

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELIE CARTAN

Les groupes réels simples, finis et continus

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 31 (1914), p. 263-355

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__263_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES

GROUPES RÉELS SIMPLES, FINIS ET CONTINUS,

PAR M. E. CARTAN.

Introduction.

Je me propose dans ce Mémoire de déterminer les structures *réelles* des groupes simples finis et continus. La détermination des structures *complexes* est faite depuis longtemps, grâce aux recherches de M. Killing, complétées par les miennes ⁽¹⁾. A chaque type *complexe* de groupes simples d'ordre r , correspond évidemment un type *réel* de groupes simples d'ordre $2r$, en regardant chacun des r paramètres complexes comme l'ensemble de deux paramètres réels. Mais il lui correspond aussi des structures réelles simples, d'une autre nature, d'ordre r . En particulier, les constantes de structure des différents types complexes de groupes simples, telles qu'elles se présentent dans les travaux de M. Killing, sont réelles : donc elles définissent déjà une structure réelle d'ordre r ; on peut l'appeler la structure réelle *normale* correspondant au type complexe considéré.

La forme quadratique $\psi(e)$, qui donne la somme des carrés de l'équation caractéristique d'un groupe réel, joue dans ce qui suit un rôle fondamental. J'introduis un entier δ , qui est la différence entre le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs de cette forme quadratique. On peut appeler ce nombre δ le *caractère* du groupe réel. Les groupes réels d'ordre r qui correspondent à un même type complexe d'ordre r se classent en général complètement d'après leur *caractère*.

⁽¹⁾ Voir en particulier E. CARTAN, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Thèse), Paris, Nony, 1894. Je désignerai dans ce qui suit cet Ouvrage par C.

Voici les résultats auxquels j'ai été conduit :

Il correspond au type complexe (A) de groupes simples de rang l et d'ordre $l(l+2)$, deux catégories de groupes réels de même ordre :

Dans la première catégorie il y a un type réel de caractère l si l est pair ; il y a deux types réels de caractère l et $-l-2$, si l est impair ;

Dans la seconde catégorie il y a $\left[\frac{l+2}{2} \right]$ types réels distincts caractérisés par les valeurs

$$\delta = 1 - m^2 \quad \left(m = l+1, l-1, l-3, \dots, l+1-2 \left[\frac{l}{2} \right] \right).$$

Au type complexe (B) de groupes simples de rang l et d'ordre $l(2l+1)$, correspondent $l+1$ types réels de même ordre ; leurs caractères sont de la forme

$$\delta = l - 2m(m+1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, l).$$

Au type complexe (C) de groupes simples de rang l et d'ordre $l(2l+1)$ correspondent deux catégories de groupes réels de même ordre :

Dans la première catégorie il y a un type réel de caractère l ;

Dans la seconde catégorie il y a $\left[\frac{l+2}{2} \right]$ types réels distincts dont les caractères sont

$$\delta = -l - 2m^2 \quad \left(m = l, l-2, \dots, l-2 \left[\frac{l}{2} \right] \right).$$

Au type complexe (D) de groupes simples de rang l et d'ordre $l(2l-1)$ correspondent deux catégories de groupes réels de même ordre :

Dans la première catégorie, il y a un type réel de caractère $-l$;

Dans la seconde catégorie, il y a $l+1$ types réels dont les caractères sont

$$\delta = l - 2m^2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, l).$$

Au type complexe (E) de groupes simples de rang 6 et d'ordre 78, correspondent deux catégories de groupes réels de même ordre :

Dans la première catégorie, il y a deux types réels de caractères 6 et -26 ;

Dans la seconde catégorie, il y a trois types réels de caractère 2, -14 et -78 .

Au type complexe (E) de groupes simples, de rang 7 et d'ordre 133 correspondent quatre types réels de même ordre et de caractères 7, -5 , -25 et -133 .

Au type complexe (E) de groupes simples, de rang 8 et d'ordre 248 correspondent trois types réels de même ordre et de caractères 8, -24 et -248 .

Au type complexe (F) de groupes simples, de rang 4 et d'ordre 52, correspondent trois types réels de même ordre et de caractères 4, -20 et -52 .

Au type complexe (G) de groupes simples, de rang 2 et d'ordre 14, correspondent deux types réels de même ordre et de caractères 2 et -14 .

Dans tous les cas il y a un type réel de caractère égal au *rang* : c'est le type *normal*; il y a aussi un type réel dont le caractère est égal à l'ordre *changé de signe du groupe*. Pour ce dernier type la forme quadratique $\psi(e)$ est une forme définie négative et les racines de l'équation caractéristique sont toutes purement imaginaires.

J'indique un représentant linéaire homogène de chacun des types réels obtenus. Ma Thèse contenait déjà, en fait, le groupe linéaire et homogène au nombre minimum de variables de chacun des types réels normaux. Chacun de ces groupes est le plus grand sous-groupe du groupe linéaire homogène spécial qui laisse invariante une certaine variété algébrique réelle (c'est-à-dire représentée par des équations à coefficients réels). Pour *certain*s des autres types réels correspondant au même type complexe, on a encore des groupes linéaires et homogènes laissant invariante une autre variété réelle, mais se déduisant de la première par une transformation linéaire *imaginaire*. Un des résultats de ce Mémoire est donc, en particulier, la détermination de toutes les variétés réelles qui se déduisent de la première par une

transformation linéaire *imaginaire* sans s'en déduire par une transformation linéaire *réelle*.

Pour certains types, au contraire, on a des groupes linéaires et homogènes laissant invariante la variété *complexe* formée des points réels et imaginaires qui satisfont aux équations de la variété invariante par le groupe normal; mais ces groupes laissent en même temps invariante une *forme d'Hermité*.

