P. BOUTROUX

Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 31 (1914), p. 99-159
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__99_0>

RECHERCHES

SUR

LES TRANSCENDANTES DE M. PAINLEVÉ

ET

L'ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

(*suite*),

PAR M. P. BOUTROUX.

QUATRIÈME PARTIE.

AUTRES FONCTIONS DU TYPE BIPÉRIODIQUE.

L'étude que nous venons de faire (¹) en partant de la fonction elliptique $p(X)$, nous pourrions facilement la recommencer en partant d'un autre type de fonction elliptique, par exemple d'une fonction à pôles simples telles que $\operatorname{sn} X$ ou de fonctions plus compliquées. Les méthodes à suivre, les résultats obtenus, différeraient peu de celles et de ceux que nous avons développés plus haut. Il n'y aurait donc qu'un médiocre intérêt à accroître en extension une théorie qui, pour l'instant, a surtout besoin de gagner en compréhension.

Je me borne à signaler les types d'équations (asymptotes aux équations des fonctions elliptiques) qu'une théorie complète devra étudier.

(¹) Les trois premières Parties de ce Mémoire ont paru dans le Tome XXX des *Annales de l'École Normale*. C'est aux pages de ce Tome que se réfèrent les renvois que nous aurons occasion de faire.

18. Fonctions asymptotes aux fonctions $\operatorname{sn}(X - X_0)$.

Considérons les fonctions $\operatorname{sn} X$ de module 1 qui vérifient l'équation différentielle

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 2Y^3 - 2Y. \tag{65}$$

En ajoutant au second membre de cette équation certaines fonctions R, rationnelles ou algébriques en X, rationnelles en Y, Y', qui tendent vers zéro avec $|X^{-1}|$, nous pouvons former des équations différentielles dont les intégrales seront « asymptotes (¹) » aux intégrales de l'équation (65) pour les grandes valeurs de $|X|$.

Il résultera de la cinquième Partie de notre travail qu'en effectuant au besoin une transformation homographique en Y, algébrique en X de la forme

$$Y_1 = Y + \varphi(X, Y), \qquad X_1 = X + \psi(X), \tag{66}$$

où les fonctions φ et ψ sont, par rapport à X, de degré négatif, nous pouvons toujours ramener les fonctions R qui répondent à la question à des polynomes en Y, Y'. Ces polynomes doivent être du troisième degré et sont de la forme

$$p_3 Y^3 + p_2 Y^2 + p_1 Y + p_0 + q_1 Y' + q_2 YY',$$

où $p_3, \ldots, q_2$ sont des fonctions rationnelles ou algébriques de X qui tendent vers zéro avec X^{-1}. D'ailleurs, nous pouvons toujours choisir la transformation (66) de manière que deux des fonctions p_3 et p_2 soient nulles ; nous aurons alors une équation de la forme

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 2Y^3 + 2Y + q_2 YY' + q_1 Y' + p_1 Y + p_0. \tag{67}$$

Les intégrales de cette équation sont asymptotes aux intégrales de l'équation (65). Plus précisément :

1° Les « branches d'intégrales » Y(X) suivies sur un ensemble de

(¹) *Voir* Introduction, p. 273, et 2ᵉ Partie, p. 295.

rayons convergeant vers l'infini sont *rationaloïdes* (¹) en tous leurs points. Elles présentent deux familles d'*infinis* isolés, β, au voisinage desquels elle sont développables sous la forme suivante :

$$
(68)\qquad \begin{aligned} Y = \frac{a}{X-\beta} + b_0 + b_1(X-\beta) + b_2(X-\beta)^2 \\ + [+\gamma\log(X-\beta)](X-\beta)^3 + \dots; \end{aligned}
$$

dans ce développement, le coefficient a est égal à 1 pour la première famille d'*infinis*, à -1 pour la seconde famille; b_0, b_1, b_2, γ sont des fonctions rationnelles de *degré négatif* en β; C est un paramètre arbitraire; les termes non écrits sont des puissances de $(X-\beta)$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de β et des polynomes en $[C+\gamma\log(X-\beta)]$.

Le développement (68) s'étudie comme le développement (23) du paragraphe 9. En général, γ étant différent de zéro, le point β est point transcendant directement critique pour les $Y(X)$; comme d'ailleurs γ tend vers zéro avec X^{-1}, les « branches » $Y(X)$ sont *semi-méromorphoïdes* (²) lorsque $|X|$ croît indéfiniment.

2° Soit X_0 un point de grand module où une intégrale $Y(X)$ prend une valeur donnée η (la dérivée Y' ayant une valeur η'). La branche de fonction inverse $X(Y)$, suivie à partir des conditions initiales Y, η sur un ensemble de rayons convergents quelconque, se rapproche arbitrairement d'une intégrale elliptique lorsque $|X_0|$ devient arbitrairement grand. Il ne peut en être autrement que pour la classe exceptionnelle des intégrales tronquées.

Les *périodes* en un point quelconque X_0 (où Y prend une valeur arbitraire η) se définissent comme il a été dit au paragraphe 7. Il y a avantage à considérer ces périodes aux infinis de la fonction et, plus précisément, aux *infinis de même famille* [pour lesquels le premier coefficient du développement (68) a une *même* valeur $+1$ ou -1] : en effet, les infinis d'une « branche d'intégrale » quelconque $Y(X)$ sont

---

(¹) *Voir* Introduction, p. 267. La non-existence de points d'indétermination pour les intégrales Y (X) résulte de l'étude asymptotique de ces fonctions ainsi que nous l'avons vu plus haut (2ᵉ Partie, § 7 et 8).

(²) *Voir* Introduction, p. 268.

toujours distincts; la *période aux infinis* ne peut donc s'annuler, à moins que l'on n'ait affaire à la branche d'intégrale pour laquelle le paramètre C du développement (68) est infini : or, cette branche se réduit à l'intégrale $Y = \infty$.

Considérant donc les infinis de première (ou de deuxième) famille d'une branche $Y(X)$, nous définirons comme au paragraphe 9 les *lignes d'infinis* de la branche. Nous démontrerons que les paramètres ..., C_n, C_{n+1}, ... d'une même branche aux infinis ..., $\overline{X}_n$, $\overline{X}_{n+1}$, ... qui sont de plus en plus éloignés sur une ligne d'infinis, *tendent vers une limite*.

Suivons, d'autre part, la branche $Y(X)$ sur un rayon quelconque, indéfiniment prolongé, qui ne passe par aucun *infini* de $Y(X)$. Sur ce rayon, le module $|Y'^2 - Y^3 + 2Y|$ est borné (*cf.* § 10); l'expression elle-même peut être indéterminée si l'on s'éloigne dans une direction autre que celle d'une ligne périodique.

L'équation (67) qui fait pendant à l'équation (26) du paragraphe 8, p. 312, est l'équation

$$Y'' = 2Y^3 - 2Y - 6p\frac{Y'}{X} + 2p(1-4p)\frac{Y}{X^2} + \frac{a}{X^\lambda}, \tag{69}$$

où a et p sont des constantes et λ un exposant positif [1]. Posant $2p = \frac{\mu}{\mu+2}$, nous pouvons aussi l'écrire :

$$Y'' = 2Y^3 - 2Y - \frac{3\mu}{\mu+2}\frac{Y'}{X} + \frac{\mu(2-\mu)}{(\mu+2)^2}\frac{Y}{X^2} + \frac{a}{X^\lambda}. \tag{69 bis}$$

Faisant, d'autre part, le changement de variables

$$y = x^{\frac{\mu}{2}}Y, \qquad X = \frac{2}{\mu+2}x^{\frac{\mu+2}{2}}, \tag{70}$$

nous aurons

$$y'' = 2y^3 - 2x^\mu y + a\left(\frac{\mu+2}{2}\right)^{-\lambda} x^{\frac{3\mu-\lambda(\mu+2)}{2}}. \tag{71}$$

Les intégrales de cette équation sont en général singulières aux

(1) Si λ était nul, les intégrales de (69) seraient asymptotes aux intégrales de l'équation $Y'' = 2Y^3 - 2Y + a$.

points x où y est infini. Exceptionnellement, pour $\mu = 1$, $\lambda = 1$, elles sont partout méromorphes : ce sont alors *les fonctions de M. Painlevé vérifiant l'équation différentielle*

$$y'' = 2y^3 - 2xy + \frac{2}{3}a. \tag{C}$$

Ces fonctions [et les $Y^2(x)$ correspondantes] sont d'ordre 3, puisque les $Y(X)$ présentent une infinité de pôles dont la densité est celle des pôles d'une fonction elliptique et que $X = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$; les $Y^2(x)$ présentent un réseau de quadrilatères curvilignes (où Y prend deux fois toute valeur donnée) dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de leur distance à l'origine élevée à la puissance $-\frac{1}{3}$ (*cf.* § 8, p. 312).

La définition des *quadrilatères des périodes* se fera pour l'équation

$$Y'' = 2Y^3 - 2Y + \frac{a}{X} - \frac{Y'}{X} + \frac{1}{9}\frac{Y}{X^2}, \tag{C'}$$

correspondant à (C), comme pour l'équation (B') du paragraphe 8 (*voir* § 9); les $Y(X)$ ont deux *périodes commutables*.

Considérons, d'autre part, une équation (67) pour laquelle tous les infinis d'une famille, mais d'une famille seulement, sont des pôles. Telles sont, par exemple, les équations

$$Y'' = 2Y^3 + 6\frac{Y^2}{X}, \qquad Y'' = 2Y^3 + 3\frac{Y^2}{X}. \tag{72}$$

Les intégrales de ces équations ont deux périodes *non commutables* qui se comportent exactement comme les périodes des intégrales de l'équation (26) étudiée dans la deuxième Partie (*voir* fin du paragraphe 9, p. 317-318).

Pour éviter la confusion que l'existence de deux familles de pôles différentes risque d'introduire dans l'étude des $Y(X)$, il est commode de considérer en place des $Y(X)$ les fonctions $H = e^{\int Y dX}$ qui vérifient une équation différentielle du troisième ordre homogène en H et ses dérivées. Les familles de pôles deviennent pour les $H(X)$ une famille de pôles et une famille de zéros. Ainsi les intégrales des équations

$$HH''' = 3H'H'' + 6\frac{H'^2}{\lambda}, \qquad HH''' = 3H'H'' + \frac{3H'^2}{X} \tag{73}$$

qui correspondent à (72) sont, comme les intégrales de (B′), des fonctions partout holomorphes, sauf en leurs infinis.

Nous reviendrons tout à l'heure sur les équations du troisième ordre homogènes en H, ..., H‴.

19. Intégrales asymptotes à divers types de fonctions doublement périodiques.

Comme nous avons opéré avec les équations $Y'' = 6Y^2 - 6$, $Y'' = 2Y^3 - 2Y$, nous pourrons opérer avec toute équation du second ordre dont les intégrales sont des fonctions doublement périodiques.

Considérons, par exemple, l'équation

$$Y'' = \frac{Y'^2}{Y} + aY^3 + bY^2 + c + \frac{d}{Y}. \tag{74}$$

Moyennant une transformation homographique (66), les équations rationnelles en Y, Y′, algébriques en X, asymptotes à (74), se laisseront mettre sous la forme

$$\begin{aligned} YY'' = {} & (1+q_2)Y'^2 + (a+p_4)Y^4 + (b+p_3)Y^3 \\ & + (c+p_1)Y + (d+p_0) + p_2Y^2 + q_1Y' + r_1YY' + r_2Y^2Y', \end{aligned}$$

les p, q, r étant des fonctions rationnelles ou algébriques de X qui tendent vers zéro avec X^{-1}. Les points où $Y = 0$ ou $Y = \infty$ sont en général des points critiques transcendants pour les $Y(X)$. Ils cesseront d'être critiques dans certains cas exceptionnels qui ont été déterminés par M. Painlevé. Ainsi l'équation

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \tag{D}$$

définit une classe de fonctions nouvelles, qui n'ont d'autres points critiques que l'origine et l'infini. Ces fonctions sont, d'après ce qui vient d'être dit, asymptotes aux fonctions elliptiques intégrales de

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.$$

Considérons encore l'équation

$$(75)\qquad Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + aY^3 + bY^2 + cY + \frac{d}{Y}.$$

L'équation rationnelle en Y, Y', algébrique en X, dont les intégrales sont asymptotes aux intégrales de (75) se mettra sous la forme

$$(76)\qquad \begin{aligned} YY'' = {} & (2^{-1} + q_2)Y'^2 + (a + p_4)Y^4 + (b + p_3)Y^3 + (c + p_2)Y^2 \\ & + (d + p_0) + p_1 Y + q_1 Y' + r_1 YY' + r_2 Y^2 Y'. \end{aligned}$$

Les cas où cette équation a ses points critiques fixes ont été déterminés par M. Gambier. Il en est ainsi, en particulier, pour l'équation

$$Y'' + \left[\frac{Y'}{X} - \frac{Y}{8X^2} + \alpha\frac{Y}{X} - \frac{\beta}{4X^2Y}\right] = \frac{Y'^2}{2Y} + \frac{3}{2}Y^3 + 4Y^2 + 2Y,$$

qui définit une classe de transcendantes nouvelles. Le changement de variables

$$y = xY, \qquad X = \frac{1}{2}x^2$$

transforme cette équation en l'équation

$$(\mathrm{E})\qquad y'' = \frac{y'^2}{2y} - \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},$$

dont les intégrales sont méromorphes. Ce sont [ainsi que les $Y(x)$ correspondantes] des *fonctions d'ordre* 4.

On raisonnera de même en partant des autres équations

$$Y'' = L(Y)Y'^2 + M(Y)Y' + N(Y),$$

rationnelles en Y, qui ont pour intégrales des fonctions doublement périodiques.

20. Fonctions du type bipériodique définies par des équations du troisième ordre.

La méthode que nous avons suivie pour étudier les équations du second ordre dont les intégrales sont asymptotes à des familles de fonctions doublement périodiques, se laissera facilement étendre au cas des équations du troisième ordre.

Partons d'une équation rationnelle du troisième ordre, du premier degré en Y''', dont les intégrales sont des fonctions doublement périodiques. On aura une telle équation en partant de la relation

$$Y'^2 = AP + BQ, \tag{77}$$

où P et Q sont polynomes du quatrième degré en Y, et éliminent A et B entre la relation (77) et ses dérivées; l'équation du troisième ordre s'écrit

$$Y''' R(Y) = Y' Y'' S(Y) + Y'^3 T(Y), \tag{78}$$

où l'on a

$$R = PQ' - QP', \qquad S = PQ'' - QP'', \qquad T = Q'P'' - P'Q'';$$

R, S, T sont donc trois polynomes en Y ayant respectivement pour degré 7, 6, 5. C'est de l'équation (78) qu'est parti M. Chazy pour former des équations du troisième ordre définissant des transcendantes nouvelles à points critiques fixes.

Pour indiquer comment on étudierait les équations dont les intégrales sont asymptotes aux intégrales de (78), considérons, à titre d'exemple, l'équation (78) pour laquelle on a $P = Y^4 + 1$, $Q = Y^4 - 1$, c'est-à-dire l'équation

$$YY''' = 3Y'Y''. \tag{79}$$

Nous pouvons nous proposer d'ajouter à l'équation (79) des termes complémentaires, rationnels en Y, Y', algébriques en X, tels que l'équation ainsi complétée soit « asymptote » à (79). Effectuant au besoin une transformation homographique (66), nous pourrons toujours ramener l'ensemble des termes complémentaires à un polynome en Y, Y' de la forme

$$\begin{aligned} G(X, Y, Y') = p_4 Y^4 + p_3 Y^3 + \ldots + p_0 + q_1 Y' + q_2 YY' \\ + q_3 Y^2 Y' + r_1 Y'^2 + s_1 Y'' + s_2 YY'', \end{aligned}$$

où $p_4, \ldots, s_2$ sont des fonctions algébriques de X qui tendent vers zéro avec $|X^{-1}|$.

Proposons-nous, réciproquement, de faire l'étude asympotique des intégrales de l'équation

$$\frac{Y'''}{Y''} = 3\frac{Y'}{Y} + \frac{G(X, Y, Y')}{Y''}; \tag{80}$$

il n'y aura que peu de modifications à apporter à la méthode de notre deuxième Partie pour la rendre applicable à l'équation (80).

Considérons, dans le plan Y, un chemin de longueur bornée sur lequel une intégrale de (79), fonction elliptique définie par des conditions initiales données X_0, Y_0, Y'_0, satisfait aux conditions $|Y| < h$, $k < |Y'| < h$, $k < |Y''|$ et suivons, sur ce chemin, l'inverse de l'intégrale Y(X) de (80) définie par les conditions initiales considérées. Nous avons sur ce chemin

$$\log Y'' = \log 2CY^3 + \log(1+\alpha),$$

α étant de l'ordre de grandeur d'une puissance négative de $|X_0|$; d'où

$$Y'' = 2C(1+\alpha)Y^3, \qquad Y'^2 = CY^4 + 4C\int \alpha Y^3 Y' dX,$$

ou

$$Y'^2 = C(1+\alpha)Y^4 - C\int^x \alpha' Y^4 dX, \tag{81}$$

où α' est de l'ordre de grandeur de $|X_0|^{-1-\delta}$ $(\delta > 0)$.

L'équation (81) pourra alors être étudiée et interprétée comme l'équation (16) de notre deuxième Partie.

