)$, sera ainsi M . Alors, hors d'une première circonférence $2\pi R_0$, décrite dans ce plan autour de son point (x, y) et sur laquelle r aura déjà une assez grande valeur $r_0 = \sqrt{z^2 + R_0^2}$, la somme des éléments de l'intégrale s'évaluera encore, très sensiblement, en remplaçant par M le facteur $f(\xi, \eta)$; ce qui, vu finalement la relation $R \, dR = r \, dr$ (qui résulte de $z^2 + R^2 = r^2$), donne en tout la valeur approchée, finie,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{R_0}^\infty \frac{z M R \, dR}{r^3} = z M \int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{z M}{r_0}.$$

Donc l'intégrale totale reste encore finie et déterminée, malgré les étendues, devenues infinies, tant de son champ que du volume d'émersion.

Et elle satisfera toujours à la condition exigée de s'évanouir aux grandes profondeurs z , pourvu que M se réduise à la valeur zéro.

En effet, r_0 y est, alors, déjà très grand, égal à z même, quand on y

prend $R_0 = 0$; et l'expression complète (41) de h_0 devient ainsi, avec erreur absolue infiniment petite pour z infini,

$$h_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{zMR dR}{r^3} = zM \int_z^\infty \frac{dr}{r^2} = M,$$

de manière à faire évanouir asymptotiquement h_0 si M s'annule.

22. La formule (41) s'appliquera donc, en particulier, à un volume d'émersion périodique, composé, par exemple, de parties à bases ou rectangulaires, ou triangulaires équilatérales, ou hexagonales régulières, égales et *pavant* tout le plan des xy , avec symétrie de deux parties contiguës quelconques par rapport à leur plan vertical de jonction. Cette symétrie par rapport à certains plans se réalisera dès lors aussi pour h_0 et annulera évidemment la dérivée de h_0 suivant leur normale; ce qui permettra de transformer, si l'on veut, ces plans, en tout autant de parois verticales.

On aura ainsi exprimé les dénivellations initiales h_0 pour des bassins de profondeur infinie, mais complètement limités suivant tous les sens horizontaux. Car, d'après ce qu'on a vu aux n^{os} 3 et 4 (p. 13 et 17), le calcul séparé ou préalable de h_0 se ferait alors en intégrant l'équation indéfinie $\Delta_2 h_0 = 0$, de manière que $h_0 = f(x, y)$ pour $z = 0$ et sous les deux conditions, analogues entre elles, $\frac{dh_0}{dn} = 0$ aux parois verticales, $\frac{dh_0}{dz} = 0$ à la paroi inférieure (horizontale par exemple) $z = \infty$, c'est-à-dire sur le fond, où est d'ailleurs censé régner ici le calme. Et le volume d'émersion pourra encore, dans certains cas, notamment dans celui d'un bassin rectangulaire, y être quelconque, c'est-à-dire dépourvu de tout plan de symétrie.

23. Une fois la dénivellation initiale h_0 déterminée, par les relations (40) ou (41), soit pour un canal ou un bassin indéfinis, mais ayant leur surface supérieure composée de parties restreintes à ordonnée moyenne d'émersion nulle, soit pour un bassin limité par des parois verticales, la formule (5) de Mac-Laurin (p. 17) s'applique et en déduit encore les expressions (9) et (10), ou (15) et (16), de φ et de h . La raison de continuité invoquée à la fin du n^o 19 (p. 39) permet d'employer aussi, dans ces cas limites, ma solution constituée par les for-

mules (18), (19) et (20) (p. 29), où la fonction auxiliaire $F(x, y, z)$ n'est autre encore que la dénivellation initiale h_0 . Aux grandes profondeurs z , φ et h s'annuleront asymptotiquement comme h_0 , F et leurs dérivées, tant en vertu de (5), qu'en vertu de (20) et (18).

24. Mais une particularité propre au cas d'un bassin ou *limité*, ou indéfini et comprenant, par exemple, une infinité de concamérations périodiques, consistera en ce que *le mouvement ne s'y éteindra pas pour t infini*. D'une part, on conçoit que la durée des mouvements sensibles, aux endroits peu distants du centre d'une région d'émergence *très étendue*, croisse avec les dimensions de celle-ci; de manière à pouvoir devenir infinie quand ces dimensions le deviennent et quand, d'ailleurs, les parois, s'il y en a, sont censées *immobiles*, ou, l'atmosphère superposée, maintenue à une pression sinon nulle, du moins *invariable*. D'autre part, si le bassin est limité latéralement, l'énergie de mouvements produits par émergence et toujours insensibles aux grandes profondeurs, ne peut s'y dissiper vers le fond en quantité appréciable, *à travers les sections horizontales du bassin qui y sont de grandeur restreinte*.

Par suite, en raison de la non-participation des couches les plus profondes au mouvement, le fluide (censé parfait) contenu dans un tel bassin est assimilable à un système élastique, *fini* (en étendue), de points soumis à leurs actions mutuelles simples fonctions de leurs distances. Or, on sait que le petit mouvement le plus général d'un tel système se décompose en vibrations *pendulaires* et *synchrones*, c'est-à-dire produites simultanément (sans différence de phase ou sans propagation) dans toute l'étendue du système. Ces vibrations ou *oscillations* s'appellent des *clapotis*, quand il s'agit d'une masse liquide; et leur ensemble constitue une agitation *indéfiniment persistante*. On sait que, dans chaque clapotis simple, quand la profondeur est infinie comme ici, la coordonnée verticale z n'entre, dans les expressions du potentiel φ et des petits déplacements (comme la dénivellation h), que par un facteur exponentiel, de la forme e^{-az} , beaucoup plus rapidement évanouissant, pour z assez grand, que les facteurs, inverses de z ou de z^2 , figurant dans les expressions (38) de h (p. 36), relatives aux dénivellations qui se produisent sous un corps émergé d'un canal ou d'un bassin indéfinis.