Un cas particulier enfin donne un groupe linéaire à variables et paramètres *quaternioniens*.

I. — Généralités.

Considérons un groupe réel simple \mathcal{G} fini et continu d'ordre ρ ; sa structure est définie par les relations

$$(1) \quad (\mathfrak{N}_\alpha \mathfrak{N}_\beta) = \sum_s^{1, \dots, \rho} c_{\alpha\beta s} \mathfrak{N}_s \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \rho)$$

entre les ρ transformations infinitésimales $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_\rho$ qui engendrent le groupe, les $c_{\alpha\beta s}$ étant des constantes *réelles*.

Les formules (1) définissent également la structure d'un groupe *complexe* G , dont la transformation infinitésimale la plus générale est

$$X = e_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 + \dots + e_\rho \mathfrak{N}_\rho,$$

où les coefficients e_α sont des nombres complexes arbitraires. La transformation X sera *réelle* si les e_α sont tous réels, *imaginaire* dans le cas contraire. Ce groupe G est simple ou composé.

Débarrassons-nous d'abord du cas où G est composé. Il est alors certainement semi-simple, sinon son plus grand sous-groupe invariant intégrable serait défini par des équations linéaires à coefficients réels entre les e_α et ces mêmes équations définiraient un sous-groupe invariant intégrable du groupe réel \mathcal{G} , ce qui est contraire à l'hypothèse. Les sous-groupes simples dont est formé le groupe G sont ou réels ou imaginaires conjugués deux à deux. Il en résulte que G est formé de deux sous-groupes simples imaginaires conjugués. Par suite, si l'un d'eux est engendré par les transformations imaginaires X_1, X_2, \dots, X_r , l'autre est engendré par les transformations conjuguées.

THÉOREME. — On a une première classe de groupes réels simples \mathfrak{G} en partant d'un groupe simple complexe \mathfrak{g} et mettant chacune des r transformations infinitésimales indépendantes X_α de ce groupe sous la forme

$$X_\alpha = \mathfrak{X}_\alpha + i\mathfrak{Y}_\alpha.$$

Les $2r$ transformations réelles $\mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{Y}_\alpha$ engendrent le groupe réel G .

Il ne reste plus qu'à examiner le cas où le groupe complexe G défini par les formules (1) est lui-même simple.

Lorsqu'on a un groupe complexe simple d'ordre r , on peut mettre sa structure sous une forme normale en partant d'une transformation arbitraire \mathfrak{Y} du groupe et considérant les racines de l'équation caractéristique relative à \mathfrak{Y} . Si l désigne le rang du groupe, l'équation caractéristique admet l racines nulles, les autres racines étant toutes distinctes et deux à deux égales et de signes contraires. Aux l racines nulles appartient un sous-groupe γ d'ordre l contenant \mathfrak{Y} et formé de transformations échangeables entre elles. A chaque racine non nulle ω_α appartient une transformation X_α telle qu'on ait

$$(\mathfrak{Y} X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha.$$

Ces transformations X_α ne sont d'ailleurs pas définies complètement; on peut, sans changer les formules de structure, les multiplier par des coefficients ρ_α convenablement choisis.

Si l'on prend pour \mathfrak{Y} une transformation arbitraire réelle de G , le groupe γ contient l transformations indépendantes réelles; les racines ω_α sont de plus ou réelles, ou imaginaires conjuguées deux à deux. Si ω_α et $\omega_{\bar{\alpha}}$ sont supposées complexes conjuguées, on a évidemment une relation de la forme

$$X_\alpha = \lambda_\alpha \bar{X}_{\bar{\alpha}},$$

où $\bar{X}_{\bar{\alpha}}$ désigne la transformation conjuguée de $X_{\bar{\alpha}}$.

Les $r - l$ coefficients λ_α satisfont à certaines relations :

1° On a les relations évidentes

$$\lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\bar{\alpha}} = 1,$$

où $\bar{\lambda}_{\bar{\alpha}}$ désigne le conjugué de $\lambda_{\bar{\alpha}}$;

2° On a d'autres relations en exprimant que les X_α aussi bien que les \bar{X}_α satisfont aux formules de structure normales du groupe G .

Enfin on peut choisir les coefficients ρ_α de manière à diminuer l'indétermination qui subsiste dans le choix des λ_α .

C'est donc le calcul des coefficients λ_α , rendus aussi simples que possible, qui constitue la partie importante de la solution du problème qui nous occupe.

La classification des groupes réels \mathcal{G} qui correspondent à un même groupe simple complexe G sera énormément facilitée par la considération de la forme quadratique $\psi(e)$ qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique relative à la transformation réelle la plus générale de \mathcal{G} . Nous désignerons par δ la différence entre le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs de cette forme. Nous désignerons par $\psi_0(e)$ la forme quadratique à l variables qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique relative à la transformation réelle la plus générale du sous-groupe γ , et par δ_0 le nombre correspondant. L'entier δ est indépendant du choix de la transformation \mathcal{T} , l'entier δ_0 en dépend au contraire. L'entier δ est ce que nous appellerons le *caractère* du groupe réel.

Après ces généralités nous allons passer en revue les différents types complexes de structures simples.

II. — Groupes G du type (A).

Si l'on appelle $n - 1$ le rang du groupe ($n \geq 2$), l'équation caractéristique admet $n(n - 1)$ racines

$$\omega_\alpha - \omega_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n),$$

où les n quantités ω_α peuvent être supposées liées par la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 0.$$

Les transformations normales sont de la forme

$$X_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n),$$

et les formules de structure sont (1)

$$(1) \quad (X_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma}) = X_{\alpha\gamma}, \quad (X_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}) = X_{\alpha\alpha} - X_{\beta\beta}.$$

La transformation $X_{\alpha\beta}$ appartient à la racine $\omega_\alpha - \omega_\beta$. Les n transformations $X_{11}, X_{22}, \dots, X_{nn}$, liées par la relation

$$(2) \quad X_{11} + X_{22} + \dots + X_{nn} = 0,$$

constituent le sous-groupe γ .