Des difficultés spéciales apparaîtront cependant lorsqu'on fera décrire à la variable Y un chemin non borné. Considérons, par exemple, l'équation

$$YY''' = 3Y'Y'' + p_2Y^2 + q_2YY' + r_2YY'' + p_1Y + p_0 + q_1Y' + r_1Y'', \tag{82}$$

et supposons que X s'éloigne indéfiniment le long d'un rayon quelconque ou, plus particulièrement, sur une *ligne périodique* d'une intégrale Y(X) (*voir* 2ᵉ Partie, § 9). Si nous opérons le changement de variable $Y = X^m U$, l'équation en U sera, *quel que soit m*, de même forme que (82), les nouveaux coefficients $p_2, \ldots, r_1$ tendant vers zéro avec $|X^{-1}|$ comme les anciens. De là résulte que, si l'on appelle F(X) l'une quelconque des intégrales de (79) et que l'on considère un quadrilatère des périodes de cette fonction arbitrairement éloigné, *il existe des intégrales* $Y(X)$ *de* (82) *qui dans ce quadrilatère se rapprochent arbitrairement de* $X^m F(X)$, *m étant un nombre donné quelconque.*

Par contre, les intégrales $Y(X)$ [de (82)], ou $U(X)$, ne sauraient, en général, être asymptotes *à une même fonction elliptique le long d'une ligne périodique*, ainsi qu'il arrivait pour les intégrales de l'équation (B′) dans la deuxième Partie. Il ne pourrait en être ainsi que si les coefficients $p_2, \ldots, r_1$, *ou du moins certains d'entre eux, étaient, par rapport à* X, *de degré au plus égal à* 2. Lors donc qu'on voudra faire l'étude asymptotique d'une équation (82), il conviendra *d'effectuer un changement de variables* $Y = X^m U$ *en choisissant l'exposant m de manière que cette condition soit satisfaite pour l'équation transformée.*

Soit, par exemple, à étudier l'équation

$$YY''' = 3Y'Y'' + a\frac{Y'^2}{X}; \tag{83}$$

le changement de variable $Y = X^m U$ transforme cette équation en

$$UU''' = 3U'U'' + 6(m^2 + am)\frac{UU'}{X^2} + (2m^3 + 3am^2 - 2m)\frac{U^2}{X^3} + (6m + 3a)\frac{U'^2}{X};$$

nous ferons alors $m = -\frac{a}{2}$, et nous aurons

$$UU''' = 3U'U'' + b\frac{UU'}{X^2} + c\frac{U^2}{X^3};$$

intégrant une première fois sur un *rayon quelconque* X_0X du plan X, le long duquel $|U|$, $|U'|$, $|U^{-1}|$ et $|U'^{-1}|$ sont supposés rester bornés, il vient

$$\log U'' = \log 2CU^3 + \int_{x_0}^{x}\left[b\frac{U'}{X^2U''} + \frac{CU}{X^3U''}\right]dX;$$

on peut donc poser

$$U'' = 2C(1 + \alpha)U^3,$$

où α reste inférieur à $h|X^{-1}|$ (h indépendant de X) lorsque, X_0 restant fixe, X s'éloigne indéfiniment; intégrant une seconde fois, on a

$$U'^2 = C(1 + \alpha)U^4 - C\int_{x_0}^{x}\alpha' U^4\, dX, \tag{84}$$

où α' reste inférieur à $h_1 |X^{-2}|$ (h_1 indépendant de X). On en conclut que, *sur les rayons qui convergent vers* $X = \infty$, toute intégrale $U(X)$ est asymptote à une fonction elliptique vérifiant une équation

$$U'^2 = CU^4 + C_1 \qquad (C \text{ et } C_1 \text{ const.}).$$

Observons en passant que les équations (80) *homogènes* se ramènent, lorsqu'on pose $y = \frac{Y'}{Y}$, à des équations du second ordre de l'un des types considérés dans ce travail.

CINQUIÈME PARTIE.

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU SECOND ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

Nous avons étudié dans notre deuxième Partie une classe d'équations asymptotes à l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$, qui définit les fonctions p de Weierstrass. Nous avons signalé, d'autre part, les divers types d'équations, asymptotes aux équations différentielles des diverses fonctions doublement périodiques, auxquels s'applique notre méthode d'analyse : ces équations définissent des « fonctions du type bipériodique », qui sont aux fonctions elliptiques correspondantes ce que les intégrales $Y(X)$ de l'équation (15), étudiée au paragraphe 15, sont aux fonctions p.

En écrivant le type d'équation (15), au paragraphe 7, le type (67) au paragraphe 18, etc., nous avons dit (mais nous n'avons pas démontré complètement) que ces équations sont les seules parmi les équations

$$Y'' = R(X, Y, Y') \tag{85}$$

rationnelles en Y', algébriques en Y, qui puissent avoir leurs intégrales asymptotes aux intégrales des équations $Y'' = 6Y^2 - 6$, $Y'' = 2Y^3 - 2Y, \ldots$.

Il nous faut revenir sur cette assertion : nous la justifierons en montrant, plus généralement, que *les seules équations* (85) *dont toutes les intégrales sont rationaloïdes* (¹) *en tout point* X *distinct des points singuliers fixes*, ξ, *des coefficients de* R, *sont les équations* (15), (67), *et autres équations semblables* [*correspondant aux diverses équations* (85) *indépendantes de* X *dont les intégrales sont méromorphes*].

La question touche de près au problème que M. Painlevé a intitulé : *Recherche des conditions nécessaires pour que l'équation* (85) *ait ses points critiques fixes*. Mais il n'est peut-être pas inutile de la reprendre afin de la rattacher à une théorie plus générale, à une méthode qui permet de déterminer l'allure des intégrales d'une équation (85) quelconque. Ainsi, au lieu de reposer sur un raisonnement *ab absurdo*, la détermination des conditions nécessaires de M. Painlevé deviendra une application particulière du problème suivant : recherche de toutes les équations (85) dont les « branches d'intégrales » sont *rationaloïdes* ou, plus généralement, *algébroïdes*, au voisinage de leurs points *transcendants ordinaires* (²). Et, d'autre part, connaissant l'allure des intégrales, nous saurons exactement par quels caractères les équations obtenues se distinguent des autres équations (85) *qui toutes peuvent être étudiées par la même méthode*.

Pour l'objet que nous avons en vue, il nous suffira d'envisager le cas où R est un polynome en Y′ du second degré au plus, et est rationnel en Y. Il est bien connu, en effet, que pour toute autre forme de R, les intégrales ne peuvent pas être uniformes; on voit facilement qu'elles ne peuvent pas non plus être rationaloïdes en tous leurs points ordinaires.

Considérons donc (en remplaçant X, Y par x, y) l'équation

$$y'' = \mathrm{L}(x, y)\,y'^2 + \mathrm{M}(x, y)\,y' + \mathrm{N}(x, y), \tag{86}$$

équation d'où est parti M. Painlevé dans son Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, et supposons-la tout de suite rationnelle en y.

Si l'on se propose de faire une théorie générale des équations (86), il convient, à notre sens, de faire une étude préalable des équations (86)

(¹) *Voir* Introduction, p. 267.

(²) C'est-à-dire, d'après la terminologie de M. Painlevé, au voisinage des points (distincts des points ξ) où le coefficient différentiel R est infini ou indéterminé.

indépendantes de x. C'est là, on se le rappelle, ce qu'a fait naguère M. Picard lorsqu'il s'est proposé de déterminer les équations (86) à intégrales uniformes. M. Painlevé, au contraire, aborde d'emblée le cas général [1]. Mais, pour la théorie générale, l'examen du cas particulier est une base nécessaire : il se trouve, en effet, qu'au changement de variables $y = x^{r}\mathrm{Y}$, $x = \mathrm{X}^{l}$ près, *les équations* (86) *où entre x définissent des familles de fonctions* asymptotes *aux intégrales des équations indépendantes de x*.

L'équation

$$(87)\qquad y'' = \mathrm{L}(y)\,y'^{2} + \mathrm{M}(y)\,y' + \mathrm{N}(y)$$

se transforme, comme on sait, en

$$(88)\qquad z\frac{dz}{dy} = \mathrm{L}z^{2} + \mathrm{M}z + \mathrm{N}, \qquad \text{où} \qquad z = y',$$

ou encore

$$(88\,bis)\qquad \frac{dw}{dy} + \mathrm{L}w + \mathrm{M}w^{2} + \mathrm{N}w^{3} = 0, \qquad \text{où} \qquad w = z^{-1}.$$

Or, cette équation peut être étudiée en détail. On peut déterminer [2] d'une manière précise la croissance et l'allure des « branches d'intégrales » $w(y)$ ou $z(y)$ pour y tendant vers l'infini ou vers une valeur quelconque, la distribution de leurs points critiques, le mécanisme de leur permutations (*cf.* Introduction, II, p. 266). D'où, pour les $y(x)$, autant de caractères correspondants qui sont à retenir *parce qu'ils se conservent pour la plupart, lorsqu'on passe de l'équation* (87) *à une équation asymptote* telle que (98).

Pour étudier les intégrales de l'équation (87), il y a lieu (cf. *loc. cit.*) de distinger entre le cas où L *est* et le cas où L *n'est pas identiquement nul*.

21. L'équation $y'' = \mathrm{M}(y)\,y' + \mathrm{N}(y)$.

Supposons donc, en premier lieu, que l'équation (87) se réduise à

$$(89)\qquad y'' = \mathrm{M}(y)\,y' + \mathrm{N}(y)$$

---

(1) C'est qu'il n'existe pas d'équation (86) à intégrales uniformes *nouvelles*, qui ne contienne pas x.

(2) *Cf.* P. Boutroux, *Leçons*, etc., Gauthier-Villars, 1907; *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1909.

qui donne

$$(90) \qquad z\frac{dz}{dy} = \mathrm{M}z + \mathrm{N} \qquad (z = y').$$

Désignons par μ et ν les degrés en y des fonctions rationnelles M et N. A moins qu'on n'ait à la fois $\mu < -1$, $\nu < -1$, l'*infini* est, en général, point transcendant pour les $z(y)$. Plaçons-nous dans cette hypothèse et considérons les « branches » $z(y)$ sur un ensemble de rayons convergeant vers $y = \infty$.

Conformément à la discussion faite dans l'Ouvrage auquel nous nous référons [1], nous allons distinguer les cas suivants :

Premier cas. — Soit $1 + 2\mu - \nu < 0$ (*en ce cas* ν *est nécessairement supérieur à* -1). *Toutes* les « branches » $z(y)$ sont *algébroïdes* [1] (toujours finies) sur l'ensemble des rayons considérés. Le degré de z en y est $\frac{1+\nu}{2}$. Chaque branche $z(y)$ présente $\nu + 1$ points critiques (où $z = 0$) pouvant être arbitrairement rapprochés de $y = \infty$; le mécanisme des permutations opérées par les points critiques a été décrit ailleurs en détail [2].

Supposons en particulier que $\nu > 1$ (donc $\nu \geqq 2$); alors $\frac{\nu+1}{2} > 1$; aux branches $z(y)$ (sur les rayons convergeant vers $y = \infty$) correspondent des branches $x(y)$ qui tendent vers des valeurs finies $x_0, x_1, \ldots$ et sont échangées (au voisinage de $y = \infty$) *par le même mécanisme que les* $z(y)$. A un ensemble de branches $x(y)$ se permutant au voisinage de $y = \infty$ correspond une *même* « branche d'intégrale » $y(x)$ qui est *infinie* et *algébroïde* aux points $x_0, x_1, \ldots$; pour x tendant vers x_0 en ligne droite, le rapport $\frac{y}{(x - x_0)^{-\frac{2}{\nu-1}}}$ tend vers une limite constante.

Si l'on avait $\nu \leqq 1$, les branches $x(y)$ (toujours suivies sur un ensemble de rayons convergeant vers $y = \infty$) ne tendraient pas vers

---

(1) Dans cet Ouvrage, μ et ν sont supposés positifs; mais, *sur les rayons où* $|y|$ *croît indéfiniment*, les calculs ne sont pas modifiés lorsque μ ou ν devient négatif.

(2) *Loc. cit.*, p. 55 et suiv.; d'après la terminologie de cet Ouvrage, les branches $z(y)$ ont une « croissance rationnelle ». Sur le sens que nous donnons à l'épithète « algébroïde » appliquée à une *branche de fonction*, *voir* Introduction, p. 267.

des limites finies, mais deviendraient elles-mêmes infinies : elles ne donneraient donc aucun « *infini* » des branches d'intégrales $y(x)$.

Deuxième cas. — Soit $1+2\mu-\nu>0$ (*en ce cas* μ *est nécessairement supérieur à* -1). L'équation en z a (¹) *une* famille de branches d'intégrales qui sont rationaloïdes (et toujours finies) sur les rayons considérés. Pour ces branches, le degré de z en y est égal à $\mu+1$; chaque branche présente $(2\mu+2)$ points critiques pouvant être arbitrairement rapprochés de $y=\infty$; le mécanisme des permutations qu'opèrent ces points a été décrit ailleurs (²) (il diffère tout à fait du mécanisme correspondant au cas $1+2\mu-\nu<0$).

Aux branches $z(y)$ de degré $(\mu+1)$ en y correspond, si $\mu>0$ (donc $\mu\geqq 1$), des branches $x(y)$ qui tendent vers des limites finies x_0, x_1, ..., et à tout ensemble de branches $x(y)$ se permutant au voisinage de $y=\infty$ correspond une même « branche » $y(x)$ infinie aux points x_0, x_1, ...

Mais dans le cas actuel, les branches *rationaloïdes* de degré $(\mu+1)$ ne sont pas les seules qui satisfassent à l'équation (90) sur les rayons considérés. Il existe une seconde famille de branches $z(y)$ (cf. *Leçons*, etc., p. 64, note) qui, en général, ne peuvent pas être *algébroïdes*, car chacune d'elles présente une infinité de points critiques (³)

(¹) Cf. *Loc. cit.; Leçons*, etc., p. 60 et suiv.; *Rendiconti*, etc., p. 13.

(²) *Leçons*, etc., p. 101 et suiv.

(³) C'est là une conséquence immédiate (quoiqu'elle n'y soit pas énoncée explicitement) de l'analyse faite aux pages 60-64 de l'Ouvrage cité ci-dessus. On peut d'ailleurs y parvenir comme il suit. Posons $y=\xi^\lambda$, $z=\xi^k v$, où $(\mu+1)l-k-1=1$, $(\nu+1)l-2k-1=0$, ce qui donne $l(2\mu+1-\nu)=3$. L'exposant l a une valeur positive, et les termes principaux de l'équation (90) (pour les grandes valeurs de ξ) s'écrivent

$$v\frac{dv}{d\xi}=a\xi v+b \quad (a \text{ et } b \textit{ constantes}).$$

Or, l'étude de cette équation (*loc. cit.*, p. 101 et suiv.) montre que chaque intégrale possède *une* branche qui présente une infinité de points critiques (*loc. cit.*, p. 102, note 1, et aussi p. 86-87). Lorsqu'on s'éloigne vers l'infini le long d'un rayon, on obtient, soit cette branche, soit une des branches à croissance rationnelle, suivant que l'on passe d'un côté ou de l'autre des points critiques algébriques. Il faut excepter toutefois le cas où les intégrales n'auraient qu'un nombre fini de branches; en ce cas elles ont tous leurs points critiques à distance finie, et les conclusions qui précèdent ne s'appliquent plus.

convergeant vers $y=\infty$; si $\nu-\mu>0$, ces branches croissent indéfiniment avec $|y|$ et sont de l'ordre de grandeur de $|y|^{\nu-\mu}$ dans une infinité de directions : elles restent bornées si $\nu-\mu\leqq 0$. Le seul cas où les branches $z(y)$ de la seconde famille peuvent être *algébroïdes* est le cas où les intégrales $z(y)$ n'acquièrent qu'un nombre fini de déterminations dans un domaine entourant $y=\infty$, à l'intérieur duquel y se meut arbitrairement; les intégrales sont alors des *fonctions algébroïdes* dans ce domaine.

Aux branches $z(y)$ de la seconde famille correspondent des branches $x(y)$ dont certaines tendent vers des limites finies si l'on a $\nu>\mu+1$, mais qui deviennent infinies si $\nu\geqq\mu+1$].

Nous concluons de là qu'il n'est pas possible que les branches d'intégrales $y(x)$ soient du *type pluripériodique* (*voir* la définition donnée dans l'Introduction, p. 272) lorsqu'on a $\mu+1\leqq\nu<2\mu+1$.

Troisième cas. — Soit enfin $1+2\mu-\nu=0$. Faisons le changement de variables

$$z=y^{1+\mu}v, \qquad y=t^{-1},$$

l'équation (90) devient

$$t v\frac{dv}{dt}=(1+\mu)v^2+(a+p)v+(b+q), \tag{91}$$

où a et b sont des constantes et p et q des fonctions holomorphes de t nulles en $t=0$. On voit alors que, pour les intégrales $v(t)$, l'origine, quand elle n'est pas point d'holomorphisme, est un point transcendant ordinaire isolé [point de Briot et Bouquet (¹)]. Par des méthodes qui ont été exposées ailleurs, on peut étudier l'allure et l'agencement des branches $v(t)$; si $1+\mu>0$, toutes (²) ces branches sont *rationaloïdes*

(¹) *Leçons*, etc., Chap. IV.

(²) Appelons v_1, v_2 les deux racines du trinome $(1+\mu)v^2+av+b$, et posons

$$\lambda_1=\frac{(1+\mu)(v_1-v_2)}{v_1}, \qquad \lambda_2=\frac{(1+\mu)(v_2-v_1)}{v_2}.$$

Conformément à une discussion que j'ai faite ailleurs, il y aura des « branches d'intégrales » rationaloïdes $v(t)$ qui tendront vers a (ou vers b) si la partie réelle $R(\lambda_1)$ [ou $R(\lambda_2)$] est positive. Or, on a $\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}=(1+\mu)^{-1}$. Si donc $1+\mu>0$, l'une *au* sur l'ensemble des rayons convergeant vers $t = 0$, et tendent vers a ou vers b; les branches $z(y)$ correspondantes sont rationaloïdes en $y = \infty$ et de degré $1 + \mu\left(= \frac{\nu + 1}{2}\right)$ en y. Si $1 + \mu = 0$, il y a des branches v rationaloïdes qui tendent vers l'une des valeurs a, b et des branches qui tendent vers $v = \infty$ et ne sont pas rationaloïdes (¹).

Remarque. — Des propriétés de l'équation (90), il résulte que *les branches de fonctions $z(y)$ et leurs inverses ne sauraient être indéterminées pour aucune valeur déterminée de y ou de z;* les branches $y(x)$ ne présentent donc non plus aucun point d'indétermination à distance finie.

Équations (89) *dont les branches d'intégrales $y(x)$ sont rationaloïdes en tous leurs infinis.* — Considérons les branches d'intégrales $y(x)$ de l'équation (89) qui sont infinies en un point donné *quelconque* x_0. Par définition, ces branches d'intégrales seront rationaloïdes en x_0 s'il existe un entier positif m tel que sur tous les rayons convergeant vers x_0, le rapport de chaque branche à $(x - x_0)^m$ tende vers une même limite finie.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi pourraient être formées directement. On peut aussi les déduire de ce qui précède.

Les « branches d'intégrales » $z(y)$ qui deviennent infinies avec $|y|$ doivent être algébroïdes au voisinage de $y = \infty$, leur degré en y étant $1 + m^{-1}$. D'où, comme cas possibles, les suivants :

1° Soit $1 + 2\mu - \nu < 0$ ou $1 + 2\mu - \nu = 0$ avec $1 + \mu > 0$. D'après

---

moins des parties réelles $R(\lambda_1)$, $R(\lambda_2)$ est positive; en ce cas, d'ailleurs, il n'y a pas de « branche d'intégrale » tendant vers l'infini; on le voit en posant $v = w^{-1}$ et étudiant l'équation

$$tw' = -(1+\mu)\,w - (a + p)\,w^2 - (b + q)\,w^3.$$

Si maintenant $1 + \mu = 0$, l'un des nombres λ_1, λ_2 est nul; posant $v = w^{-1}$, on a

$$tw' = (a + p)\,w^2 + (b + q)\,w^3,$$

équation qui admet des « branches d'intégrales » nulles à l'origine et non rationaloïdes. (*Cf.* P. BOUTROUX, *Journal de Math.*, 1910, p. 151 et suiv.)