Les quantités $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ relatives à la transformation $\Sigma e_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}$ sont les racines de l'équation

$$(3) \quad \begin{vmatrix} e_{11} - \omega & e_{12} & e_{13} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} - \omega & e_{23} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on suppose $\Sigma e_{\alpha\alpha} = 0$.

Deux cas sont à distinguer. Ou bien l'équation (3) relative à la transformation réelle \mathfrak{g} a ses coefficients réels; ou bien certains de ces coefficients sont imaginaires.

I. Dans le premier cas les quantités ω_α relatives à \mathfrak{g} sont réelles ou imaginaires conjuguées deux à deux. Soit $\omega_{\bar{\alpha}}$ la quantité complexe conjuguée de ω_α .

Posons, d'après cela,

$$(4) \quad X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (\alpha \neq \beta).$$

En exprimant que les formules (1) sont vérifiées par les $X_{\alpha\beta}$ et les $\bar{X}_{\alpha\beta}$, on obtient

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\gamma\beta},$$

ce qui permet d'écrire

$$(5) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta},$$

(1) C., p. 81.

où les λ_α ne sont d'ailleurs définis qu'à un facteur près. On a ensuite

$$\lambda_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 1,$$

ce qui donne

$$(6) \quad \bar{\lambda}_1 \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \lambda_2 = \dots = \bar{\lambda}_n \lambda_n = k.$$

Le nombre k est réel et, grâce à l'indétermination des λ_α , on peut le supposer de module 1, ce qui donne $k = \pm 1$.

On a enfin, d'après les formules (4) et (5),

$$(X_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}) = (\bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \bar{X}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}});$$

d'où, en tenant compte de (2),

$$(7) \quad X_{\alpha\alpha} = \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}.$$

Soit p le nombre des quantités ω_α réelles, $2q$ le nombre des quantités ω_α imaginaires. Si p n'est pas nul, on voit, d'après (6), que k est égal à $+1$.

Calculons les deux entiers δ_0 et δ . A un facteur numérique près positif, la forme quadratique $\psi(e)$ est identique à la somme des carrés des racines de l'équation (2), c'est-à-dire

$$(8) \quad \psi(e) = h[e_{11}^2 + e_{22}^2 + \dots + e_{nn}^2 + 2 \sum e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}] \quad (h > 0).$$

Ici, d'après (7), il y a p quantités $e_{\alpha\alpha}$ réelles, et $2q$ imaginaires; on a donc

$$\delta_0 = p - 1.$$

Pour évaluer δ , remarquons que si $e_{\alpha\beta}$ n'est pas égal à un multiple de $\bar{e}_{\beta\alpha}$, au rectangle $e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}$ correspond un rectangle conjugué, ce qui donne autant de carrés positifs que de carrés négatifs. Si, au contraire, $\beta = \bar{\alpha}$, l'hypothèse que la transformation

$$e_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} X_{\beta\alpha}$$

est réelle donne

$$(9) \quad e_{\beta\alpha} = \frac{\bar{\lambda}_\alpha}{\bar{\lambda}_\beta} \bar{e}_{\alpha\beta} = \frac{\bar{\lambda}_\alpha}{\bar{\lambda}_{\bar{\alpha}}} \bar{e}_{\alpha\beta} = k \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \bar{e}_{\alpha\beta}.$$

On a donc finalement

$$\delta = p - 1 + 2kq \quad (k = \pm 1).$$

1° $k = +1$. On a

$$\delta_0 = p - 1, \quad \delta = n - 1.$$

2° $k = -1$. On a

$$\delta_0 = -1, \quad \delta = -n - 1.$$

Avant de faire la classification des groupes ainsi obtenus remarquons que, quelle que soit la transformation infinitésimale réelle \mathfrak{y} de G , l'équation (3) est à coefficients réels. Cela résulte des formules

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} e_{\bar{\alpha}\bar{\beta}},$$

conséquences des formules (4) et qui montrent facilement que le premier membre de l'équation (3) est identique à son conjugué. Il résulte de là qu'aucun des groupes réels qu'on vient d'étudier ne peut être isomorphe à l'un des groupes du cas II qu'on étudiera tout à l'heure.

Cela étant, les groupes qui correspondent à $k = +1$ ne peuvent être isomorphes à ceux pour lesquels k est égal à -1 , parce que le caractère δ n'est pas le même dans les deux cas. *Nous allons voir que tous les groupes de caractère $\delta = n - 1$ sont isomorphes entre eux, ainsi que tous les groupes de caractère $\delta = -n - 1$.*

1° Supposons $k = +1$ et d'abord $p < n$. Il y a q couples de racines $\omega_\alpha, \omega_\beta$ imaginaires conjugués. A l'un de ces couples correspond, d'après (9), la transformation réelle

$$X_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha X_{\beta\alpha}.$$

Les q transformations réelles ainsi obtenues, jointes aux $p + q$ transformations réelles (à somme nulle)

$$X_{11}, \dots, X_{pp}, \quad X_{\alpha\alpha} + X_{\beta\beta} \quad (\beta = \bar{\alpha})$$

définiront un sous-groupe réel γ de $n - 1$ transformations échangeables entre elles. Si l'on prend pour \mathfrak{y} une transformation arbitraire de ce sous-groupe, on obtient, d'après (8),

$$\delta_0 = n - 1.$$

On peut donc toujours supposer $p = n$. Dans ce cas-là on a

$$X_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \bar{X}_{\alpha\beta},$$

avec

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 = \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = \dots = \lambda_n \bar{\lambda}_n = 1.$$

Les formules de structure (1) subsistent quand on multiplie $X_{\alpha\beta}$ par $\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}$, où les ρ_α sont arbitraires. Si les λ_α deviennent Λ_α , on a

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_\alpha} = \frac{\lambda_1}{\lambda_\alpha} \frac{\rho_1 \bar{\rho}_\alpha}{\rho_1 \rho_\alpha},$$

on voit qu'on peut disposer des ρ_α de manière à rendre tous les λ_α égaux. On a donc finalement

$$X_{\alpha\beta} = \bar{X}_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\alpha} = \bar{X}_{\alpha\alpha}.$$

Enfinement *tous les groupes réels de la catégorie I de caractère $n - 1$ sont isomorphes entre eux et leur structure est définie par les formules (1), où les $X_{\alpha\beta}$ désignent les transformations réelles qui engendrent le groupe.*

Il existe un groupe linéaire et homogène réel à n variables admettant cette structure, c'est le groupe linéaire et homogène spécial à n variables; c'est d'ailleurs le seul.

2° Supposons maintenant $\delta = -n - 1$. On a alors $k = -1$, $p = 0$. Le nombre n est pair, $n = 2q$, et les quantités ω_α sont deux à deux imaginaires conjuguées. Soit

$$\omega_2 = \bar{\omega}_1, \quad \omega_4 = \bar{\omega}_3, \quad \dots, \quad \omega_{2q} = \bar{\omega}_{2q-1}.$$

On a, d'après (6),

$$(10) \quad \bar{\lambda}_1 \lambda_2 = \bar{\lambda}_2 \lambda_1 = \bar{\lambda}_3 \lambda_4 = \bar{\lambda}_4 \lambda_3 = \dots = -1.$$

En multipliant les $X_{\alpha\beta}$ par les coefficients indéterminés $\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}$, on trouve

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_1}{\rho_2 \bar{\rho}_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3} = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_3}{\rho_2 \bar{\rho}_3} \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad \frac{\Lambda_1}{\Lambda_5} = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_5}{\rho_2 \bar{\rho}_5} \frac{\lambda_1}{\lambda_5}, \quad \dots,$$

ce qui permet de supposer

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \dots = \lambda_{2q-1}.$$

Les formules (10) donnent alors

$$-\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \dots = \lambda_{2q}.$$

On a finalement

$$(11) \quad X_{2\alpha-1, 2\beta-1} = \overline{X_{2\alpha, 2\beta}}, \quad X_{2\alpha-1, 2\beta} = -\overline{X_{2\alpha, 2\beta-1}}.$$

Tous les groupes de la catégorie I de caractère $-n-1$ (n pair) sont donc isomorphes entre eux.

Il n'y a aucun groupe linéaire et homogène réel à n variables qui corresponde à cette structure, sinon, en effet, en regardant ces n variables comme complexes, on aurait, par un changement complexe de variables,

$$X_{\alpha\beta} = x_{\alpha} p_{\beta}.$$

On aurait alors évidemment des formules

$$(12) \quad x_{\alpha} = a_{\alpha} \overline{x_{\alpha}},$$

et le groupe réel considéré laisserait invariables les formules (12). Or, si l'on applique à ces formules les transformations réelles

$$\begin{aligned} x_{2\alpha-1} p_{2\beta-1} + x_{2\alpha} p_{2\beta} &+ \overline{x_{2\alpha-1}} \overline{p_{2\beta-1}} + \overline{x_{2\alpha}} \overline{p_{2\beta}}, \\ x_{2\alpha-1} p_{2\beta} - x_{2\alpha} p_{2\beta-1} &+ \overline{x_{2\alpha-1}} \overline{p_{2\beta}} - \overline{x_{2\alpha}} \overline{p_{2\beta-1}}, \end{aligned}$$

on trouve

$$a_{2\beta-1} = a_{2\alpha-1}, \quad a_{2\alpha-1} \overline{a_{2\beta-1}} = -1,$$

ce qui est impossible.

Il existe un groupe réel linéaire et homogène à $4q$ variables; il suffit en effet de poser

$$\begin{aligned} X_{\alpha} &= x_{2\alpha-1} + \overline{x_{2\alpha}} j \\ (j^2 &= -1, ij = -ji = k, ik = -ki = j, jk = -kj = i, k^2 = -1), \end{aligned}$$

où j désigne une unité quaternionnienne. On a alors q variables quaternionniennes soumises au groupe

$$(13) \quad X'_{\alpha} = A_{\alpha 1} X_1 + A_{\alpha 2} X_2 + \dots + A_{\alpha q} X_q \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q),$$

où les $A_{\alpha\beta}$ désignent des quaternions arbitraires (dont les $4q^2$ paramètres réels sont liés par une certaine relation).

II. Supposons maintenant que les coefficients de l'équation (3) ne soient pas tous réels pour la transformation \mathfrak{F} . Alors chaque quantité ω_α est imaginaire et a pour conjuguée une quantité $-\omega_{\bar{\alpha}}$.

Posons, d'après cela,

$$(14) \quad X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \quad (\alpha \neq \beta).$$

On obtient, comme plus haut,

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} &= -\lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\gamma\beta}, \\ (15) \quad \lambda_{\alpha\beta} &= -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$(16) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_{\bar{1}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_{\bar{2}}} = \dots = \frac{\lambda_n}{\lambda_{\bar{n}}} = k.$$

Comme les λ_α ne sont déterminés qu'à un facteur près, k n'est déterminé que par son module : on peut donc supposer k réel et positif; comme d'ailleurs k^n est le rapport de deux nombres conjugués, k est égal à 1.