(¹) Nous n'avons pas à considérer ici le cas où $1 + \mu < 0$, car nous avons supposé qu'on n'a pas à la fois $\mu < -1$, $\nu < -1$.

ce qui précède, on devra avoir

$$\nu = 1 + \frac{1}{2^m}, \qquad p \leqq \frac{1}{m},$$

d'où, m, μ, ν devant être entiers, deux cas possibles :

$$m = 1; \qquad \nu = 3; \qquad \mu \leqq 0 \quad \text{ou} \quad \mu = 1;$$

ou bien

$$m = 2; \qquad \nu = 2; \qquad \mu < \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \mu \leqq 0.$$

2° Soit $1 + 2\mu - \nu < 0$. On devra avoir $\mu = m^{-1}$, ce qui exige $m = 1$, $\mu = 1$. D'autre part, si $\nu - \mu$ était plus grand que 1, il serait nécessaire (mais non suffisant) que l'on eût $\nu - \mu = 1 + m'^{-1}$, m' étant entier; d'où (puisque $\mu = 1$) $m' = 1$, $\nu = 3$; nous retomberions alors sur l'hypothèse $1 + 2\mu - \nu < 0$.

Ainsi, nous ne trouvons, comme nouveau cas acceptable, que le cas

$$m = 1, \qquad \mu = 1, \qquad \nu \leqq \mu + 1, \qquad \text{donc} \qquad \nu \leqq 2.$$

En résumé, les seuls types d'équations (89) pour lesquelles les conditions requises soient satisfaites sont les types

$$(92) \qquad \begin{cases} y'' = s_1(y)\,y' + r_3(y), \\ y'' = s_0(y)\,y' + r_2(y), \\ y'' = r_1(y)\,y' + s_2(y), \end{cases}$$

où r_3, r_2, r_1 désignent des fonctions rationnelles de degrés 3, 2, 1, tandis que s_1, s_0 sont des fonctions rationnelles de degré 1 et de degré 0 *au plus*. Pour la première et la troisième équation, les branches $y(x)$ infinies en x_0 deviennent infinies comme $(x - x_0)^{-1}$; pour la seconde, elles deviennent infinies comme $(x - x_0)^{-2}$.

D'ailleurs, nous avons vu que si $\mu + 1 \leqq \nu < 2\mu + 1$, les branches $y(x)$ ne sauraient être du *type pluripériodique* (*supra* p. 114 et Introduction, p. 272). *Cette remarque s'applique à la troisième équation* (92).

Bien entendu, les *infinis* des branches d'intégrales $y(x)$ des équations (92) ne sont pas des *pôles* en général. Pour qu'ils soient pôles, il faut que l'intégrale $z(x)$ de (90), non seulement croisse comme $y^{1+\frac{1}{m}}$ lorsque y s'approche de l'infini, mais soit en outre algébrique ou méromorphe au point $y = \infty$; or, il n'en est ainsi que lorsque les coefficients des fonctions r et s satisfont à certaines conditions arithmétiques [1] qui équivalent aux conditions formulées par M. Painlevé. Nous y reviendrons dans un instant.

Équations (89) *dont les branches d'intégrales sont rationaloïdes pour toute valeur finie de x.* — Soit $y(x)$ une branche d'intégrale de (89) suivie sur un ensemble de rayons quelconque. Lorsque x tend vers une valeur x_0 pour laquelle y prend une valeur α qui n'est ni infinie, ni pôle de M, N, la branche est *rationaloïde* en x_0. Si $\alpha = \infty$, l'étude de la branche se fait comme il a été expliqué ci-dessus [nous supposerons toujours que l'*une* des valeurs exceptionnelles de y qui donnent lieu à des points transcendants a été rejetée à l'infini (*voir* plus haut, p. 122); l'un au moins des degrés μ et ν de M et N en y est donc supérieur à -1].

Supposons maintenant que α soit pôle d'ordre μ_1 dans M et pôle d'ordre ν_1 dans N. Posant

$$y = \alpha + u^{-1}, \qquad M = -u^{\mu_1} M_1(u), \qquad N = -u^{\nu_1} N_1(u),$$

nous transformons l'équation (90) en l'équation

$$z\frac{dz}{du} + M_1 u^{\mu_1 - 2} z + N_1 u^{\nu_1 - 2}, \tag{93}$$

à laquelle nous pouvons appliquer les résultats obtenus plus haut.

Si la branche d'intégrale, qui tend vers α lorsque x tend vers x_0, est *rationaloïde* en x_0, la branche correspondante $z(u)$ doit être *rationaloïde* pour u infini et de degré $\frac{1}{m} - 1$ en u.

On voit immédiatement (comme plus haut) que les seules valeurs possibles pour m seraient $m = 1$, $m = 2$. Mais $m = 2$ exigerait $\nu_1 \leqq 0$, $\mu_1 \leqq 0$, ce qui n'est pas si α est pôle de M ou de N. Il faut donc supposer

$$\nu_1 = 1 \quad \text{avec} \quad \mu_1 \leqq 1, \qquad \text{ou} \qquad \mu_1 = 1 \quad \text{avec} \quad \nu_1 \leqq 1.$$

Posons alors $u = y - \alpha = t^{-1}$. L'équation (93) s'écrira

$$tz\frac{dz}{dt} = \varphi z + \psi, \tag{94}$$

[1] *Cf.* P. BOUTROUX, *Leçons*, etc., p. 97 et suiv.

où φ et ψ sont des fonctions de t holomorphes à l'origine. La nouvelle équation appartient [comme l'équation (91) de la page 114] au type Briot-Bouquet. Des propriétés de ce type, il résulte que, si l'on a $\varphi(0) \neq 0$, $\psi(0) = 0$, ou $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) \neq 0$, il n'y a pas de branches $z(t)$ qui tendent vers une limite finie lorsque t tend vers zéro sur un rayon quelconque ; il y a en revanche des branches $z(t)$ qui augmentent indéfiniment [les branches $x(y)$ correspondantes tendent aussi vers l'infini]. Si $\varphi(0) \neq 0$, $\psi(0) \neq 0$, il y a, si la partie réelle de $\varphi(0)$ est positive, des branches $z(t)$ *rationaloïdes* qui tendent vers $\frac{\psi(0)}{\varphi(0)}$; mais il y a aussi, *quel que soit* $\varphi(0)$, des branches $z(t)$ infinies pour $t = 0$.

Ainsi, *pour que les branches $y(x)$ qui prennent une valeur déterminée arbitraire (finie ou infinie) en un point arbitraire x_0 soient rationaloïdes en x_0, il faut :* 1° *que l'équation* (89) *soit l'une des formes* (92) ; 2° *que les fonctions rationnelles r et s n'aient que des pôles simples.*

Réciproquement, lorsque ces conditions sont satisfaites, les branches $y(x)$, qui n'ont aucun point d'indétermination (*voir* la Remarque p. 115), *sont rationaloïdes pour toute valeur finie de x_0.*

Parmi les équations obtenues, quelles sont celles dont les intégrales peuvent être du *type pluripériodique ?*

Nous avons vu que seules les deux premières équations (92) peuvent jouir de cette propriété. Il faut de plus que, dans ces équations, les fonctions *rationnelles r et s soient des polynomes en y.*

En effet, nous venons de voir que l'équation (94) admet toujours des branches $z(t)$ infinies en $t = 0$, auxquelles correspondent des « branches » $x(y)$ infinies pour $y = \infty$, à moins qu'on n'ait $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, c'est-à-dire à moins que la valeur α *ne soit pas* pôle de M et N.

En résumé, *les seules équations* (89) *dont les intégrales sont rationaloïdes et du type pluripériodique sont les équations*

$$(95) \qquad \begin{cases} y'' = a\,y' + p_2(y), \\ y'' = (a + by)\,y' + p_3(y), \end{cases}$$

où a et b sont des constantes, p_3 et p_2 des polynomes de degré 3 et 2.

Équations (95) *à intégrales méromorphes.* — Les intégrales des équations (95) ne sont, nous l'avons dit, uniformes que dans des cas exceptionnels. Nous avons vu en effet que, pour que les $y(x)$ soient uniformes en leurs *infinis*, il faut que certaines conditions arithmétiques soient remplies [1].

Ces conditions sont aisées à former : il suffit d'exprimer qu'au voisinage des conditions initiales $x = x_0$ (*arbitraire*), $y = \infty$, on peut satisfaire à l'équation proposée au moyen d'un développement de Taylor auquel s'ajoute une fonction rationnelle de degré -1 ou -2. On retrouve ainsi les résultats de M. Painlevé. Je les suppose connus, et je me borne à montrer comment ils se rattachent aux problèmes posés par l'étude de l'équation du premier ordre (90).

Les équations (90) qui correspondent à (95) sont :

$$(\alpha)\ zz' = p_2(y), \qquad (\beta)\ \ zz' = p_3(y),$$
$$(\gamma)\ zz' = az + p_2(z), \qquad (\delta) = az + p_3(y),$$
$$(\varepsilon)\ zz' = (a + by)z + p_3(y).$$

Les équations (α) et (β) donnent des fonctions elliptiques.

Au voisinage de $y = \infty$, les intégrales de l'équation (γ) sont en général de la forme

$z =$ polynome du troisième degré en $\sqrt{y}$ + développement en $y^{-\frac{1}{2}}$ et $\log y$;

celles de l'équation (δ) sont de la forme

$z =$ polynome du deuxième degré en y + développement en y^{-1} et $\log y$.

Il s'agit de faire en sorte que, pour toutes les intégrales $z(y)$, les termes logarithmiques disparaissent. Or, j'ai démontré [2] qu'il faut pour cela et qu'il suffit que l'équation *admette comme intégrales particulières deux polynomes, polynomes en* $\sqrt{y}$ *pour* (γ), *en* y *pour* (δ); l'équation est alors complètement déterminée et est intégrable algébriquement.

---

[1] On pourrait, plus généralement, se proposer de déterminer les équations (95) dont les « branches d'intégrales » sont *méromorphoïdes ou semi-méromorphoïdes*. Mais, pour une équation indépendante de x, cette circonstance ne peut se présenter que si les intégrales sont méromorphes.

[2] *Voir*, pour l'équation (γ), P. Boutroux, *Leçons*, etc., p. 133-134. La démonstration est la même pour l'équation (δ). — *Cf.* P. Boutroux, *Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, 1910, p. 19 et suiv.

Si l'équation est du type (γ), *ce doit être* (à une transformation $y_1 = my + n$, $x_1 = lx$ près) l'équation

$$2zz' = 5z + y(y-3).$$

Si elle est du type (δ) ce doit être (à la même transformation près) l'équation

$$zz' + 3z - 2y(y-1)(y-2) = 0.$$

Les *équations du second ordre correspondantes*

$$2y'' = 5y' + y(y-3), \qquad y'' + 3y' - 2y(y-1)(y-2) = 0$$

ont leurs intégrales uniformes. Ce sont (au changement $y_1 = my + n$, $x_1 = lx$ près) *les seules équations* (95) (où $b = 0$, $a \neq 0$) *dont les intégrales soient uniformes.*

Remarque. — De là résulte, en vertu d'un résultat obtenu par M. Painlevé [1], qu'un changement de variables algébrique, suivi d'un changement de la forme

$$y = e^{c(x-c_0)}\,Y + \mu, \qquad X = e^{c(x-c_0)} \qquad (c,\ c_0,\ \mu \text{ const.})$$

doit ramener ces équations aux formes

$$Y'' = p_2(Y), \qquad Y'' = p_3(Y) \qquad (p_2 \text{ et } p_3 \text{ polynomes de degrés 2 et 3}).$$

Pour les intégrales des équations (ε), le point $y = \infty$ est point de Briot et Bouquet [2]. Les conditions arithmétiques auxquelles doivent satisfaire les coefficients pour que ce point dégénère en point d'holomorphisme sont aisées à former. On constate qu'ici encore *ces conditions ne peuvent être satisfaites pour toutes les intégrales $z(y)$ que si l'équation admet deux intégrales particulières algébriques* (elle est alors intégrable algébriquement).

Les types correspondants d'équations (95) ont leurs intégrales uniformes. On les trouvera dans les tableaux de MM. Painlevé et Gambier. Citons, à titre d'exemple, la plus simple

$$y'' = -3yy' - y^3 + gy + h \qquad (g \text{ et } h \text{ constantes arbitraires})$$

---

(1) *Bull. de la Soc. math.*, 1900, p. 23.

(2) *Cf.* P. BOUTROUX, *Rendiconti* (*loc. cit.*), paragraphe XVII, p. 21.

et vérifions que l'équation (90) correspondante admet *trois intégrales polynomales*. Cette équation (90) s'écrira

$$zz' = -3yz - (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) \qquad \text{avec} \qquad y_1+y_2+y_3=0,$$

elle est vérifiée par les trois polynomes

$$-(y-y_1)(y-y_2), \qquad -(y-y_2)(y-y_3), \qquad -(y-y_3)(y-y_1).$$

22. L'équation $y''=\mathrm{M}(x,y)y'+\mathrm{N}(x,y)$.

Les propriétés que nous avons cherché à mettre en évidence en étudiant les équations (89) indépendantes de x sont, comme nous l'avons dit, de celles qui s'étendent immédiatement à l'équation complète

$$(96) \qquad y''=\mathrm{M}(x,y)y'+\mathrm{N}(x,y),$$

où M et N sont des fonctions rationnelles de y contenant la variable x.

Proposons-nous, en particulier, le problème suivant (*cf. supra* p. 117, 118) : déterminer toutes les équations (96) dont les branches d'intégrales sont du type pluripériodique et sont rationaloïdes pour toute valeur finie de x distincte des points singuliers ξ des fonctions M, N.

Je dis que M *et* N *doivent être, par rapport à* y, *de l'une des formes qui ont été déterminées au paragraphe précédent*.

En effet [1], par hypothèse, toute « branche d'intégrale » $x(y)$ doit tendre vers une limite finie lorsque y croît indéfiniment sur un ensemble de rayons convergents (Introduction, p. 272); dans ces conditions l'équation (96) tend vers l'équation

$$(97) \qquad y''=\mathrm{M}(x_0,y)y'+\mathrm{N}(x_0,y).$$

Posons $x=x_0+\lambda t$, où λ est un paramètre variable entre 0 et 1, et

---

[1] Le lemme fondamental de M. Painlevé conduit à la même conclusion : il suffit de poser successivement $x=x_0+\lambda\mathrm{X}, y=\lambda^{\frac{-2}{\nu}}\mathrm{Y}$, puis $x=x_0+\lambda\mathrm{X}, y=\lambda^{\frac{-1}{\mu}}\mathrm{Y}$ (μ et ν étant les degrés de M et N en y) et de faire tendre λ vers zéro dans les deux équations obtenues.

écrivons l'équation

$$(97\ bis) \qquad y'' = \mathrm{M}(x_0 + \lambda t, y)\, y' + \mathrm{N}(x_0 + \lambda t, y).$$

Si pour $\lambda \leqq \lambda_1$, les branches d'intégrales de (97 *bis*) infinies en x_0 ne sont pas *rationaloïdes* en ce point, elles ne sont pas non plus rationaloïdes pour les valeurs voisines de λ.

Donc l'équation (97) est nécessairement de l'un des types (92). Supposons, d'autre part, qu'elle ne soit pas l'une des formes (95); alors, quel que soit x_0, il y aura, pour $\lambda = 0$, des « branches d'intégrales » $x(y)$ de (97 *bis*) qui deviendront infinies avec y; on en déduira qu'il en est encore ainsi pour λ voisin de zéro, et, de proche en proche, pour $\lambda \leqq 1$.

Ainsi, les fonctions M et N sont nécessairement des polynomes en y dont les degrés μ et ν sont

$$\nu = 2 \quad \text{avec} \quad \mu = 0; \qquad \text{ou} \qquad \nu = 3 \quad \text{avec} \quad \mu = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = 1.$$

Cela posé, nous allons étudier d'un peu plus près l'équation (96) en faisant cette hypothèse que (pour y quelconque non nul), les « branches de fonctions » M et N de x sont *algébroïdes* pour $x = \infty$. En ce cas, lorsque les modules $|x|$ et $|y|$ seront très grands, on pourra distinguer, dans M, deux termes prépondérants $a_1 x^{r_1} y^{s_1}$, $a_2 x^{r_2} y^{s_2}$, où $r_1 < r_2$, $s_1 = \mu > s_2$, tels que, si l'on pose

$$\mathrm{M} = a_1 x^{r_1} y^{s_1} + a_2 x^{r_2} y^{s_2} + \varphi,$$

l'un des rapports ou les deux rapports $\dfrac{\varphi}{x^{r_1} y^{s_1}}$, $\dfrac{\varphi}{x^{r_2} y^{s_2}}$ tendent vers zéro quand x et y s'éloignent indéfiment sur deux rayons quelconques. Si l'on a $r_2 = r_1$ ou $s_2 = s_1$, il n'y a qu'*un* terme prépondérant. Les exposants s_1, s_2 sont entiers par hypothèse; les exposants r_1 et r_2 seront, sauf avis contraire, des nombres rationnels quelconques positifs ou négatifs. La fonction $\mathrm{N}(x, y)$ admettra de même, en général, deux termes prépondérants $a'_1 x^{r'_1} y^{s'_1}$, $a'_2 x^{r'_2} y^{s'_2}$, où $r_1 > r'_2$, $s'_1 = \nu > s'_2$.

Cela dit, effectuons sur (96) le changement de variable $y = x^q \mathrm{Y}$ où q est un exposant positif ou négatif. Nous aurons

$$\mathrm{Y}'' = \left(\mathrm{M} - 2\frac{q}{x}\right)\mathrm{Y}' + \mathrm{N} x^{-q} + q\mathrm{M}\frac{\mathrm{Y}}{x} - q(q-1)\frac{\mathrm{Y}}{x^2} = \mathrm{M}_1(x, \mathrm{Y}) + \mathrm{N}_1(x, \mathrm{Y}).$$

On peut évidemment prendre q assez grand pour que chacune des fonctions M_1, N_1 n'ait qu'*un* terme prépondérant : le terme prépondérant de M_1 sera de degré s_1 en Y, de degré $qs_1 + r_1$ en x; le terme prépondérant de N_1 aura pour degré en y le plus grand des deux nombres s'_1, $s_1 + 1$; le degré correspondant en x sera $q(s'_1 - 1) + r'_1$ ou $qs_1 + r_1 - 1$ [on voit que, pour les grandes valeurs positives de q, la différence de ces degrés a bien le même signe que la différence des degrés en y, $s'_1 - (s_1 + 1)$]. Par contre, lorsque q est négatif et très grand en valeur absolue, M_1 et N_1 ont sûrement chacune *deux* termes prépondérants.