Par un procédé analogue à celui de tout à l'heure, on trouve

$$X_{\alpha\alpha} = -\bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}.$$

Supposons que pour p indices α , on ait $\omega_\alpha = -\bar{\omega}_\alpha$. Calculons les entiers δ_0 et δ . Il y a d'abord p des quantités $e_{\alpha\alpha}$ qui sont purement imaginaires, les $n - p - 2q$ autres étant deux à deux imaginaires conjuguées de signes contraires. On a donc

$$(17) \quad \delta_0 = -(p - 1) = 1 - p.$$

Pour calculer δ , remarquons que les seuls termes de $\psi(e)$ qui interviennent dans le calcul de δ sont les termes $e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}$ pour lesquels on a

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha, & \beta &= \beta; \\ e_{\alpha\beta} &= -\frac{\bar{\lambda}_\alpha}{\lambda_\beta} e_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

comme d'ailleurs on a

le terme $e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha}$ donne deux carrés de même signe, ce signe étant celui de $-\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}$. Les formules (16) montrent que, si $\bar{\alpha} = \alpha$, λ_α est réel. Supposons donc que λ_α soit du signe de $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. On obtient

$$\delta = 1 - p - 2 \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta,$$

la somme étant étendue aux p indices α , pour lesquels $\bar{\alpha} = \alpha$.

Si, parmi les p nombres λ_α , h sont positifs et k négatifs, on trouve sans difficulté

$$(18) \quad \delta = 1 - (h - k)^2.$$

En définitive on a, dans le cas II,

$$\delta_0 = 1 - p, \quad \delta = 1 - m^2,$$

l'entier m étant de même parité que n et au plus égal à n .

Nous allons montrer que *tous les groupes pour lesquels m a la même valeur sont isomorphes*. En effet, supposons d'abord $p < n$ et considérons le sous-groupe réel γ formé des n transformations réelles indépendantes échangeables entre elles (dont les $p + q$ premières ont une somme nulle) :

$$iX_{\alpha\alpha} \quad (\bar{\alpha} = \alpha), \\ i(X_{\alpha\alpha} + X_{\beta\beta}), \quad i(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}) \quad (\alpha \neq \beta; \bar{\alpha} = \beta).$$

La réalité des q dernières résulte de ce que, d'après (14), (15) et (16), on a

$$X_{\alpha\beta} = -\bar{X}_{\alpha\beta}.$$

Pour ce sous-groupe γ on a manifestement

$$\delta_0 = -(n - 1);$$

autrement dit, on peut toujours supposer $p = n$.

Dans le cas $p = n$, les formules (14) deviennent

$$X_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \bar{X}_{\beta\alpha},$$

où les λ_α sont réels. On peut d'ailleurs disposer des indéterminées ρ_α ,

pour rendre les λ_α égaux à ± 1 . On peut enfin, en changeant au besoin tous les signes des λ_α , ce qui est permis, faire en sorte que le nombre des λ_α positifs soit supérieur ou égal au nombre des λ_α négatifs.

On aura donc finalement les formules

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\alpha\beta} &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{\mathbf{X}}_{\beta\alpha} & (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h = +1; \varepsilon_{h+1}, \dots, \varepsilon_n = -1) \\ \text{avec} & & \delta = 1 - (n - 2h)^2. \end{aligned}$$

Dans la catégorie II, il existe donc $\left[\frac{n+2}{2} \right]$ structures réelles essentiellement distinctes, chacune d'elles étant définie par le caractère $\delta = 1 - m^2$.

Parmi ces groupes il n'en existe aucun qui soit linéaire et homogène à n variables réelles. Mais on a un représentant simple du type de caractère $1 - (2h - n)^2$ en considérant le plus grand groupe linéaire et homogène à n variables complexes qui laisse invariante la forme d'Hermite

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + \varepsilon_n x_n \bar{x}_n.$$

RÉSUMÉ. — Les groupes simples réels qui proviennent d'un groupe simple complexe du type (A) se partagent en deux catégories :

I. Dans la catégorie I, il y a, si n est impair, un seul type réel de caractère $n - 1$.

Si n est pair il y a, outre le type précédent, un second type de caractère $-n - 1$.

II. Il y a, dans la catégorie II, $\left[\frac{n+2}{2} \right]$ types distincts pour lesquels on a

$$\delta = 1 - m^2 \quad \left[m = n, n - 2, \dots, n - 2 \left(\frac{n}{2} \right) \right].$$

Nous avons implicitement supposé, dans ce qui précède, n supérieur à 2. Si n était égal à 2, l'ensemble des quantités ω_1, ω_2 est identique à l'ensemble des quantités $-\omega_1, -\omega_2$. Il suffirait donc de considérer la première catégorie.

On a ainsi, dans le cas $n = 2$, deux types : le premier de caractère $\delta = 1$, le second de caractère $\delta = -3$.

Appartiennent au premier type, le groupe linéaire et homogène spécial

à deux variables réelles, et le groupe linéaire et homogène à deux variables complexes x_1, x_2 laissant invariante la forme d'Hermite

$$x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2.$$

Appartiennent au second type le groupe

$$X' = AX,$$

où X est une variable quaternionienne, et A un paramètre quaternionien de module égal à 1 (groupe des rotations autour d'un point fixe), et le groupe linéaire et homogène à deux variables complexes x_1 et x_2 laissant invariante la forme d'Hermite

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2.$$

III. — Groupes G du type (B).

Si l est le rang du groupe, les transformations peuvent se mettre sous la forme (1)

$$X_{\alpha\beta} = -X_{\beta\alpha} \quad (\alpha \neq \beta; \alpha, \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

avec les formules de structure

$$(1) \quad \begin{cases} (X_{\alpha\beta} X_{\gamma\beta'}) = X_{\alpha\gamma}, & (X_{\alpha\beta} X_{\alpha'\beta'}) = X_{\alpha\alpha'} + X_{\beta\beta'} \\ (\alpha + \gamma \neq 0; \alpha' = -\alpha, \beta' = -\beta; \alpha, \beta, \gamma = 0, \pm 1, \dots, \pm l). \end{cases}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$\omega_\alpha, \quad \omega_\alpha + \omega_\beta \quad (\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha);$$

la transformation $X_{0\alpha}$ appartient à la racine ω_α , la transformation $X_{\alpha\beta}$ ($\beta \neq -\alpha$) à la racine $\omega_\alpha + \omega_\beta$; enfin le sous-groupe γ est formé des transformations $X_{11'}, X_{22'}, \dots, X_{ll'}$.

Les racines $0, \pm \omega_1, \dots, \pm \omega_l$ sont données par l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} -\omega & e_{1'0} & e_{10} & \dots & e_{l'0} & e_{l0} \\ e_{01} & e_{1'1} - \omega & 0 & \dots & e_{l'1} & e_{l1} \\ e_{01'} & 0 & e_{11'} - \omega & \dots & e_{l'1'} & e_{l1'} \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{0l'} & e_{1'l'} & e_{1l'} & \dots & 0 & e_{l'l} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

(1) C., p. 82-83.

La forme $\psi(e)$ est, à un facteur numérique positif près, la somme des carrés des racines de l'équation (2); par suite,

$$(3) \quad \psi(e) = h[e_{11}^2 + e_{22}^2 + \dots + e_{ll}^2 + \sum e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha'}].$$

Les coefficients $\rho_{\alpha\beta}$, par lesquels on peut multiplier les $X_{\alpha\beta}$ sans changer les formules (1), satisfont aux relations

$$\rho_{\alpha\beta} \rho_{\gamma\beta'} = \rho_{\alpha\gamma},$$

ce qui permet d'écrire

$$(4) \quad \rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha} \rho_{\beta},$$

avec

$$(5) \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_{\alpha} \rho_{\alpha'} = 1.$$

Si l'on est parti d'une transformation arbitraire *réelle* \mathfrak{y} de G , l'équation (2) est à coefficients réels. Soit donc

$$\omega_{\alpha} = \overline{\omega_{\bar{\alpha}}} \quad (\alpha = 0, \pm 1, \dots, \pm l; 0 = 0).$$

Posons

$$(6) \quad X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \overline{X_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}.$$

On voit sans difficulté qu'on peut écrire

$$(7) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta},$$

avec les conditions

$$(8) \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_{\alpha} \lambda_{\alpha'} = 1, \quad \bar{\lambda}_{\alpha} \bar{\lambda}_{\bar{\alpha}} = 1.$$

Enfin on obtient

$$X_{\alpha\alpha'} = \overline{X_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}}.$$

Calculons δ_0 et δ . Supposons pour cela qu'il y ait p valeurs positives de α pour lesquelles $\bar{\alpha} = \alpha$, p' valeurs positives pour lesquelles $\bar{\alpha} = -\alpha$, et soit

$$l = p + p' + 2q.$$

Pour les valeurs de α de la première espèce, $X_{\alpha\alpha'}$ est réel; pour celles de la seconde espèce, $X_{\alpha\alpha'}$ est purement imaginaire; les autres

transformations $X_{\alpha\alpha'}$, sont deux à deux imaginaires conjuguées. Par suite on a, d'après (3),

$$\delta_0 = p - p'.$$

Quant à δ , il suffit pour le calculer de considérer dans $\psi(e)$ les rectangles $e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha'}$ pour lesquels on a soit

$$\alpha' = \bar{\alpha}, \quad \beta' = \bar{\beta},$$

soit

$$\alpha' = \bar{\beta}, \quad \beta' = \bar{\alpha}.$$

Dans le premier cas, il faut d'abord prendre les rectangles $e_{0\alpha}e_{\alpha'0}$, pour lesquels on a $\alpha' = \bar{\alpha}$; on a d'ailleurs, d'après (6) et (7),

$$e_{0\alpha'} = \lambda_\alpha \bar{e}_{0\alpha},$$

ce qui donne le rectangle $-\lambda_\alpha e_{0\alpha} \bar{e}_{0\alpha}$. Les formules (8) montrent que λ_α est réel; si donc $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ est du signe de λ_α , le rectangle considéré donne, dans l'expression de δ , le terme

$$-2\varepsilon_\alpha.$$

Il faut ensuite prendre tous les couples $(\alpha\beta)$ tels que $\bar{\alpha}' = \alpha$, $\bar{\beta} = \beta$; comme $e^{\alpha'\beta'} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \bar{e}_{\alpha\beta}$, on a, dans l'expression de δ , le terme

$$-2\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta.$$

Dans le second cas on a, en supposant $\beta = \bar{\alpha}$,

$$X_{\alpha\beta'} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \bar{X}_{\beta\alpha'} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \bar{X}_{\beta\alpha'};$$

le rectangle $e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha'}$ contient alors deux carrés positifs.

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \delta &= p - p' + 2q - 2 \sum \varepsilon_\alpha - 4 \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \quad (\bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\beta} = -\beta), \\ \delta &= l - 2(h - k) - 2(h - k)^2, \end{aligned}$$

en désignant par h le nombre des quantités ε_α positives, et par k le nombre des quantités ε_α négatives.