Donnons donc à q une valeur (positive ou négative) pour laquelle les fonctions M_1 et N_1 n'ont chacune qu'un terme prépondérant de degré positif en x; puis faisons le changement de variable $x = \frac{1}{l}X^l$ en déterminant le nombre positif l par la condition

$$[q(s'_1 - 1) + r'_1 + 2]\, l = 2, \qquad \text{ou} \qquad (qs_1 + r_1 + 1) l = 1$$

suivant qu'on a

$$q(s'_1 - 1) + r'_1 \geqq 2(qs_1 + r_1) \qquad \text{ou} \qquad q(s'_1 - 1) + r'_1 < 2(qs_1 + r_1).$$

Dans l'équation transformée

$$\text{(98)} \qquad Y'' = [M_1 X^{l-1} + (l-1)X^{-1}]\,Y' + N_1 X^{2l-2},$$

les termes prépondérants en X sont de degré zéro.

Appliquons ces transformations au cas où M et N sont des polynomes en y ayant pour degrés les nombres μ et ν déterminés plus haut; et soit d'abord

$$s'_1 = \nu = 2 \quad \text{ou} \quad 3, \qquad s_1 = \mu = 0.$$

Nous prendrons pour q *la plus petite valeur (positive ou négative) telle que les fonctions* M_1 *et* N_1 *n'aient chacune qu'un terme prépondérant et telle que* $q(\nu - 1) + r'_1 \geqq 2r_1$. Nous aurons comme équation transformée une équation de la forme

$$\text{(99)} \qquad Y'' = [a + \mathfrak{M}(X)]\,Y' + [\mathfrak{N}_0(Y) + \mathfrak{N}(X, Y)],$$

où $\mathfrak{N}_0$ est indépendant de X et de degré 2 ou 3 en Y, $\mathfrak{N}$ de degré moindre en Y, a une constante qui peut être nulle, les branches de fonctions $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de X étant d'ailleurs algébroïdes au voisinage de $X = \infty$ et comparable à des puissances négatives de $|X|$.

D'ailleurs, étant donné qu'on a pris q aussi petit que possible, *ou bien le polynome* $\mathfrak{N}_0(Y)$ *contiendra plus d'un terme, ou bien a sera sûrement non nul* (1).

Nous parviendrons à une conclusion semblable lorsque nous aurons $s'_1 = \nu = 3$, $s_1 = \mu = 1$. Nous poserons alors

$$(2q + r'_1 + 2)l = 2 \qquad \text{ou} \qquad (q + r_1 + 1)l = 1,$$

suivant que $r'_1 \geqq r_1$ ou $r'_1 < r_1$. L'équation transformée sera de la forme

$$(100) \quad Y'' = [a + bY + \mathfrak{M}(X) + \mathfrak{M}_1(X)Y]Y' + [\mathfrak{N}_0(Y) + \mathfrak{N}(X, Y)],$$

a et b étant des constantes qui peuvent être nulles, $\mathfrak{N}_0$ de degré 3 et $\mathfrak{N}$ de degré moindre en y et les branches de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}$ étant algébroïdes par rapport à X et comparables à des puissances négatives de X; d'ailleurs, ou bien le polynome $\mathfrak{N}_0$ contiendra plusieurs termes, ou bien l'un des nombres a, b sera sûrement non nul.

Une fois l'équation (96) mise sous la forme (99) ou (100), nous sommes en mesure de l'étudier par les méthodes qui ont été exposées dans la deuxième Partie de ce travail. Nous constatons que, *pour les grandes valeurs de* $|X|$, *les intégrales des équations* (99) *ou* (100) *sont asymptotes* (2) *aux intégrales des équations indépendantes de* X

$$Y'' = aY' + \mathfrak{N}_0(Y), \qquad Y'' = (a + bY)Y' + \mathfrak{N}_0(Y).$$

Nous avons expliqué en quoi consiste l'asymptotisme des deux familles de fonctions correspondantes et quelles conséquences on peut tirer de cet asymptotisme relativement à l'allure des branches d'intégrales Y(X) et au mécanisme des permutations de la fonction inverse.

Il résulte, en particulier, des conclusions obtenues que seules peuvent avoir leurs intégrales uniformes (où à points critiques fixes)

---

(1) Dans le cas qui nous occupe, on pourrait toujours, avant d'effectuer la transformation $y + x^q Y$, $x = l^{-1}X^l$, chasser le terme en y' au moyen d'un changement de variables $y = \lambda(x)y_1 + \mu(x)$, $x_1 = \varphi(x)$, (*cf.* PAINLEVÉ, *loc. cit.* ci-dessus, p. 266, note 1).

(2) *Voir* la définition donnée dans l'Introduction, p. 273-274.

les équations (96) qu'une transformation $y = x^q Y$, $x = t^{-1} X^t$ rend asymptotes à une équation indépendante de X dont les intégrales sont uniformes (ou à points critiques fixes).

Si, d'autre part, on se donne *a priori* une équation indépendante de X, telle que $Y'' = 6Y^2 - 6$, les seules équations (96) dont les intégrales puissent être asymptotes à celles de l'équation donnée sont les équations (96) qui se laissent mettre sous la forme (99) avec $a = 0$, $\mathfrak{M}_0 = 6Y^2 - 6$. Pour toute autre forme de (96), en effet, les $Y(X)$ sont asymptotes à des familles de fonctions autres que les $\wp(X - X_0)$.

23. L'équation (86) : $y'' = Ly'^2 + My' + N$.

Nous nous sommes occupés, dans les paragraphes précédents, des équations (86) qui ne contiennent pas de terme en y'^2. Il nous reste à étudier les cas où la fonction $L(x, y)$ n'est pas identiquement nulle (*voir* le début du paragraphe 21, p. 111-112). Cette étude n'offre point d'intérêt nouveau en ce qui concerne la méthode : nous nous bornerons à indiquer les points principaux de la discussion à laquelle elle donne lieu.

Nous considérerons en premier lieu les équations (86) qui ne contiennent pas x. Il leur correspond une équation

$$z\frac{dz}{dy} = L(y)z^2 + M(y)z + N(y), \qquad z = y'. \tag{101}$$

Ainsi qu'on l'a fait dans le cas où $z = 0$, on pourra étudier les « branches d'intégrales » $z(y)$ au voisinage d'un point transcendant de l'équation (101) que nous supposerons rejeté à l'infini. Appelons λ, μ, ν les degrés de L, M, N en y : l'un au moins des trois degrés λ, μ, ν sera supérieur à -2.

L'étude détaillée des branches $z(y)$ n'a point encore été faite dans le cas de $L \neq 0$, comme dans le cas $L = 0$. Cette étude ne présente cependant aucune difficulté nouvelle, et elle conduit, en particulier, aux résultats suivants :

I. Lorsque $\lambda \leqq -2$, l'allure des branches $z(y)$ sur les rayons qui convergent vers $y = \infty$ est exactement ce qu'elle serait si L était identiquement nul. En d'autres termes, les branches $z(y)$ de (101) sont asymptotes aux branches d'intégrales de l'équation $zz' = Mz + N$. L'asymptotisme des deux équations sera décelé et pourra être étudié en détail par les méthodes développées dans notre deuxième Partie.

II. Lorsque $\lambda > -1$, il existe une infinité de branches $z(y)$ à *croissance exponentielle*, c'est-à-dire des branches qui, sur une infinité de rayons convergeant vers l'infini, croissent plus vite qu'une fonction exponentielle croissante. J'ai étudié l'allure de ces branches d'intégrales dans mon Mémoire sur les fonctions entières (*Acta mathematica*, 1904).

III. Lorsque $\lambda = -1$, posons

$$L = \alpha y^{-1} + y^{-2} L_1(y),$$

L_1 étant développé par rapport aux puissances de y^{-1}. Nous considérerons successivement les divers cas qui ont été énumérés au paragraphe 21 :

1° Soit $1 + 2\mu - \nu < 0$, et soit d'abord $\nu + 1 > 0$, $\alpha > 0$ (c'est le seul cas que nous ayons à retenir dans la suite). En raisonnant comme dans le cas $L = 0$, on voit qu'il y a une infinité de branches $z(y)$ qui croissent indéfiniment avec $|y|$ dans toute direction et sont d'un ordre de grandeur égal ou supérieur à celui de $|y|^{\frac{\nu+1}{2}}$. Soit z_1 l'une de ces branches. Posons

$$Z_1 = z_1^2, \qquad Z = z^2, \qquad Z = Z_1 + W,$$

nous aurons

$$Z' = 2LZ + 2M\sqrt{Z} + 2N, \qquad W' = 2LW + 2M\left(\sqrt{Z_1 + W} - \sqrt{Z_1}\right),$$

ou encore

$$W' = 2\left(L + \frac{M}{\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_1 + W}}\right)W.$$

On démontre facilement que, sur les rayons considérés, les branches d'intégrales $W(y)$ de cette équation ont un module croissant si le coefficient α est > 0; *à chaque branche correspond une constante* C *telle que* *le rapport* $\frac{W}{Cy^{2\alpha}}$ *tende vers une limite finie;* les branches sont *algébroïdes* pour $y = \infty$ si α est rationnel.

Partant de là, on démontrera que l'ensemble des branches $Z(y)$ sur les rayons considérés est donné par la formule

$$(102) \qquad Z = z^2 = Cy^{2\alpha} + y^{\nu+1}\varphi(y, C),$$

C étant une constante arbitraire et φ une fonction qui jouit des propriétés suivantes : 1° $\varphi(y, 0)$ tend vers une limite finie quand $|y|$ croît indéfiniment; 2° l'expression $y^{\nu+1-2\alpha}[\varphi(y, C) - \varphi(y, 0)]$ tend vers zéro, *quel que soit* C.

A la valeur $C = 0$ correspond une branche $z(y)$ algébroïde et de degré $\frac{\nu+1}{2}$ en y qui se comporte exactement comme les branches $z(y)$ obtenues au paragraphe 21 (dans le cas $L = 0$), pour $1 + 2\mu - \nu < 0$ (elle a même croissance, même mécanisme de permutations, etc.).

Remarque. — La fonction φ ne satisfait pas nécessairement aux deux conditions énoncées ci-dessus lorsque $\alpha \leqq 0$ ou $\nu \leqq -1$. Mais, en tout cas, si α est négatif ou nul, $\nu + 1$ positif, toutes les branches Z sont de l'ordre de grandeur de $|y|^{\nu+1}$; si $\nu + 1 \leqq 0$, $\alpha > 0$, la branche $y^{\nu+1}\varphi(y, 0)$ reste finie sur les rayons considérés, les autres sont de l'ordre de grandeur de $|y^{2\alpha}|$; si $\alpha \leqq 0$, $\nu + 1 \leqq 0$, toutes les branches restent finies.

2° Passons au cas où $1 + 2\mu - \nu > 0$, et supposons d'abord $\nu > 1$, $\alpha > 0$. Faisant les mêmes transformations que tout à l'heure nous constatons encore que, sur les rayons convergeant vers $y = \infty$, il existe un ensemble de branches $z^2(y)$ ou $Z(y)$ qui est donné par la formule

$$(103) \qquad Z = z^2 = Cy^{2\alpha} + y^{2(\mu+1)}\varphi(y, C),$$

C étant une constante arbitraire et φ une fonction qui jouit des propriétés suivantes : 1° $\varphi(y, 0)$ tend vers une limite finie sur les rayons considérés; 2° l'expression $y^{2(\mu+1)-2\alpha}[\varphi(y, C) - \varphi(y, 0)]$ tend vers zéro quel que soit C.

A la valeur $C = 0$ correspond une branche $z(y)$ rationaloïde, de degré $\mu + 1$ en y, qui se comporte exactement comme les branches $z(y)$ étudiées au paragraphe 21 dans le cas $L = 0$, $1 + 2\mu - \nu < 0$, $\mu > -1$.

Outre les branches (103) l'équation en z possède une *seconde famille* de branches d'intégrales $z(y)$ dont chacune présente en général une infinité de points critiques sur les rayons que nous suivons. Cette seconde famille de branches (non algébroïdes) existe, nous l'avons vu (p. 113-114), lorsque $L = \alpha y^{-1} + y^2 L_1$ est nul; elle subsiste lorsque α et les coefficients de L_1 croissent à partir de zéro.

Remarque. — Lorsque $\alpha \leqq 0$, les branches de la première famille sont toutes de l'ordre de grandeur $|y|^{\mu+1}$; lorsque $\mu \leqq -1$, la branche $y^{\mu+1}\varphi(y, 0)$ reste finie sur les rayons considérés.

3° Soit enfin $1 + 2\mu - \nu = 0$. Développant L, M, N en puissances de y et y^{-1}, posons

$$M = y^{\mu}(a + M_1 y^{-1}), \qquad N = y^{\nu}(b + N_1 y^{-1})$$

et faisons le changement de variables

$$z = y^{1+\mu} v, \qquad y = t^{-1}.$$

L'équation (101) devient

$$tv\frac{dv}{dt} = (1 + \mu - \alpha)v^2 - av - b + \ldots, \tag{104}$$

équation de Briot-Bouquet, du même type que l'équation (91) obtenue pour $L = 0$, et qui se laisse étudier semblablement; il existe en tout cas *une famille de branches $v(t)$ rationaloïdes en $t = 0$*; les branches $z(y)$ correspondantes sont rationaloïdes et *de la forme* (102).

Équations (86) *dont les branches d'intégrales sont rationaloïdes en tous leurs infinis et sont du type pluripériodique.* — Cherchons en particulier à déterminer les nombres α, μ, ν de manière que *toutes* les « branches d'intégrales » $y(x)$ de (86) qui deviennent infinies en un point arbitraire x_0 y soient *rationaloïdes*. En raisonnant comme au paragraphe 21 (p. 115 et suiv.), sur la branche d'intégrale [1] $z = z_0 = \sqrt{y^{\nu+1}\varphi(y, 0)}$ [ou sur la branche $z = z_0 = y^{\mu+1}\sqrt{\varphi(y, 0)}$], nous voyons que nous devons avoir

$$\nu = 2 \text{ avec } \mu \leqq 0; \quad \text{ou } \nu = 3 \text{ avec } \mu \leqq 1; \quad \text{ou } \mu = 1 \text{ avec } \nu \leqq 2;$$

d'ailleurs, dans ce dernier cas, les branches d'intégrales $y(x)$ ne peuvent pas être du *type pluripériodique* (*cf.* p. 116). Nous ne nous occuperons donc pas de ce cas.

Soit donc d'abord $\nu = 3$. A la branche d'intégrale z_0 correspond une branche $y_0(x)$ de degré -1 en $(x - x_0)$. Soit $y_1(x)$ une autre « branche » rationaloïde en x_0 et de degré -1 ou de degré inférieur; appelons z_1 la branche z correspondante, Z_0 et Z_1 les branches Z qui correspondent à z_0, z_1. Nous voyons que si y_1 est de degré $\leqq -2$ en $(x - x_0)$, la branche de fonction $W(y) = Z_1 - Z_0$ doit être rationaloïde sur les rayons y convergeant vers $y = \infty$, et de degré 4 en y; elle doit être, par contre, d'un ordre de grandeur inférieur ou égal à celui de $|y|^4$ si y_1 est de degré -1 en $(x - x_0)$.

Supposons que nous exigions, non seulement que les branches d'intégrales $y(x)$ soient rationaloïdes en leur infini x_0, mais de plus que la différence de deux quelconques de ces branches $y_0 - y_1$, la différence de leurs dérivées $z_1 - z_0$, la différence des carrés de leurs dérivées $Z_1 - Z_0$ soient *rationaloïdes* en x_0. Alors la branche de fonction $Z_1 - Z_0$ de y, dont le degré en y est inférieur ou égal à 4, doit être de degré entier; donc α *doit avoir une des valeurs* $\alpha = 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \ldots$.

Soit maintenant $\nu = 2$. A la branche $z_0(y)$ correspond une branche $y_0(x)$ de degré -2 en $(x - x_0)$. Si la branche $y_1(x)$ est également rationaloïde et de degré -2, la branche de fonction $W(y) = Z_1 - Z_0$ doit être d'un ordre de grandeur inférieur ou égal à $|y|^3$ sur les rayons convergeant vers $y = \infty$: en particulier, pour que la branche $Z_1 - Z_0$ soit rationaloïde en $x = x_0$, il faut qu'elle soit de degré 3 ou $\frac{5}{2}$, ou 2, ..., en y; il faut donc que α ait l'une des valeurs $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 1, \ldots$. Si la branche $y_1(x)$ était de degré -1 en $(x - x_0)$, la branche $Z_1(y)$ serait rationaloïde et de degré 4 en y; ceci exige que $\alpha = 2$.

---

[1] *Voir* égalités (102) et (103).

Équations dont les branches d'intégrales sont rationaloïdes pour tout x fini et sont du type pluripériodique. — L'étude des intégrales $z(y)$, faite comme il vient d'être dit au voisinage de $y=\infty$, pourra être répétée au voisinage de tout point transcendant ordinaire de l'équation (101). En raisonnant comme aux pages 117 et suiv., nous constatons que, pour que les $y(x)$ satisfassent aux conditions voulues, il faut que $\mathrm{M}(y)$ n'ait que des pôles simples qui soient en même temps pôles simples de $\mathrm{N}(y)$ et de $\mathrm{L}(y)$.

Quant à la fonction $\mathrm{L}(y)$ elle ne peut avoir que des pôles simples avec résidus satisfaisant aux conditions auxquelles nous a conduits l'étude des *infinis* de $y(x)$. L'ensemble de ces conditions oblige $\mathrm{L}(y)$ à *avoir l'une des formes qui ont été énumérées par M. Painlevé* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1900.

Équations (86) *contenant la variable x.* — Comme au paragraphe 22 nous démontrerons que, si les branches d'intégrales de l'équation (86) sont du type pluripériodique et sont rationaloïdes pour toute valeur finie x_0 de x, il en sera de même pour l'équation indépendante de x

$$y''=\mathrm{L}(x_0,\ y)\,y'^2+\mathrm{M}(x_0,y)\,y'+\mathrm{N}(x_0,\ y);$$

cette dernière équation appartiendra donc à l'un des types qui ont été déterminés. En conséquence, on pourra toujours effectuer un changement homographique de variable tel que L ne dépende pas de x et ait l'une des formes données par M. Painlevé.

L étant ainsi déterminé, considérons une équation (86) où M et N sont, par rapport à x, des fonctions dont les branches sont algébroïdes en $x=\infty$. Comme aux pages 122 et suivantes, nous pourrons effectuer *un changement de variables $y=x^q\mathrm{Y}$, $x=l^{-1}\mathrm{X}^l$ tel que l'équation transformée en* Y, X *soit « asymptote » à une équation indépendante de* X.

En particulier, *les seules équations* (86) (pour lesquelles L a l'une des formes spécifiées) *qui puissent avoir leurs intégrales uniformes ou à points critiques fixes sont celles qu'une transformation $y=x^q\mathrm{Y}$, $x=l^{-1}\mathrm{X}^l$ rend asymptotes à une équation indépendante de* X *dont les intégrales ont leurs points critiques fixes.*

Donnons-nous, d'autre part, *a priori*, une équation indépendante de X, par exemple, l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$, et cherchons *quelles sont les équations* (86) *qui peuvent lui être asymptotes pour les grandes valeurs de* X. En premier lieu, il faut qu'une transformation homographique $Y = Y_1 + \varphi(X, Y)$, $X_1 = X + \psi(X)$, où φ et ψ ont leurs branches algébroïdes et *de degré négatif* en X, rende L identiquement nul. En second lieu, il faut que *l'équation transformée soit l'une de celles qui ont été déterminées à la fin du paragraphe* 21; pour toute autre forme d'équation, en effet, les $Y(X)$ sont asymptotes à des familles de fonctions autres que les $\wp(X - X_0)$.

SIXIÈME PARTIE.

ÉTUDE A PRIORI DES FONCTIONS MÉROMORPHES DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE.

Nous avons étudié, dans notre cinquième Partie, une méthode qui peut remplacer, dans la recherche des équations du second ordre (85) à intégrales uniformes, la méthode de calcul de M. Painlevé, mais qui a, semble-t-il, une portée plus générale puisqu'elle permet d'étudier les intégrales d'une équation (85) quelconque, que cette équation ait ou non ses points critiques fixes. Si, par contre, nous nous proposions exclusivement d'obtenir et d'étudier le plus vite possible les équations (85) à intégrales uniformes, il semble que nous ayons intérêt à employer une autre méthode qui s'inspire du point de vue adopté dans les deuxième et troisième Parties de ce travail et, en particulier, de la considération des *intégrales tronquées*. Cette méthode fait connaître, sans aucun calcul, sinon directement la forme explicite des équations cherchées, du moins la structure et certaines propriétés fondamentales des fonctions qui y satisfont. Elle permet de compléter quelques-uns de nos résultats. Elle paraît d'ailleurs, et de là vient son intérêt, pouvoir être facilement étendue aux équations d'ordre supérieur au second.

24. Famille de pôles isolés. Intégrales tronquées.

Supposons *a priori* [1] que les intégrales d'une équation

(105) $$y'' = R(x, y, y'),$$

rationnelle en y', algébrique en x et y, soient des fonctions *méromorphes* et voyons comment ces fonctions doivent se comporter.

Remarquons d'abord qu'à l'équation donnée, supposée *non linéaire*, correspond nécessairement au moins une « valeur exceptionnelle », $y = \overline{y}_0$, pour laquelle le théorème de Cauchy ne s'applique pas. Cette valeur est isolée et elle est caractérisée comme il suit : tandis que, pour toute autre valeur y_0 de y, on peut déterminer une intégrale

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0) + \ldots$$

par des conditions initiales arbitraires x_0, y'_0, le choix du premier coefficient y'_0 cesse d'être arbitraire si $y_0 = \overline{y}_0$; ce coefficient ne peut prendre qu'une ou plusieurs valeurs déterminées, $\overline{y}'_0$; le second coefficient est alors, à son tour, déterminé par les valeurs $y_0 = \overline{y}_0$, $y'_0 = \overline{y}'_0$, portées dans l'équation (105). Ainsi, les intégrales égales à $\overline{y}_0$ au point arbitraire x_0, sont de la forme

$$y - \overline{y}_0 = \overline{y}'_0 (x - x_0) + \frac{\overline{y}''_0}{2} (x - x_0)^2 + \ldots,$$

le développement du second membre dépendant d'un paramètre arbitraire c, qui n'entre pas dans les deux premiers coefficients.

L'ensemble des points x_0, où y et y' prennent les mêmes valeurs $\overline{y}_0$, $\overline{y}'_0$, constitue, si $\overline{y}'_0 \neq 0$, une *famille de zéros simples isolés* (jamais confondus) des fonctions $y - \overline{y}_0$. Si $\overline{y}'_0 = 0$, $\overline{y}''_0 \neq 0$, les points consi-

---

[1] Des considérations semblables s'appliqueraient, plus généralement, aux équations (105) analytiques en x dont les intégrales sont méromorphes en tout point distinct des points singuliers ξ des coefficients de R. Après avoir étudié ces équations, on pourrait partir d'une hypothèse nouvelle et chercher si une équation (105) peut avoir des intégrales uniformes d'un autre type que le type méromorphe; mais, dans le cas de l'équation du second ordre, on aboutirait, comme on sait, à une conclusion négative.

dérés x_0 constituent une famille de *zéros doubles isolés* des $y-\overline{y}_0$. Ces deux cas sont les seuls que nous ayons à envisager, car les intégrales d'une équation (105) du premier degré en y'' ne peuvent pas prendre une même valeur $\overline{y}_0$ en trois points confondus. Il peut y avoir, remarquons-le, pour une même valeur $\overline{y}_0$, plusieurs familles de zéros isolés des $y-\overline{y}_0$, correspondant à plusieurs valeurs différentes de $\overline{y}'_0$.

Nous considérerons en particulier une valeur exceptionnelle rejetée à l'infini par un changement de variable homographique préalable. Les intégrales admettent alors une *famille de pôles isolés* (simples ou doubles) au voisinage desquels elles sont représentées par un développement [1]

$$(106)\qquad y=\frac{a_{-2}}{(x-\overline{x})^2}+\frac{a_{-1}}{x-\overline{x}}+f(x-\overline{x},c),$$

f étant une fonction méromorphe de x et [2] de la constante arbitraire c, a_{-2} et a_{-1} étant indépendants de c. Nous prendrons comme *paramètre* c le premier coefficient arbitraire du développement de f dans (106); le développement ne pourra cesser d'être convergent au voisinage de $x=\overline{x}$ que si c devient infini; pour $c=\infty$, le rayon de convergence deviendra nul quel que soit $\overline{x}$; l'intégrale (106) se réduira à $y=\infty$ (qui est nécessairement intégrale particulière de l'équation).

Nous désignerons par les lettres $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots$ (affectées d'indices et surmontées d'une barre) les pôles de la famille (106). Nous allons, ainsi que nous l'avons déjà fait à la fin de notre troisième Partie, *considérer ces divers pôles en fonction les uns des autres.*

Remarque. — Il peut arriver, bien entendu, que les intégrales $y(x)$ admettent plusieurs familles de pôles isolés (*voir* plus haut). Mais nous ne considérerons que les pôles qui appartiennent à une même famille, caractérisée par le développement (106), où $\overline{x}$ et c sont arbitraires.

Soient $\overline{x}_0, \overline{x}_1$ deux pôles d'une même intégrale y et c_0, c_1 les valeurs

---

(1) Cf. *supra*, § 8.

(2) D'après les théorèmes de M. Painlevé.

correspondantes du paramètre c dans les développements (106) de l'intégrale autour de $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$.

Le point $\overline{x}_1$ est une fonction des deux variables $\overline{x}_0$ et c_0; cette fonction ne peut être égale à $\overline{x}_0$ que si c_0 est infini, et elle ne peut être singulière que pour les valeurs de $\overline{x}_0$ et c_0 pour lesquelles elle est infinie (les conditions initiales $\overline{x} = \overline{x}_0$, $c = c_0$ déterminent, en effet, une intégrale $y(x)$, et une seule, qui est par hypothèse fonction méromorphe). Les mêmes remarques s'appliquent à la fonction

$$\overline{x}_0(\overline{x}_1, c_1).$$

Cela dit, de deux choses l'une :

Ou bien il existe des systèmes de valeurs $\overline{x}_0$ et c_0 (ou des systèmes de valeurs de $\overline{x}_1$ et c_1) tels que la fonction $\overline{x}_1(\overline{x}_0, c_0)$ [ou la fonction $\overline{x}_0(\overline{x}_1, c_1)$] devienne infinie;

Ou bien il n'existe pas de tels systèmes : en ce cas, *toute* fonction $\overline{x}_1(\overline{x}_0, c_0)$ est holomorphe pour toutes valeurs de $\overline{x}_0$, c_0, et il en est de même de $c_1(\overline{x}_0, c_0)$; dès lors, quel que soit c_0 supposé fixe, la fonction $\overline{x}_1(\overline{x}_0)$ est holomorphe ainsi que son inverse pour tout $\overline{x}_0$; et, puisque $\overline{x}_1$ n'est jamais égal à $\overline{x}_0$ pour c_0 fini, on a nécessairement

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_0 = \text{const.}$$

Pareillement, le paramètre c_1 est fonction homographique de $\overline{x}_0$ et, ne pouvant devenir infini lorsque $\overline{x}_1 - \overline{x}_0$ est non nul, il se réduit à une constante. Or on voit immédiatement que si l'on a

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_0 = \text{const.}, \qquad c_1 = \text{const.},$$

les $y(x)$ sont des *fonctions périodiques*.

Nous n'aurons dès lors à nous arrêter qu'à la première hypothèse, énoncée ci-dessus; nous appellerons ξ_0, γ_0 *un* système de valeurs de $\overline{x}_0$, c_0 pour lequel $\overline{x}_1$ devient infini; l'intégrale pour laquelle cette circonstance se présente est, d'après la terminologie de notre troisième Partie, une *intégrale tronquée*.

Laissant $\overline{x}_0$ fixe et égal à ξ_0, faisons tendre c_0 vers γ_0 en ligne droite, à partir d'une valeur c'_0, voisine de γ_0, pour laquelle $\overline{x}_1$ est à distance finie. Appelons y_{c_0} l'intégrale $y(x)$, polaire en $\overline{x}_0 = \xi_0$, que définit le paramètre c_0. Il nous sera commode de substituer ici à y une fonction

$$z = \frac{1}{y-a} \quad (a \text{ const.}); \qquad \text{d'où} \qquad z_{c_0} = \frac{1}{y_{c_0} - a}.$$

Les pôles $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ se permutent lorsque le point z_{c_0} décrit un certain lacet fermé (Λ) issu de $z = 0$, et entourant un ou plusieurs points critiques de la fonction $x(z_{c_0})$. Nous appellerons L le chemin correspondant décrit par x de $\overline{x}_0$ en $\overline{x}_1$. Lorsque c_0 tend vers γ_0, le lacet (Λ) et le chemin L se déforment avec continuité; nous tracerons toujours (Λ) de manière que la dérivée z'_{c_0} ne s'annule pas sur son contour (l'origine exceptée); cela est toujours possible, à moins que le contour de (Λ) ne doive passer entre deux zéros de z'_{c_0} [points critiques de la fonction $x(z_{c_0})$] qui viennent se confondre pour une certaine valeur de c_0. Mais, tant que x reste fini, $x(z_{c_0})$ est algébroïde et fonction algébroïde de la constante d'intégration c_0; les valeurs c_0 pour lesquelles on aurait $z'_{c_0} = z''_{c_0} = 0$ en un point de (Λ) seraient donc (si elles existaient) des valeurs isolées et pourraient être évitées.

Ainsi, la déformation continue du lacet (Λ) [sur lequel $x(z_{c_0})$ est algébroïde] ne cessera d'être possible, au voisinage de $c_0 = \gamma_0$, que lorsque ce lacet viendra traverser un point $z_{c_0} = \eta$ pour lequel on a, à la fois, $z'_{c_0} = z''_{c_0} = 0$, $x = \infty$. La où les valeurs η seront données algébriquement par l'équation différentielle, et l'on peut toujours choisir la constante a de manière qu'elles soient finies; il se trouve d'ailleurs que, si les intégrales $y(x)$ sont toutes fonctions méromorphes, la valeur de η est nécessairement nulle.

Je dis, d'autre part, que, lorsque c_0 tend vers γ_0 en ligne droite, la fonction $x(z_{c_0})$ ne peut devenir infinie sur le lacet (Λ) si ce lacet ne vient pas passer sur un point η où $z' = z'' = 0$, $x = \infty$.

En effet, s'il en était autrement, la longueur du lacet (Λ) devrait devenir infinie. Or il faut pour cela (M. Painlevé a mis plus d'une fois ce fait en évidence) que, lorsque c_0 varie, deux points critiques (au moins) $z = u_1$, $z = u_2$, entre lesquels doit passer (Λ) tournent un nombre infini de fois l'un autour de l'autre; en d'autres termes, il faut que u_1 tourne une infinité de fois autour d'une valeur η, ou tourne autour d'une infinité de positions pour lesquelles $u_1 = u_2$; mais, tant que u_1 ne traverse aucun point η, la fonction $c_0(u_1)$ est algébroïde, et si u_1 ne tend vers aucune limite, l'intégrale méromorphe $y(x)$ et le paramètre c_0 (qui restent voisins de γ_0) sont eux aussi indéterminés; j'en conclus que, *pour que* c_0 *tende vers* γ_0, *il faut que* u_1 *tende vers une limite, qui est nécessairement un point* η *où* $z' = z'' = 0$, $x = \infty$. Le lacet (Λ) devra dès lors traverser le point η.

Cela posé, considérons pour $c_0 = \gamma_0$, le chemin L du plan x qui correspond à la première portion du lacet (Λ) limitée en η. Ce chemin va de ξ_0 à l'infini, et, lorsque x le parcourt, z_{γ_0} *tend vers une valeur déterminée* η, *tandis que* z'_{γ_0} *et* z''_{γ_0} *tendent vers zéro.*

En déformant le contour (Λ) entre son origine $z_{\gamma_0} = 0$ et le point η, on obtiendra une infinité de chemins L, contigus au premier, sur lesquels $z_{\gamma_0} - \eta$, z'_{γ_0}, z''_{γ_0} tendent également vers zéro (et, par conséquent, ne présentent plus aucun pôle).

Ainsi, la branche de la fonction $x(z_{c_0})$ correspondant à la seconde portion du lacet (Λ) (entre $z_{c_0} = \eta$ et $z_{c_0} = 0$) est tout entière rejetée à l'infini lorsque c_0 devient égal à γ_0.

Nous retrouvons ainsi, par un raisonnement *a priori*, la propriété caractéristique des intégrales tronquées à laquelle nous avions été conduits, d'autre part, par la voie du calcul.

25. Lignes de pôles. Fonctions connexes.

Revenons maintenant à la fonction $\overline{x}_1(x_0, \overline{c}_0)$. Il résulte de ce qui précède que, *pour* $\overline{x}_0$ *fixe et égal à* ξ_0, *la valeur* $c_0 = \gamma_0$ *pour laquelle la fonction* $\overline{x}_1(\xi_0, c_0)$ *devient infinie est une valeur isolée.*

Faisons en effet varier l'intégrale $y_{c_0}(x)$ à partir de $c_0 = \gamma_0$, et considérons le lacet (Λ) et le chemin L (du plan x) correspondants. En tous les points du chemin L, les dérivées z'_{c_0}, z''_{c_0}, ou (en revenant à la variable y), y'_{c_0}, y''_{c_0}, sont (d'après un théorème classique) fonctions holomorphes de c_0 aussi longtemps que cette intégrale ne présente aucune singularité sur L. Ainsi, aux points de L arbitrairement éloignés, les valeurs y'_{c_0}, y''_{c_0} varieront d'une manière continue au voisinage des valeurs $y'_{c_0} = 0$, $y''_{c_0} = 0$, lorsque c_0 variera à partir de γ_0. Il n'est donc pas possible que y'_{c_0} et y''_{c_0} tendent vers zéro sur L pour des valeurs de c_0 distinctes et arbitrairement voisines de γ_0.

Le même raisonnement prouve que, pour c_0 fixe et égal à γ_0, la valeur $\overline{x}_0 = \xi_0$ pour laquelle $\overline{x}_1(\overline{x}_0, \gamma_0)$ devient infinie est isolée.

Si ξ_0 varie, γ_0 engendre (¹) une certaine fonction analytique de ξ_0, $\varphi_0(\xi_0)$, fonction qui, *partout où elle existe* (²), est continue ainsi que son inverse. Nous nous supposerons placés, pour poursuivre notre analyse, en un point ξ_0 où la fonction φ et son inverse sont toutes deux uniformes.

Je dis que, pour la fonction $\overline{x}_1(\overline{x}_0, \gamma_0)$, le point $\overline{x}_0 = \xi_0$ est nécessairement *point critique transcendant permutant une infinité de déterminations*. En effet, le pôle $\overline{x}_1$ ne pourrait tourner autour de $x = \infty$ que si l'intégrale $y(x)$, à laquelle il appartient, devenait indéterminée. Or cela n'a pas lieu lorsque (c_0 restant égal à γ_0) $\overline{x}_0$ décrit une circonférence arbitrairement petite, δ, autour de ξ_0.

Appelons alors $\ldots, \overline{x}_{1,-1}, \overline{x}_{1,0}, \overline{x}_{1,1}, \ldots$ les valeurs de $\overline{x}_1$ (correspondant à une même valeur $\overline{x}_{00}$ de $\overline{x}_0$) qui se permutent le long de la petite circonférence δ. Ces points sont, d'après la terminologie de notre deuxième Partie, les *sommets d'une ligne de pôles*, pouvant être indéfiniment prolongée dans les deux sens et dont tous les points sont arbitrairement éloignés si $\overline{x}_{00}$ est arbitrairement voisin de ξ_0.

Pour chaque intégrale $y(x)$, le contour de la ligne de pôles sera défini comme il a été dit au paragraphe 10.

Nous parviendrons aux mêmes conclusions en considérant, au lieu de $\overline{x}_1(\overline{x}_0, \gamma_0)$, la fonction $\overline{x}_1(\xi_0, c_0)$: cette fonction admet $c_0 = \gamma_0$ comme point critique transcendant.

Considérons maintenant le paramètre c_1 de l'intégrale y au pôle $\overline{x}_1$. Au voisinage de $\overline{x}_0 = \xi_0$, $c_0 = \gamma_0$, le paramètre c_1 est fonction holomorphe de $\overline{x}_0$ et c_0 pourvu que $c_0 \neq \varphi(\overline{x}_0)$. Je dis que, lorsque c_0 tend vers $\varphi(\overline{x}_0)$, c_1 *tend nécessairement vers une valeur déterminée*.

(¹) ξ_0 et γ_0 sont, en effet, fonctions analytiques des valeurs y, y' prises par l'intégrale tronquée et sa dérivée en un point rejeté à l'infini sur un chemin L.

(²) Comparer troisième Partie, § 15.