On peut toujours se ramener au cas où $p' = l$. Considérons, en effet,

dans le cas contraire, le sous-groupe réel γ formé des l transformations réelles indépendantes entre elles :

$$\begin{aligned} & iX_{\alpha\alpha'} && (\bar{\alpha} = -\alpha), \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X_{0\alpha} + \sqrt{\lambda_\alpha} X_{0\alpha'} && (\bar{\alpha} = \alpha), \\ & \left. \begin{aligned} & i\lambda_{\beta'} X_{\alpha\beta} - i\lambda_\beta X_{\alpha'\beta'} \\ & i(X_{\alpha\alpha'} - X_{\beta\beta'}) \end{aligned} \right\} && (\alpha^2 \neq \beta^2, \beta = \bar{\alpha}); \end{aligned}$$

pour ce sous-groupe γ on a manifestement $\delta_0 = -l$. La valeur $p - p'$ de δ_0 n'est compatible avec la valeur qui vient d'être obtenue que si $p = q = 0$, $p' = l$.

On peut donc toujours supposer qu'on a, pour tous les indices α ,

$$\bar{\alpha} = -\alpha.$$

La valeur

$$\delta = l - 2m(m+1)$$

correspondra alors, si m est de même parité que l , à $\frac{m+l}{2}$ valeurs positives et $\frac{l-m}{2}$ valeurs négatives des λ_α ; si m est de parité différente de l , à $\frac{l-m-1}{2}$ valeurs positives et $\frac{l+m+1}{2}$ valeurs négatives des λ_α . L'entier m est au plus égal à l en valeur absolue. On peut toujours le supposer de même parité que l et compris entre l et $-l$.

On a d'ailleurs

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'},$$

et l'on peut disposer des ρ_α de manière à rendre chaque λ_α égal à ± 1 .

Tous les groupes de même caractère sont donc isomorphes entre eux; il y a $l+1$ types distincts.

On obtient un représentant de chaque type de la manière suivante : Le groupe G est le groupe qui laisse invariante la forme quadratique à $2l+1$ variables complexes (1)

$$x_0^2 + 2x_1x_{1'} + \dots + 2x_lx_{l'};$$

(1) C., p. 83.

le groupe \mathcal{G} laisse alors invariante la variété

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x}_0, \\ x_\alpha &= \varepsilon_\alpha \bar{x}_{\alpha'}. \end{aligned}$$

Autrement dit, le groupe \mathcal{G} est le plus grand groupe qui laisse invariante la forme quadratique à $2l + 1$ variables réelles

$$x_0^2 + 2\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + 2\varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + 2\varepsilon_l x_l \bar{x}_l.$$

IV. — Groupes G du type (D).

Si l est le rang du groupe, les transformations peuvent se mettre sous la forme (1)

$$X_{\alpha\beta} = -X_{\beta\alpha} \quad (\alpha \neq \beta; \alpha, \beta = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

avec les formules de structure

$$(1) \quad \begin{cases} (X_{\alpha\beta} X_{\gamma\beta}) = X_{\alpha\gamma}, & (X_{\alpha\beta} X_{\alpha'\beta'}) = X_{\alpha\alpha'} + X_{\beta\beta'} \\ (\alpha^2 \neq \gamma^2; \alpha \neq \beta; \beta' \neq \gamma; \alpha, \beta, \gamma = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l). \end{cases}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$\omega_\alpha + \omega_\beta \quad (\alpha^2 \neq \beta^2; \alpha, \beta = \pm 1, \dots, \pm l);$$

la transformation $X_{\alpha\beta}$ appartient à la racine $\omega_\alpha + \omega_\beta$; le sous-groupe γ est formé des l transformations $X_{11'}, \dots, X_{ll'}$.

Les $2l$ quantités ω_α sont les racines de l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} e_{1'1} - \omega & 0 & e_{2'1} & e_{21} & \dots & e_{l'1} & e_{l1} \\ 0 & e_{11'} - \omega & e_{2'1'} & e_{21'} & \dots & e_{l'1'} & e_{l1'} \\ e_{1'2} & e_{12} & e_{2'2} - \omega & 0 & \dots & e_{l'2} & e_{l2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{1'l'} & e_{1l'} & e_{2'l'} & e_{2l'} & \dots & 0 & e_{ll'} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

La forme $\psi(e)$ est, à un facteur positif près, égale à la somme des

(1) C., p. 87.

carrés des racines de l'équation (2). On a donc

$$(3) \quad \psi(e) = h[e_{i_1}^2 + \dots + e_{i_r}^2 + \sum e_{\alpha\beta} e_{\beta'\alpha'}].$$

Les coefficients $\rho_{\alpha\beta}$, par lesquels on peut multiplier les $X_{\alpha\beta}$ sans changer les formules de structure (1), sont de la forme

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} &= \rho_{\alpha\beta} \\ \text{avec} \quad \rho_{\alpha\rho\alpha'} &= 1. \end{aligned}$$

Si l'on est parti d'une transformation arbitraire réelle \mathcal{Y} de G , l'équation (2) est à coefficients réels. Soit donc

$$\omega_{\alpha} = \bar{\omega}_{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = \pm 1, \dots, \pm l).$$

Posons

$$(4) \quad X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}.$$

On montre sans difficulté qu'on peut écrire

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}$$

avec les conditions

$$(5) \quad \lambda_{\alpha}\lambda_{\alpha'} = 1, \quad \bar{\lambda}_{\alpha}\lambda_{\bar{\alpha}} = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Enfin on obtient

$$X_{\alpha\alpha'} = \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha'}}.$$

Calculons δ_0 et δ . Supposons qu'il y ait p valeurs positives de α pour lesquelles $\bar{\alpha} = \alpha$, p' valeurs positives pour lesquelles $\bar{\alpha} = -\alpha$, et soit

$$l = p + p' + 2q.$$

On montre, comme dans le cas du type (B), qu'on a

$$\delta_0 = p - p'.$$

Le calcul de δ se fait aussi d'une manière analogue dans le cas où $\varepsilon = 1$. On trouve

$$(6) \quad \delta_0 = p - p', \quad \delta = l - 2(h - k)^2 = l - 2m^2 \quad (0 \leq m \leq p', (-1)^{m+p'} = 1),$$

en désignant par h le nombre des λ_α positifs et k le nombre des λ_α négatifs ($\bar{\alpha} = -\alpha$).