En effet, revenons à la variable z égale à $(y-a)^{-1}$. Nous avons vu que, lorsque $\overline{x}_0 = \xi_0$, $c_0 = \gamma_0$, l'intégrale z tend vers une valeur déterminée η sur les chemins L qui ont été définis plus haut. Il en résulte que, pour $\overline{x}_0 = \xi_0$, c_0 arbitrairement voisin de γ_0, l'intégrale z se rapproche arbitrairement de η aux points de grand module situés sur le chemin L qui joint le pôle $\overline{x}_0$ au pôle $\overline{x}_1$. Or, l'équation différentielle étant supposée algébrique, on voit, en considérant le développement (106) de l'intégrale au voisinage du pôle $x = \overline{x}_1$, que, si le paramètre c_1 devenait indéterminé pour c_0 tendant vers γ_0 d'une manière quelconque, il en serait de même de z sur le chemin L.

Donc c_1 reste déterminé. En d'autres termes, les paramètres $\ldots, c_{10}, c_{11}, \ldots$ d'une même intégrale $y(x)$ aux sommets de la ligne de pôles $\ldots, \overline{x}_{10}, \overline{x}_{11}, \ldots$ *tendent tous vers une même limite lorsque*, c_0 tendant vers $\varphi(\overline{x}_0)$, *la ligne de pôles est rejetée à l'infini;* cette limite est nécessairement indépendante de $\overline{x}_0$.

Cela posé, nous distinguerons de nouveau deux cas :

1° La fonction $c_1(\overline{x}_0, \gamma_0)$, où γ_0 est fixe, *se réduit à une constante*. En ce cas, l'intégrale aura même paramètre en tous les pôles $\ldots, \overline{x}_{10}, \overline{x}_{11}, \ldots$. Il en résulte que les intégrales $y(x)$ sont nécessairement des *fonctions doublement périodiques* admettant une première période égale à $\overline{x}_{11} - \overline{x}_{10}$ et une seconde période égale à $\overline{x}_{10} - \overline{x}_0$. La conclusion est immédiate lorsque l'équation différentielle ne contient pas x. Dans le cas où l'équation contient x, il n'est pas possible que c_1 soit constant.

2° Écartant le cas des intégrales doublement périodiques, supposons que $c_1(\overline{x}_0, \gamma_0)$ ne soit pas une constante et appelons γ_1 la valeur limite de c_1 qui a été définie ci-dessus. Il serait facile de démontrer que, si les intégrales $y(x)$ sont méromorphes pour toute valeur de x_1, la limite γ_1 est nécessairement infinie.

En effet, soit d'abord l'équation différentielle (105) indépendante de x. Conservant les notations définies plus haut, effectuons le changement de variable $x - \overline{x}_{10} = t$; nous pouvons considérer l'intégrale tronquée polaire en ξ_0 comme une intégrale $y(t)$, polaire en $t_{10} = 0$, $t_{11} = \overline{x}_{11} - \overline{x}_{10}$, ..., et présentant un pôle $t_0 = \xi_0 - \overline{x}_{10}$ rejeté à l'infini. Supposons alors que γ_1 soit fini; les pôles ..., $t_{1\rho}$, t_{11}, ... sont tous à distance finie, et en tous ces pôles le paramètre de l'intégrale tronquée doit avoir la même valeur γ_1; or cela n'est pas possible, nous l'avons vu, si les intégrales ne sont pas des fonctions périodiques.

En introduisant un paramètre variable dans l'équation différentielle, on établira que γ_1 est encore infini lorsque l'équation contient des termes en x. Mais il n'en serait plus nécessairement ainsi si l'équation présentait un point critique fixe à distance finie. D'une manière générale, quel que soit $R(x, y, y')$, algébrique en x et y, on peut toujours effectuer un changement de variables

$$Y = x^q y, \qquad x = X^l, \tag{107}$$

tel que dans l'équation (105) transformée il n'entre que des termes qui ne deviennent pas infinis avec X (*cf.* 5ᵉ Partie, § 22; 2ᵉ Partie, § 8). Dans ces conditions, on constate : 1° que l'intégrale Y(X) tend vers une limite finie sur les chemins L du plan X; 2° qu'en conséquence, le « paramètre » de Y aux sommets de la ligne des pôles rejetée à l'infini tend vers une limite finie, γ_1.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que l'équation étudiée, que nous continuerons à écrire sous la forme (105), a subi un changement de variables (107) préalable et satisfait aux deux conditions qui viennent d'être énoncées; elle présente alors en $x = 0$ *un point critique algébrique fixe dont nous ne nous occuperons pas.*

Cela dit, revenons à la fonction $c_1(\overline{x}_0, c_0)$ dont nous avons plus haut commencé l'étude.

Plaçons-nous toujours au voisinage de $\overline{x}_0 = \xi_0$, $c_0 = \gamma_0 = \varphi(\xi_0)$, en prenant pour ξ_0 un point au voisinage duquel la fonction φ et son inverse sont uniformes (et, par suite, holomorphes). Pour $c_0 = \varphi(\overline{x}_0)$, nous aurons $c_1 = \gamma_1$, tandis que pour $c_0 \neq \varphi(\overline{x}_0)$, les fonctions $c_1(\overline{x}_0, c_0)$, $\overline{x}_1(\overline{x}_0, c_0)$, $\overline{x}_0(\overline{x}_1, c_1)$, $c_0(\overline{x}_1, c_1)$ seront holomorphes. Je dis, d'autre part, que c_1 ne peut décrire un tour complet autour de γ_1, à moins que c_0 ne décrive une infinité de tours autour de $\varphi(\overline{x}_0)$ [ou $\overline{x}_0$ autour de arg. $\varphi(c_0)$].

Supposons en effet qu'il en soit autrement : les fonctions $\overline{x}_0(c_0, c_1)$, $\overline{x}_1(c_0, c_1)$ resteront alors *déterminées* au voisinage de $c_0 = \gamma_0$, $c_1 = \gamma_1$; elles seront algébroïdes pour c_1 quelconque, voisin mais distinct de γ_1, et c_0 quelconque, voisin de γ_0 ; elles présenteront chacune une singularité transcendante, et prendront les valeurs $\arg.\varphi(c_0)$ et ∞, pour $c_1 = \gamma_1$, c_0 quelconque voisin de γ_0 ; mais cela n'est pas possible, car pour $c_1 = \gamma_1$, $c_0 \neq \varphi(\overline{x}_0)$, la fonction $\overline{x}_1(c_0, c_1)$ reste finie et, par conséquent, algébroïde.

Nous tirerons de cette remarque la conséquence suivante : laissant fixe $\overline{x}_0$ (ou c_0), *faisons tourner indéfiniment* c_0 *autour de* $\varphi(\overline{x}_0)$ [*ou* $\overline{x}_0$ *autour de* $\arg.\varphi(c_0)$] *sur une circonférence de rayon fixe très petit : je dis que* c_1 *tend nécessairement vers* γ_1. En effet, c_1 ne pourrait devenir indéterminé, à moins de tourner une infinité de fois autour de γ_1, ce qui n'est pas, d'après ce qui précède.

Cela posé, soit $\overline{x}_0 = \xi_0$, c_0 fixe voisin de γ_0. Nous avons (*voir* plus haut) une ligne de pôles très éloignée ..., $\overline{x}_{10}$, $\overline{x}_{11}$, ..., où l'intégrale $y(x)$ a pour paramètres ..., c_{10}, c_{11}, ...

Il y a lieu de se poser la question suivante : *Les paramètres* c_{1n}, $c_{1,-n}$, *correspondant aux pôles arbitrairement éloignés sur la ligne de pôles considérée, tendent-ils vers une limite ?* (*cf.* 2e Partie, § 10).

Il résulte des remarques qui précèdent que la réponse est affirmative et que c_{1n}, $c_{1,-n}$ *tendent tous deux vers la limite* γ_1.

Nous retrouvons ainsi une proposition, capitale pour l'étude des fonctions $y(x)$, qui a été obtenue plus haut d'une manière différente.

Partant de là, on pourra étudier les fonctions $c_1(\overline{x}_1)$ dont il a été question à la fin du paragraphe 17.

26. Équations dont les intégrales sont du type monopériodique.

Faisant c_0 égal à γ_0, donnons à $\overline{x}_0$ une valeur $\overline{x}_{00}$ voisine de ξ_0, et considérons la ligne de pôles éloignée ..., $\overline{x}_{10}$, $\overline{x}_{11}$, ... Deux cas peuvent se présenter : ou bien l'intégrale $y_{\overline{x}_{00}}(x)$, dont ces points sont les pôles, présente une ou plusieurs lignes de pôles *au-dessus* de la ligne considérée (c'est-à-dire du côté de cette ligne où ne se trouve pas $\overline{x}_{00}$); ou il n'en est pas ainsi.

Dans le premier cas, je dis que l'*intégrale* $y_{\overline{x}_{00}}(x)$ *présente nécessairement une infinité de lignes de pôles au-dessus de la première*, que nous désignerons par $\mathfrak{L}$. En effet, soit $\mathfrak{L}_1$ une ligne de pôles ..., $\overline{x}_{20}$, $\overline{x}_{21}$, ... située au-dessus de $\mathfrak{L}$. Appelons ..., c_{10}, c_{11}, ... et ..., c_{20}, c_{21}, ... les paramètres de l'intégrale aux pôles de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_1$ (ces paramètres sont tous voisins de γ_1 si $\overline{x}_{00}$ est voisin de ξ_0). Puis, faisons varier par le plus court le pôle $\overline{x}_1$ et le paramètre c_1 de manière à les amener respectivement de $\overline{x}_{10}$ à $\overline{x}_{20}$ et de c_{10} à c_{20}. Lorsque $\overline{x}_1$ et c_1 varient ainsi, $\overline{x}_0$ et c_0 varient à partir des valeurs $\overline{x}_{00}$, γ_0, et tous les pôles des lignes de pôles $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_1$ se déplacent d'une manière continue. Pour chaque nouvelle valeur de c_0, les lignes de pôles sont obtenues en faisant décrire à $\overline{x}_0$ un petit contour fermé δ qui se déforme d'une manière continue à partir de sa position initiale définie page 137. Il résulte de ce qui précède que ce contour enveloppe toujours un point critique transcendant isolé de la fonction $\overline{x}_1(\overline{x}_0)$; d'ailleurs, d'après la définition même de la ligne de pôles, il est impossible qu'une intégrale $y_{c_0}(x)$ présente des pôles situés sur $\mathfrak{L}$ et distincts des sommets ..., $\overline{x}_{10}$, $\overline{x}_{11}$, ... de cette ligne : j'en conclus que *la ligne de pôles* $\mathfrak{L}_1$ *reste toujours au-dessus de* $\mathfrak{L}$. Lorsque $\overline{x}_1$ vient en $\overline{x}_{20}$, et c_1 en c_{20}, nous retombons sur l'intégrale d'où nous sommes partis, et la ligne $\mathfrak{L}$ prend la position occupée primitivement par la ligne $\mathfrak{L}_1$. Celle-ci occupe une nouvelle position au-dessus de $\mathfrak{L}_1$. Donc l'intégrale primitive $y_{\overline{x}_{00}}(x)$ admet une troisième ligne de pôles, $\mathfrak{L}_2$, au-dessus de $\mathfrak{L}_1$. D'où résulte qu'elle en admet une quatrième, et ainsi de suite.

Ainsi, nous trouvons pour les intégrales $y_{\overline{x}_{00}}(x)$ deux types possibles : *type bipériodique*, pour lequel il y a une succession indéfinie de lignes de pôles superposées (*comparer* 2^{e} Partie,); *type monopériodique*, pour lequel la ligne de pôles $\mathfrak{L}$ est « ligne de pôles extrêmes »; lorsque x s'éloigne indéfiniment au-dessus de cette ligne de pôles, y tend vers une limite déterminée (*infinie*); y' tend vers zéro (*comparer* 1re Partie).

Considérons tout d'abord les fonctions du type monopériodique. Nous allons étudier *a priori* certaines propriétés caractéristiques de ces fonctions et démontrer que les ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE NE PEUVENT DÉFINIR AUCUNE FONCTION NOUVELLE DU TYPE MONOPÉRIODIQUE.

Nous avons vu que dans le cas où les intégrales ne sont pas des fonctions périodiques (c'est le seul cas que nous ayons à étudier), la ligne de pôles $\mathcal{L}$ se trouve rejetée à l'infini sans que l'intégrale cesse d'avoir des pôles : chaque intégrale tronquée admet une série de pôles $\ldots, \xi_0, \xi'_0, \xi''_0, \ldots$, les paramètres correspondants étant $\ldots, \gamma_0, \gamma'_0, \gamma''_0, \ldots$.

Faisons varier ξ_0. La valeur γ_0 du paramètre qui donne une intégrale tronquée polaire en ξ_0 est, nous l'avons vu, une fonction analytique $\varphi(\xi_0)$ qui est continue, ainsi que son inverse, partout où elle existe [c'est-à-dire tant que l'intégrale tronquée polaire ξ_0 ne cesse pas d'exister (*voir* § 15)]. Or, en nous reportant à l'analyse qui a été faite dans la troisième Partie de ce travail (§ 15, p. 359), nous voyons immédiatement que l'intégrale tronquée ne peut cesser d'exister pour aucune position de ξ_0 et, d'autre part, que la fonction $\varphi(\xi_0)$ ne peut présenter aucun point critique. Considérons, en effet, les chemins L sur lesquels l'intégrale est tronquée (voir *supra*, p. 135) : l'intégrale $y_{\bar{x}_{00}}(x)$ arbitrairement voisine de l'intégrale tronquée a une ligne de pôles, $\mathcal{L}$, dont tous les sommets sont arbitrairement éloignés sur les chemins L, mais *elle n'a qu'une telle ligne de pôles ;* il n'est donc pas possible qu'elle présente au-dessous de $\mathcal{L}$ une seconde ligne de pôles pouvant être rejetée à l'infini sur les chemins L; on en conclut que l'intégrale tronquée subsiste pour toute position de ξ_0, et qu'elle est toujours unique.

Ainsi, la fonction $\varphi(\xi_0)$, et les fonctions semblables $\gamma'_0 = \varphi_1(\xi'_0)$, $\gamma''_0 = \varphi_2(\xi''_0)$, ... sont partout *uniformes*. D'ailleurs, *si les intégrales $y(x)$ sont méromorphes dans tout le plan* [1], les fonctions $\varphi(\xi_0)$, $\varphi_1(\xi'_0)$, ... sont nécessairement finies pour toutes valeurs finies des variables; elles restent déterminées [2] lorsque ξ_0 tend vers l'infini; ce sont donc

---

[1] Nous avons fait observer déjà qu'en ce cas l'intégrale tronquée augmente indéfiniment sur les chemins L et que la limite γ_1 du paramètre de l'intégrale aux pôles rejetés à l'infini a une valeur infinie.

[2] Si ξ_0 devient infini, ce point appartient à une ligne de pôles rejetée à l'infini, « ligne de pôles extrême », d'après ce qui précède; donc l'intégrale $y(x)$ devient une intégrale tronquée dans plusieurs directions ou se réduit à $y = \infty$.

des polynomes; si elles ne sont pas constantes, elles augmentent indéfiniment lorsque ξ_0, ξ'_0, ... sont rejetés à l'infini sur un chemin L.

Or, supposons que, lorsque ξ_0 est rejeté à l'infini sur un chemin L, le paramètre γ_0 augmente indéfiniment : une infinité de pôles seront nécessairement entraînés avec lui (lorsque le paramètre devient infini, l'intégrale y se rapproche de l'intégrale particulière $y=\infty$, dont tous les pôles sont confondus): on en conclut que les intégrales arbitrairement voisines de l'intégrale tronquée doivent avoir une « ligne de pôles pénultième » dont les sommets sont arbitrairement éloignés sur les chemins L : chose impossible, nous l'avons vu.

Ainsi, les fonctions $\varphi(\xi_0)$, $\varphi_1(\xi'_0)$, ... sont des *constantes*. Ces constantes sont *différentes*, car, si elles étaient égales, les intégrales $y(x)$ seraient nécessairement des fonctions périodiques (*voir* plus haut).

Cela posé, revenons aux intégrales voisines d'une intégrale tronquée. Appliquant une remarque faite plus haut, nous opérerons un changement de variable (107) de manière que, pour l'intégrale tronquée de l'équation transformée, le paramètre correspondant au pôle rejeté à l'infini ait une valeur finie, γ_1. Pour ne pas compliquer nos notations, nous désignerons encore par $y(x)$ les intégrales de la nouvelle équation (qui présente un point critique algébrique fixe en $x=0$). Nous allons démontrer que CETTE ÉQUATION EST TOUJOURS RÉDUCTIBLE A UNE ÉQUATION RATIONNELLE DU PREMIER ORDRE A POINTS CRITIQUES FIXES.

Partons, comme plus haut, de l'intégrale $y_{\overline{x}_{00}}(x)$ polaire en un point $\overline{x}_{00}$ voisin de ξ_0 avec paramètre égal à γ_0. Nous allons envisager une intégrale $y(x)$, variable à partir de $y_{\overline{x}_{00}}(x)$, qui sera définie par un pôle $\overline{x}_1$ (variable à partir de $\overline{x}_{10}$) et par son paramètre c_1 en ce pôle, auquel nous donnerons la valeur

$$c_1 = \frac{\gamma_1 \overline{x}_1 + a}{\overline{x}_1 + b}, \tag{108}$$

où γ_1 est la valeur du paramètre au pôle rejeté à l'infini, et a et b deux constantes choisies de telle sorte que c_1 prenne respectivement les valeurs c_{10}, c_{11} pour $\overline{x}_1 = \overline{x}_{10}$ et $\overline{x}_1 = \overline{x}_{11}$.

Faisons varier $\overline{x}_1$ de $\overline{x}_{10}$ à $\overline{x}_{11}$ en ligne droite, et considérons la variation correspondante de $\overline{x}_0$ et du paramètre c_0 à partir de $\overline{x}_{00}$, γ_0.

Si l'on a pris $\overline{x}_{00}$ très voisin de ξ_0, l'intégrale variable $y(x)$ reste très voisine de l'intégrale tronquée; j'en conclus que, lorsque ($\overline{x}_1$ venant en $\overline{x}_{11}$) nous retombons sur l'intégrale initiale $y_{\overline{x}_{00}}$, $\overline{x}_0$ et c_0 reprennent leurs valeurs initiales. Supposons, en effet, qu'il en soit autrement et que $\overline{x}_0$ vienne en une position $\overline{x}_0$ qui (lorsque $\overline{x}_{00}$ tend vers ξ_0) tend vers un pôle ξ'_0 de l'intégrale tronquée, distinct de ξ_0. Le paramètre c_0 varie alors de $c_{00} = \gamma_0$ à c_{01} arbitrairement voisin de γ'_0. Mais appelons $\overline{\varphi}(\overline{x}_0)$ la fonction de $\overline{x}_0$ engendrée par c_0 lorsque $\overline{x}_1$ varie dans les conditions indiquées plus haut; cette fonction, lorsque $\overline{x}_{00}$ tend vers ξ_0, tend vers la fonction $\varphi(\xi_0)$ qui donne le paramètre de l'intégrale tronquée en fonction du pôle; or nous avons vu que la fonction φ se réduit à la constante γ_0 distincte de γ'_0.

Ainsi le pôle $\overline{x}_0$ et le paramètre c_0 décrivent des courbes fermées δ_0, ε_0 lorsque $\overline{x}_1$ varie dans les conditions indiquées. La courbe δ_0 renferme un point critique transcendant des fonctions $\overline{x}_1(\overline{x}_0)$, $c_1(\overline{x}_0)$; par contre, la fonction c_0 de $\overline{x}_0$ est holomorphe, ainsi que son inverse pour $\overline{x}_0$ intérieur à δ_0.

De ces remarques résulte tout d'abord cette conséquence que les paramètres de l'intégrale considérée $y(x)$ en tous les sommets de la ligne de pôles ..., $\overline{x}_{10}$, $\overline{x}_{11}$, $\overline{x}_{12}$, ... sont tous donnés par la fonction (108) où l'on fait successivement $\overline{x}_1 = \ldots, \overline{x}_{10}, \overline{x}_{11}, \ldots$.

D'autre part, si l'on fait varier $\overline{x}_1$ d'une manière quelconque, c_1 restant lié à $\overline{x}_1$ par la relation (108), la fonction $c_1(\overline{x}_0)$ sera holomorphe, ainsi que son inverse, pour toute valeur non nulle de $\overline{x}_0$; [d'ailleurs si les intégrales $y(x)$ présentent, comme nous l'avons supposé, une singularité algébrique fixe en $\overline{x}_0 = 0$, il en est de même de $\overline{c}_0(\overline{x}_0)$].

On conclura de là que la famille d'intégrales $y(x)$ pour laquelle on a la relation (108) est fonction algébrique de la constante d'intégration et vérifie une *équation algébrique du premier ordre*.

Il en sera de même, dès lors, des intégrales $y(x)$, *méromorphes dans tout le plan*, que définit une équation (105) sur laquelle on n'a pas effectué le changement de variables (107).

Pour une telle équation on a, nous l'avons vu, $\gamma_1 = \infty$; la relation

(108) sera alors linéaire (¹) en $\overline{x}_1$; la fonction $c_0(\overline{x}_1)$ correspondante sera holomorphe dans tout le plan ainsi que son inverse; elle sera donc linéaire. On conclura de là que pour la famille d'intégrales $y(x)$ considérée, *y' est rationnel en y et linéaire en x.*

27. Équations dont les intégrales sont du type bipériodique.

L'étude des intégrales $y(x)$ du type bipériodique conduit à des conclusions toutes différentes.

Faisant $\overline{x}_0 = \xi_0$, c_0 voisin de γ_0, considérons *deux* lignes de pôles très éloignées (*voir* ci-dessus)

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{L}_1, & \ldots, \ \overline{x}_{10}, & \overline{x}_{11}, & \ldots, \\ \mathfrak{L}_2, & \ldots, \ \overline{x}_{20}, & \overline{x}_{21}, & \ldots, \end{array}$$

et appelons $\ldots, c_{10}, c_{11}, \ldots, c_{20}, c_{21}, \ldots$ les paramètres correspondants. Laissant $\overline{x}_{10}$ fixe (égal à ξ_{10}), nous pouvons faire tendre $\overline{x}_{20}$ vers l'infini *au-dessus* de la ligne de pôles $\mathfrak{L}_2$ (c'est-à-dire du côté de $\mathfrak{L}_2$ où n'est pas $\mathfrak{L}_1$). Dans ces conditions, c_{10} est fonction de $\overline{x}_{20}$ et tend (d'après ce qui a été vu plus haut) vers une limite déterminée que nous appellerons γ_{10}. De même $\ldots, \overline{x}_{1,-1}, \overline{x}_{1,1}, \ldots$ tendent vers des positions déterminées, $\ldots, \xi_{1,-1}, \xi_{1,1}, \ldots$, qui sont arbitrairement éloignées en même temps que $\overline{x}_{10}$ (car il résulte de la définition des lignes de pôles que tous les sommets d'une ligne de pôles tendent vers l'infini en même temps); les paramètres $\ldots, c_{1,-1}, c_{11}, \ldots$ tendent, de leur côté, vers des valeurs $\ldots, \gamma_{1,-1}, \gamma_{1,1}$; l'intégrale $y(x)$ correspondante est une *intégrale tronquée* qui présente une « ligne de pôles extrême » $\ldots, \xi_{1,-1}, \xi_{10}, \xi_{11}$ (*voir* 2ᵉ Partie, § 15) dont tous les sommets sont arbitrairement éloignés.

Considérons alors, comme plus haut, $\ldots, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \ldots$ en fonction de $\xi_{10} = \overline{x}_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots$ et posons

$$\ldots, \qquad \gamma_{10} = \varphi_0(\xi_{10}), \qquad \gamma_{11} = \varphi_1(\xi_{11}), \qquad \ldots,$$

(¹) Suivant une remarque faite au paragraphe 8, le paramètre c_1 (en un pôle $\overline{X}_1$) de l'intégrale $Y(X)$, transformée de $y(x)$ par le changement (107), est fonction linéaire du paramètre c_1 de $y(x)$ au pôle $\overline{x}_1$ correspondant $\overline{X}_1$.

Les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots,$ *au lieu d'être différentes, comme au paragraphe précédent, doivent cette fois coïncider.* En effet, faisons varier l'intégrale tronquée : le pôle $\overline{x}_0$ de cette intégrale reste à distance finie lorsque $\ldots, \xi_{10}, \xi_{11}, \ldots$ tendent vers l'infini; si nous considérons alors ξ_{10} et γ_{10} comme fonctions de $\overline{x}_0$, nous voyons (en raisonnant comme au paragraphe 25), que ces fonctions présentent une singularité transcendante isolée, $\overline{x}_0 = \chi_{10}$, pour laquelle $\xi_{10} = \infty$. Lorsque $\overline{x}_0$ décrit un nombre infini de tours autour de χ_0, ξ_{10} se permute avec une infinité d'autres pôles qui sont nécessairement les pôles $\ldots, \xi_{1,-1}, \xi_{11}, \ldots$ de la ligne de pôles rejetée à l'infini avec ξ_{10}; de même γ_{10} se permute avec $\ldots, \gamma_{1,-1}, \gamma_{11}, \ldots$; donc γ_{10} engendre une fonction de ξ_{10} qui prend les valeurs respectives $\ldots, \gamma_{1,1}, \gamma_{11}, \ldots,$ pour $\xi_{10} = \ldots, \xi_{1,-1}, \xi_{11}, \ldots$; *c'est la fonction* $\varphi_0(\xi_{10})$.

Ces faits entraînent immédiatement la conséquence suivante : *une équation* (105) *indépendante de* x *ne peut admettre, comme intégrales du type bipériodique, que des fonctions doublement périodiques.*

En effet, il résulte de l'analyse de la page 142 que, si l'équation est indépendante de x, les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ sont des constantes. Ces constantes devant être égales, les intégrales sont nécessairement des fonctions périodiques (*voir* plus haut, p. 138).

Ainsi, sans aucuns calculs, nous pouvons, par la méthode qui vient d'être exposée, *trouver toutes les équations* (105) *indépendantes de* x *dont les intégrales sont méromorphes.* Ces équations, ou bien sont réductibles à des équations du premier ordre, ou bien sont intégrables au moyen des fonctions elliptiques. Dans le cas où l'équation dépend de x, on pourra poursuivre l'étude des lignes de pôles et des paramètres correspondants de manière à retrouver et à compléter les résultats obtenus dans la troisième Partie de ce Mémoire.

SEPTIÈME PARTIE.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES. PROBLÈME DE M. SCHLESINGER.

28. Développement d'une intégrale première.

L'étude asymptotique des transcendantes du type bipériodique, qui a été faite dans la deuxième et la troisième Partie de ce travail, nous a conduits à représenter ces transcendantes par des développements en séries qui procèdent suivant les puissances d'un paramètre.

Soit, par exemple, à étudier l'équation (26) asymptote à $Y'' = 6Y^2 - 6$. Nous écrivons l'équation ainsi (*cf.* p. 165) :

$$Y'' = 6Y^2 - 6 + \lambda\left(-\frac{Y'}{X} + a\frac{Y}{X^2}\right),$$

et nous développons l'intégrale par rapport aux puissances de λ. Nous avons fait, dans le cas des intégrales tronquées, une étude détaillée des développements obtenus (*voir* les développements de la troisième Partie, p. 341 et suivantes, 351 et suivantes). Ces développements sont ceux qui rendent le mieux compte de l'allure des transcendantes, mais les fonctions qu'ils représentent ne sont uniformes que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, $a = \frac{4}{25}$.

On obtiendra d'autres développements remarquables en cherchant à évaluer *par approximations successives*, non plus l'intégrale générale de l'équation du second ordre, mais une *intégrale première*.

Nous savons que le résultat de l'intégration de l'équation

$$(109) \qquad Y'' = 6Y^2 - 6 - \frac{Y'}{X} + a\frac{Y}{X^2}$$

s'écrit sous la forme suivante [*voir* 2^e^ Partie, égalité (16 *bis*)] :

$$(110) \qquad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - 2\int_{X_0}^{X}\frac{Y'^2}{X}dX + 2a\int_{X_0}^{X}\frac{YY'}{X^2}dX.$$

Proposons-nous de développer le second membre par rapport aux puissances de X^{-1}. La question revient à calculer les intégrales définies du second membre en négligeant d'abord les termes en X^{-1}, puis dans une seconde approximation les termes en X^{-2}, et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi successivement les relations suivantes :

1° $$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D;$$

2° $$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - 2\int_{X_0}^{X} \frac{\sqrt{4Y^3 - 12Y + D}}{X} Y'\, dX$$

ou

$$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - \frac{2U_1(Y)}{X},$$

en posant

$$U_1(Y) = \int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D}\, dY$$

(*cf.* § 10, p. 319);

3° $$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - \frac{2U_1}{X} + 2\int \frac{U_1}{X^2} dX + \frac{aY^2}{X^2} + 2\int \frac{U_1\, dY}{Y^2\sqrt{4Y^3 - 12Y + D}}$$

ou

$$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - 2\frac{U_1(Y)}{X} + \frac{4U_2(Y) + aY}{X^2},$$

en posant

$$U_2 = \int \frac{U_1(Y)}{\sqrt{4Y^3 - 12Y + D}} dY,$$

et ainsi de suite.

Les coefficients des puissances négatives de X *sont des combinaisons elliptiques obtenues par intégrations superposées* (D est une constante arbitraire).

La méthode d'approximations successives qui permet de développer la relation (110) est susceptible d'applications diverses. Elle donnera lieu à des calculs particulièrement simples lorsque l'on considérera une équation en y, x (non transformée en Y, X) dont les intégrales sont partout méromorphes.

Considérons une équation (B) que nous écrirons sous la forme

$$(B_1)\; y'' = 6cy^2 - 6cx + h,$$

ou une équation (C) que nous écrirons

$$(\mathrm{C}_1)\; y'' = 2cy^3 - 2cxy + h.$$

De la première, on tire

$$y'^2 = 4cy^3 - 12cxy + 12c\int y\,dx + 2hy,$$

et de la seconde,

$$(111)\qquad y'^2 = 2hy + cy^4 - 2cxy^2 + 2c\int y^2\,dx.$$

En calculant les seconds membres par approximations successives, on est conduit à des développements qui procèdent suivant les puissances de c et de h^{-1}.

Considérons, par exemple, l'équation (111). En négligeant successivement les termes en c, les termes en c^2, ..., nous pourrons mettre $\int y^2\,dx$ sous la forme d'un polynome en x, y, y'.

Plus généralement, nous pouvons former une suite de relations récurrentes qui permettent de calculer les intégrales $\int y^m dx$, $\int x^p y^m dx$ par approximations successives et nous donnent le développement de ces intégrales par rapport aux puissances de c et de h^{-1}.

Posons

$$\mathrm{I}_m = \int y^m\,dx, \qquad \mathrm{I}_{p,m} = \int x^p y^m\,dx$$

(p et m entiers positifs).

Nous aurons, d'après (111), à la constante d'intégration près :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_m = {} & \frac{1}{2h}\int y^{m-1}\left(y'^2 - cy^4 + 2cxy^2 - 2c\int y^2\,dx\right)dx \\
= {} & \frac{1}{2h}\frac{y^m y'}{m} - \frac{1}{2hm}\int y^m y''\,dx + \frac{c}{h}(\ldots) \\
= {} & \frac{1}{2h}\frac{y^m y'}{m} - \frac{1}{2m}\int y^m\left(1 + \frac{2cy^3}{h} - \frac{2cxy}{h}\right)dx \\
& - \frac{c}{2h}\int (y^{m+3} - 2xy^{m+1})\,dx - \frac{c}{h}\int y^{m-1}\mathrm{I}_2\,dx;
\end{aligned}$$

d'où

$$(112)\quad (1+2m)\mathrm{I}_m = \frac{y^m y'}{h} + \frac{c}{h}\left[2(m+1)\mathrm{I}_{1,m+1} - (m+2)\mathrm{I}_{m+3} - 2m\int y^{m-1}\mathrm{I}_2\,dx\right].$$

Nous aurons pareillement

$$\mathrm{I}_{p,m} = \frac{1}{2h}\int x^p y^{m-1}(y'^2 - cy^4\ldots)\,dx$$
$$= \frac{1}{2h}\left[\frac{x^p y^m y'}{h} - \int \frac{p}{m} x^{p-1} y^m y'\,dx - \int \frac{p}{m} x^p y^m (h + 2cy^3 - 2cxy^2)\,dx + \ldots\right];$$

d'où l'on tire

$$(113)\quad (1+2m)\mathrm{I}_{p,m} = \frac{x^p y^m y'}{h} - \frac{p}{h(m+1)} x^{p-1} y^{m+1} + \frac{p(p-1)}{2h(m+1)}\mathrm{I}_{p-2,m+1} + \frac{c}{h}\left[2(m+1)\mathrm{I}_{p+1,m+1} - (m+2)\mathrm{I}_{p,m+3} - 2m\int x^p y^{m-1}\mathrm{I}_2\,dx\right].$$

Les égalités (112) et (113) nous permettent de développer I_m et $\mathrm{I}_{p,m}$ par rapport aux puissances de c. En effet, en faisant d'abord $m = z$ dans (112), puis multipliant par y^m et intégrant, nous avons

$$\int y^{m-1}\mathrm{I}_2\,dx = \frac{y^{m+2}}{5(m+2)h} + \frac{c}{h}\left(6\int y^{m-1}\mathrm{I}_{13}\,dx - 4\int y^{m-1}\mathrm{I}_5\,dx\right) - \frac{4c}{5h}\int y\int y\mathrm{I}_2\,dx,$$

que nous porterons dans la relation générale (112); et ainsi de suite.

Remplaçant les I_m et I_{pm} par leurs développements, nous obtenons le développement de la relation (111) par rapport aux puissances de c. Nous avons

$$(114)\quad y'^2 = k + 2hy + c\left(y^4 - 2xy^2 + \frac{2y^2y'}{h}\right) + c^2\left[\frac{y'}{h^2}(\star y^5 + \star xy^3) + \star\frac{y^4}{h^2}\right] + \ldots,$$

k étant la constante d'intégration. Le coefficient de c_n est un polynome en x, y, y', h^{-1}; il est linéaire en y', de degré $2n+1$ en y, de degré

$n-1$ en x, de degré n en h^{-1}; il est homogène et de degré $(6n-2)$ par rapport aux quantités y, $x^{\frac{1}{2}}$, $h^{-\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{y'}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Il est intéressant de remarquer que *c'est précisément à la relation* (114) *qu'on aboutit lorsqu'on cherche à obtenir une intégrale première de l'équation* (C_1) *en partant des résultats obtenus par MM. Schlesinger et Richard Fuchs.*

29. Le problème de M. Schlesinger.

La proposition démontrée par MM. Richard Fuchs et Schlesinger s'énonce, comme on sait, aux notations près [1], de la manière suivante :

Considérons l'équation linéaire

$$(115)\quad \frac{y''}{y}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-q)^2}+\frac{c}{(x-t)^2}+\frac{d}{x(x-q)} \\ +\frac{3}{4(x-\lambda)^2}+\frac{\alpha}{x(x-q)(x-t)}+\frac{\beta}{x(x-q)(x-\lambda)},$$

qui a trois points singuliers effectifs, $x=0$, $x=q$, $x=t$, et un point apparemment singulier $x=\lambda$: on suppose que λ, α, β soient fonctions de t et l'on cherche à déterminer les fonctions λ, α, β de manière que les coefficients du groupe de l'équation (115) soient indépendants de t. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $\lambda(t)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre

$$(\mathrm{VI}_a)\quad \lambda''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-q}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-q}-\frac{1}{t-\lambda}\right)\lambda' \\ +2\frac{\lambda(\lambda-q)(\lambda-t)}{t^2(t-q)^2}\left[a+b+c+d+1-\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)q}{(\lambda-q)^2}t \right.\\ \left. +\frac{\left(b+\frac{1}{4}\right)q}{(\lambda-q)^2}(t-q)-\frac{ct(t-q)}{(\lambda-t)^2}\right],$$

---

[1] J'adopte les notations fort commodes qui ont été proposées par M. Garnier (*Thèse*, p. 51), à cela près que chez M. Garnier le point singulier q est égal à 1.

et qu'on ait

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{t^2(t-q)^2}{4\lambda(\lambda-q)(\lambda-t)}\lambda'^2 \\ &\quad -\lambda(\lambda-q)(\lambda-t)\left[\frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda^2}+\frac{b+\frac{1}{4}}{(\lambda-q)^2}+\frac{c}{(\lambda-t)^2}+\frac{d+\frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-q)}\right], \\ \beta &= \frac{-t(t-q)}{2(\lambda-t)}\lambda' - \frac{\lambda(\lambda-q)}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-q}\right). \end{aligned}\right.$$

Or, l'équation (VI_a) équivaut à l'équation (VI) de M. Gambier. C'est l'équation $\lambda'' = \mathrm{R}(\lambda, \lambda', t)$ la plus générale qui ait ses points critiques fixes (elle a trois points critiques : $t = 0$, $t = q$, $t = \infty$).

La proposition de MM. Richard Fuchs et Schlesinger est intéressante à plus d'un titre, mais elle n'entre dans le cadre de notre travail que dans la mesure où elle permet de pousser plus avant l'étude anatomique des fonctions $\lambda(t)$ que nous avons entreprise. Pour voir ce qu'elle peut donner à ce point de vue, il convient de la confronter avec les résultats fournis par d'autres méthodes, et l'on commencera, tout naturellement, par faire cette confrontation pour les fonctions $\lambda(t)$ les plus simples, qui ne vérifient pas l'équation (VI_a) la plus générale, mais bien une dégénérescence de cette équation.

M. Painlevé a fait observer que la proposition de MM. Richard Fuchs et Schlesinger fournit un mode de représentation analytique des fonctions $\lambda(t)$ définies par l'équation (VI_a). En effet, en faisant circuler le point x, d'abord au tour des points singuliers $x = 0$, $x = q$ de l'équation linéaire (115), puis autour des points singuliers $x = q$, $x = t$, on obtient deux relations

$$(117)\qquad \varphi_1(\lambda, \lambda', t) = \text{const.}, \qquad \varphi_2(\lambda, \lambda', t) = \text{const.},$$

exprimant que les coefficients des transformations subies par y sont indépendants de t : ces relations sont méromorphes en λ, λ', analytiques (à points critiques fixes $t = 0$, $t = q$, $t = \infty$) en t; les coefficients des puissances de λ et λ' dans φ_1, φ_2 s'expriment, comme on sait, au moyen d'intégrales définies superposées.

La représentation des intégrales $\lambda(t)$ au moyen des relations (117) peut être instructive. Mais, pour interpréter ces relations, il faudrait savoir au juste quelle famille particulière d'intégrales $\lambda(t)$ représente l'équation différentielle du premier ordre $\varphi_1 = c$ ou $\varphi_2 = c$. Or, l'étude de ces équations se trouve fort compliquée par cette circonstance qu'au premier abord on ne voit pas du tout ce qu'elles peuvent devenir lorsque l'équation (VI_a) dégénère en l'une des équations plus simples qui n'ont que deux points critiques fixes ou dont les intégrales sont uniformes.

Voyons si nous pouvons jeter quelque jour sur ces questions.

On peut faire dégénérer l'équation (VI_a) de bien des manières différentes. J'indique d'abord la manière qui, avec les notations que j'ai adoptées, est la plus facile à interpréter.

Faisons tendre le point singulier q de l'équation linéaire vers l'origine $x = 0$. Au cas où les coefficients a, b, c, d restent finis, les équations (115) et (VI_a) subsistent et conservent leur forme, l'origine ne cessant pas d'être point singulier régulier pour l'équation linéaire. La relation $\varphi_1 = c$, obtenue en faisant circuler x autour de $x = 0$ et $x = q$, ne fait plus alors qu'exprimer que le coefficient de x^{-2} dans la nouvelle équation linéaire est une constante : elle s'écrit

$$a + b + d - \alpha t^{-1} - \beta\lambda^{-1} = \text{const.}, \tag{118}$$

α et β étant donnés par les relations (116), où l'on fait $q = 0$.

Ainsi, pour $q = 0$, l'équation (VI_a) admet une intégrale première (118) dont le premier membre est rationnel en λ, t, entier et du second degré en λ'. Il ne peut plus, dès lors, exister une seconde relation (117), $\varphi_2 = \text{const.}$ distincte de (118). Supposons, en effet, qu'il en existe une et développons φ_2 par rapport aux puissances de λ'. Quelle que soit l'intégrale considérée, elle vérifiera une relation (118) qui donnera λ'^2 linéairement en λ'; portant dans φ_2, nous voyons que l'intégrale se trouvera vérifier une équation du premier ordre *linéaire* en λ', méromorphe en λ : or, cela n'est pas possible.

Cela dit, supposons maintenant que, tout en faisant tendre q vers zéro, nous fassions augmenter indéfiniment les coefficients a, b, c, d de l'équation linéaire (115). Posant

$$a = a_0 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}, \qquad b = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}, \qquad \ldots,$$
$$d = d_0 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2},$$

nous voyons facilement que, si les coefficients a_i, b_i satisfont aux relations

$$a_1+b_1+d_1=0, \qquad a_2+b_2+d_2=0, \qquad 2b_2+d_2=0,$$

les seconds membres des équations (115) et (VI_a) et des égalités (116) s'exprimeront toujours en termes finis lorsque q tendra vers zéro. Prenons en particulier

$$b_0=c_0=0, \qquad b_1=0, \qquad b_2=a_2, \qquad d_1=-a_1, \qquad d_2=-2a_2;$$

l'équation (115) devient

$$\frac{y''}{y}=\frac{a_0}{x^2}-\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_2}{x^4}+\frac{c}{(x-t)^2}+\frac{3}{4(x-\lambda)^2}+\frac{\alpha}{x^2(x-t)}+\frac{\beta}{x^2(x-\lambda)}; \tag{119}$$

l'équation (VI_a) se transforme en

$$\begin{aligned}(\mathrm{V}_a)\quad \lambda''=&\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2(\lambda-t)}\right]\lambda'^2-\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'\\&+\frac{2\lambda^2(\lambda-t)}{t^4}\left[(a_0+c+1)-\frac{a_1t}{\lambda^2}-\frac{\alpha_2}{\lambda^2}+\frac{2a_2t}{\lambda^3}-\frac{ct^2}{(\lambda-t)^2}\right],\end{aligned}$$

et les relations (116) deviennent

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha&=\frac{t^4}{4\lambda^2(\lambda-t)}\lambda'^2-\lambda^2(\lambda-t)\left[\frac{a_0+1}{\lambda^2}-\frac{a_1}{\lambda^3}+\frac{a_2}{\lambda^4}+\frac{c}{(\lambda-t)^2}\right],\\ \beta&=\frac{-t^2}{2(\lambda-t)}\lambda'-\lambda.\end{aligned}\right.$$

L'équation (V_a) se transforme en l'équation (V) de M. Gambier lorsqu'on effectue la transformation

$$t=t_1^{-1}, \qquad \lambda=(1-\lambda_1)t.$$

Lorsque q tend vers zéro dans de telles conditions, la relation $\varphi_1=c$, obtenue en faisant tourner la variable x de l'équation linéaire autour de $x=0$, s'exprime toujours en termes finis. *On peut la développer par rapport aux puissances de a_1 et a_2; les termes indépendants de a_1, a_2 sont ceux du premier membre de* (118); les termes suivants sont des polynomes en λ, α, β, a_0, c.

Quant à la relation $\varphi_2=$ const., du fait qu'elle disparaît pour $a_1=a_2=0$, il résulte qu'elle s'évanouit aussi lorsque a_1 et a_2 sont différents de zéro. On peut également s'en rendre compte en raisonnant comme il suit.

M. Painlevé (*cf.* Gambier, *Thèse*, p. 5) fait dégénérer l'équation (VI) où $q=1$ par un procédé autre que celui dont nous nous sommes servis. Il pose $t=1+\varepsilon t_1$, $\lambda=\lambda_1$, égale les coefficients a_1, a_2 à des polynomes en ε^{-1} convenablement choisis et fait tendre ε vers zéro : il obtient ainsi une équation (V) en λ_1 et t_1. L'équation linéaire correspondante peut s'écrire (*comparer* Garnier, *Thèse*, p. 52) :

$$(121)\quad \frac{y''}{y}=\frac{a_0}{(x_1-1)^2}+\frac{a_1 t_1}{(x_1-1)^3}+\frac{a_2 t_1^2}{(x_1-1)^4}+\frac{c}{x_1^2}+\frac{3}{4(x_1-\lambda_1)^2}-\frac{\alpha t_1}{x_1(x_1-1)^2}-\frac{\beta t_1}{(x_1-1)^2(x_1-\lambda_1)};$$

elle s'obtient en posant dans (115) $x=1+\varepsilon x_1$.

Lorsque ε tend vers zéro, la relation $\varphi_1=$ const. relative à l'équation (115) où $q=1$, s'évanouit. Par contre, la relation $\varphi_2=$ const., obtenue en faisant tourner la variable x autour des points singuliers $x=q=1$ et $x=t$, varie avec continuité et reste finie : à la limite, cette relation est celle que donne l'équation (121) lorsqu'on fait tourner x_1 autour de $x_1=1$. Je dis que cette dernière relation n'est autre que la relation $\varphi_1=$ const., à laquelle donne lieu l'équation linéaire (119) introduite par le premier mode de dégénérescence. En effet, nous avons dit que pour passer de (V_a) à l'équation (V) de M. Gambier, il fallait poser $t=t_1^{-1}$, $\lambda=(1-\lambda_1)t_1$. Faisant cette transformation dans (119) et posant en outre $x=\frac{1-x_1}{t_1}$, nous retombons sur l'équation (121), l'origine $x=0$ devenant le point $x_1=1$.

Ainsi, nous n'avons plus désormais qu'une relation (117) unique. Pour l'interpréter, poursuivons notre processus de dégénérescence.

L'équation linéaire (119) n'a plus, à distance finie, que deux points singuliers $x=0$, $x=t$. Reportons ce dernier point à l'infini en posant $t=\frac{T}{\varepsilon}$ et prenons, d'autre part, pour a_0 et c, des valeurs

$$a_0=\frac{a_0'}{\varepsilon},\qquad c=\frac{c'}{\varepsilon^2},$$

de l'ordre de grandeur de ε^{-1} et ε^{-2}.

Lorsque ε tend vers zéro, l'équation (119), où l'on remplace α et β

par les dégénérescences des expressions (120), peut s'écrire

$$(122)\qquad \frac{y''}{y} = \frac{A}{x^2} - \frac{a_1}{x^3} + \frac{a_2}{x^4} = \frac{a'_0}{xT} + \frac{c'}{T^2} + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\beta}{x^2(x-\lambda)},$$

où l'on a

$$(123)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{T^2}{4}\dfrac{\lambda'^2}{\lambda^2} + \dfrac{a'_0\lambda}{T} + \dfrac{a_1}{\lambda} - \dfrac{a_2}{\lambda^2} - \dfrac{c'\lambda^2}{T^2}, \\ B = \dfrac{T}{2}\lambda' - \lambda, \end{cases}$$

et l'équation (V_a) dégénère en

$$(III_a)\qquad \lambda'' = \frac{\lambda'^2}{\lambda} - \frac{\lambda'}{T} - \frac{2a'_0\lambda^2}{T^3} + \frac{2a_1}{T^2} + \frac{4c'\lambda^3}{T^4} - \frac{4a_2}{\lambda T^2},$$

équation qu'on ramène au type (III) de M. Painlevé en effectuant la transformation

$$\lambda = \sqrt{T}\lambda_1, \qquad T = T_1^{-2}.$$

Lorsque nos équations dégénèrent ainsi, la fonction φ_1, premier membre de la relation (117) obtenue en tournant autour de $x = 0$, varie avec continuité. Pour $a_1 = a_2 = 0$, elle se réduit toujours à $A - \beta\lambda^{-1}$ [*voir* (118), p. 153], ou

$$(124)\qquad \varphi_1 = \frac{T^2}{4}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + \frac{a'_0\lambda}{T} - \frac{c\lambda^2}{T^2} - \frac{T}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Cela posé, faisons dégénérer l'équation (III_a) en une équation (I) de M. Painlevé [équation (C) de notre quatrième Partie]. Il suffira pour cela de faire

$$(125)\qquad T = 1 + \varepsilon^2\tau, \qquad \lambda = 1 + \varepsilon\eta$$

et de poser

$$(126)\qquad a'_0 = \frac{-h}{2\varepsilon^3} - \frac{4g}{\varepsilon^6}, \qquad c' = \frac{g}{\varepsilon^6}, \qquad a_1 = \frac{4g}{\varepsilon^6}, \qquad a_2 = \frac{g}{\varepsilon^6}.$$

Lorsque ε tend vers zéro, l'équation (III_a) dégénère en

$$(II_a)\qquad \eta'' = h + 8g\eta^3 - 8g\tau\eta.$$

Je dis que *la fonction* φ_1 *reste, dans ces conditions, fonction continue de* g.

En effet, développons-la par rapport aux puissances de y en la multipliant par $4\varepsilon^2$ (que nous supposons très petit, quelconque), et posons

$$4\varepsilon^2\varphi_1 = \overline{\varphi}_0 + g\overline{\varphi}_1 + g^2\overline{\varphi}_2 + \ldots = \text{const.} \tag{127}$$

Pour $y = 0$, on aura

$$\varepsilon^2\varphi_1 = \frac{(1+\varepsilon^2\tau)^2}{4}\frac{\eta'^2}{(1+\varepsilon\eta)^2} + \frac{a'_0\varepsilon^2(1+\varepsilon\eta)}{(1+\varepsilon^2\tau)} - c'\frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon\eta)^2}{(1+\varepsilon^2\tau)^2} - \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2\tau)}{2}\frac{\eta'}{1+\varepsilon\eta}, \tag{127 bis}$$

égalité dont le premier membre, pour $\varepsilon = 0$, se réduit à

$$\overline{\varphi}_0 = \eta'^2 - 2h\eta. \tag{128}$$

En se reportant à l'équation (122) et à l'expression (123) de β, on voit que les fonctions suivantes $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$, ... sont des polynomes en $\overline{\varphi}_0$, λ, λ', T^{-1}.

Considérons, d'autre part, une intégrale $\eta_0(\tau)$ de l'équation (128) $\overline{\varphi}_0 = \text{const.}$, et développons par rapport à g l'intégrale $\eta(\tau)$ de l'équation (III_a) [transformée en η, τ suivant (125)], qui satisfait aux mêmes conditions initiales, soit

$$\eta = \eta_0 + g\eta_1 + g^2\eta_2 + \ldots.$$

Nous aurons d'après (127) la relation linéaire

$$\frac{\partial\overline{\varphi}_0(\eta_0, \eta'_0)}{\partial\eta'}\eta'_1 + \frac{\partial\overline{\varphi}_0(\eta_0, \eta'_0)}{\partial\eta}\eta_1 + \overline{\varphi}_1(\eta_0, \eta'_0) = 0, \tag{129}$$

dont les coefficients sont des polynomes en η_0, η'_0, τ, *suivis de termes qui tendent vers zéro avec* ε.

Mais, d'autre part, η_1 satisfait à l'équation linéaire du second ordre obtenue en portant le développement de η dans (III_a), équation linéaire qu'il est loisible d'écrire $\left[\text{en multipliant les deux membres par } \frac{\partial\overline{\varphi}_0(\eta_0, \eta'_0)}{\partial\eta'}\right]$:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}_0(\eta_0, \eta'_0)}{\partial\eta'}\eta''_1 - \frac{\partial\overline{\varphi}_0(\eta_0, \eta'_0)}{\partial\eta'}\left(\frac{2\varepsilon\eta'_0}{1+\varepsilon\eta_0} - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon\tau}\right)\eta'_1 - \ldots = 0. \tag{130}$$

Dérivons alors (129) par rapport à τ : l'expression obtenue, si l'on néglige les termes qui tendent vers zéro avec ε, ne peut différer du premier membre de (130) que par un polynome divisible par $\overline{\varphi}_0$, polynome que nous avons toujours le droit de retrancher de $\overline{\varphi}_1$. Or, le premier membre de (130) est fonction continue de ε lorsque ε tend vers zéro : donc il en sera de même de $\overline{\varphi}_1$.

Raisonnant semblablement sur $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$, ..., nous voyons que nous pouvons toujours prendre pour expressions de ces fonctions des fonctions continues de ε : lorsque ε tend vers zéro, $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$, ... deviennent des *polynomes en* η, η', τ dont les degrés peuvent être aisément déterminés.

Considérons en effet l'équation linéaire (122), où nous remplaçons a'_0, c'_1, a_1, a_2 par les valeurs (126) : elle s'écrit

$$\frac{y''}{y} = p_0 + p_1, \tag{131}$$

en posant

$$p_0 = -\frac{x^{-2}}{2}\left(\frac{h}{\varepsilon^3} + \frac{\eta'^2 - 2h\eta}{\varepsilon^2} + \ldots\right) + x^{-1}\left(\frac{h}{2\varepsilon^3} + \ldots\right) + \ldots,$$

$$p_1 = \frac{g}{\varepsilon^6}\left[\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{(1+\varepsilon^2\tau)x} + \frac{1}{(1+\varepsilon^2\tau)^2}\right].$$

La relation

$$\varphi_1 = \overline{\varphi}_0 + g\overline{\varphi}_1 + \ldots = \text{const.}$$

pourra être calculée en développant l'intégrale générale de (131) sous la forme $y = y_0 + gy_1 + \ldots$, faisant tourner x autour de $x = 0$, et considérant la variation de $\log y$. On aura

$$y_0 = x^\mu f_0,$$

f_0 étant uniforme à l'origine et $\mu^2 - \mu = \frac{h}{\varepsilon^3} + \ldots$. Puis

$$y_1 = y_0 \int \frac{\int p_1 y_0^2\, dx}{y_0^2}\, dx, \qquad y_2 = y_0 \int \frac{\int p_1 y_0 y_1\, dx}{y_0^2}\, dx, \qquad \ldots$$

Prenant, d'après (128), $\overline{\varphi}_0 = \eta'^2 - 2h\eta$, on trouvera pour $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$, ... des fonctions présentant les caractères suivants : les produits $\overline{\varphi}_1\varepsilon^4$,

$\varphi_2\varepsilon^{10}, \ldots$ sont développables par rapport aux puissances positives de ε; les coefficients des développements sont des polynomes en $\varepsilon\eta$, $\frac{\eta'}{\varepsilon}$, $\varepsilon^2\tau$; en ce qui concerne h, on voit que le calcul des intégrales

$$\int p_1 y_0^2\, dx = \int p_1 f_0^2 x^{\frac{h}{\varepsilon^3}+\ldots}\, dx, \qquad \ldots,$$

introduit (dans les développements de $\bar\varphi_1, \bar\varphi_2, \ldots$ en ε) des puissances négatives de $\frac{h}{\varepsilon^3}$; $\bar\varphi_1$ sera du premier degré en $\varepsilon^3 h^{-1}$, $\bar\varphi_2$ du second degré, et ainsi de suite.

Ces remarques nous font connaître *la forme* prise par les fonctions $\bar\varphi_1, \bar\varphi_2, \ldots$ *pour* $\varepsilon = 0$, *étant donné que, d'après ce qui précède, les termes de degré négatif en* ε *se détruisent nécessairement.*

On voit que $\bar\varphi_1$ est un polynome en η^2, $\eta\eta'$, τ, $\frac{\eta}{h}$ qui ne peut comprendre qu'un terme en η^4, un terme en $\eta^2\tau$, un terme en $\eta^2\frac{\eta'}{h}$. Et ainsi de suite.

Nous constatons que LE DÉVELOPPEMENT

$$(\eta'^2 - 2h\eta) + g\bar\varphi_1 + g^2\bar\varphi_2 + \ldots = \text{const.},$$

AINSI OBTENU, EST CELUI MÊME AUQUEL NOUS AVONS ÉTÉ CONDUITS DIRECTEMENT A LA FIN DU PARAGRAPHE 28.

La conclusion serait la même pour l'équation (B) $\lambda'' = 6y^2 - 6x$ obtenue par dégénérescence de (II_a).