Si, au contraire, $\varepsilon = -1$, ce qui ne peut d'ailleurs avoir lieu, à cause de (5), que si p est nul, le résultat est différent. Si $\bar{\alpha} = -\alpha$, les formules (5) montrent que λ_α est purement imaginaire. Les formules

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta} &= \lambda_\alpha \lambda_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'} & (\bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\beta} = -\beta), \\ X_{\alpha\beta'} &= \lambda_\alpha \lambda_{\beta'} \bar{X}_{\alpha'\beta} \end{aligned}$$

où les nombres réels $\lambda_\alpha \lambda_\beta$, $\lambda_\alpha \lambda_{\beta'}$ sont de signes contraires, montrent que les deux rectangles $e_{\alpha\beta} e_{\beta'\alpha'} + e_{\alpha\beta'} e_{\beta\alpha'}$ donnent dans $\psi(e)$ le même nombre de carrés positifs et négatifs. Quant aux rectangles

$$e_{\alpha\beta'} e_{\beta\alpha'} \quad (\beta = \bar{\alpha}),$$

ils donnent chacun deux carrés négatifs. On a donc

$$(7) \quad \delta_0 = -p', \quad \delta = -p' - 2q = -l.$$

Dans chacun des cas, on peut d'ailleurs choisir le sous-groupe réel γ de manière à obtenir $\delta_0 = -l$ ou $\delta_0 = 2 - l$.

Si d'abord $\varepsilon = 1$ et p pair, on prendra pour définir γ les transformations réelles échangeables entre elles suivantes : on partagera les p indices positifs α pour lesquels $\bar{\alpha} = \alpha$ en $\frac{p}{2}$ couples de deux (α, β) à chacun desquels on fera correspondre les deux transformations réelles

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}} X_{\alpha\beta} + \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta} X_{\alpha'\beta'}, \quad \sqrt{\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}} X_{\alpha\beta'} + \sqrt{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}} X_{\alpha'\beta};$$

on fera ensuite correspondre à chacun des p' indices positifs α , pour lesquels $\bar{\alpha} = -\alpha$, la transformation réelle

$$iX_{\alpha\alpha};$$

enfin, à chaque couple d'indices α, β , pour lesquels $\beta = \bar{\alpha} (\beta^2 \neq \alpha^2)$, on fera correspondre les deux transformations réelles

$$i(X_{\alpha\alpha'} - X_{\beta\beta'}), \quad i\lambda_{\beta'} X_{\alpha\beta} - i\lambda_\beta X_{\alpha'\beta'}.$$

On obtiendra ainsi

$$\delta_0 = -l \quad (p \text{ pair}).$$

Si ensuite $\varepsilon = 1$ et p impair, on procédera de la même manière, sauf qu'à l'un des p indices α pour lesquels $\bar{\alpha} = \alpha$, on fera correspondre la transformation réelle $X_{\alpha\alpha}$. On obtiendra dans ce cas

$$\delta_0 = 2 - l \quad (p \text{ impair}).$$

Enfin, si $\varepsilon = -1$, on prendra les transformations réelles

$$\begin{aligned} & iX_{\alpha\alpha'} \quad (\bar{\alpha} = -\alpha), \\ i(X_{\alpha\alpha'} - X_{\beta\beta'}), \quad & \lambda_{\beta'} X_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta} X_{\alpha'\beta'} \quad (\alpha^2 \neq \beta^2, \beta = \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

et l'on obtiendra

$$\delta_0 = -l.$$

On peut donc finalement se ramener toujours aux cas suivants :

$$\begin{aligned} \delta_0 = -l, \quad \delta = -l, \\ \delta_0 = -l, \quad \delta = l - 2m^2 \quad [0 \leq m \leq l, \quad (-1)^{m+l} = 1], \\ \delta_0 = 2 - l, \quad \delta = l - 2m^2 \quad [0 \leq m \leq l-1, \quad (-1)^{m+l} = -1]. \end{aligned}$$

Le troisième est essentiellement distinct des deux premiers, la troisième valeur de δ ne pouvant jamais être égale à l'une des deux premières. Commençons par ce troisième cas. Pour le nouveau sous-groupe γ on a de nouvelles valeurs de p, p', q et l'on a, pour ces nouvelles valeurs, d'après (6),

$$\begin{aligned} p - p' &= 2 - l, \\ p + p' + 2q &= l, \\ (-1)^{p'+l} &= -1; \end{aligned}$$

donc p est impair. Les équations précédentes entraînant

$$p + q = 1,$$

il en résulte

$$p = 1, \quad q = 0, \quad p' = l - 1.$$

Supposons donc

$$\bar{1} = -1, \quad \bar{2} = -2, \quad \dots, \quad \bar{l-1} = -(l-1), \quad \bar{l} = l;$$

on a

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\bar{\lambda}_{l-1}}{\lambda_{l-1}} = \bar{\lambda}_l \lambda_l = 1.$$

On peut disposer des ρ_α de manière à réduire λ_l et l'un des autres λ à l'unité, tous les autres étant égaux à ± 1 ; soit

$$\lambda_1 = \varepsilon_1, \quad \lambda_2 = \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \lambda_{l-2} = \varepsilon_{l-2}, \quad \lambda_{l-1} = \lambda_l = 1.$$

On a, par suite,

$$(8) \quad \begin{cases} X_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'} & [\alpha, \beta = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (l-1)], \\ X_{\alpha l} = \varepsilon_\alpha \bar{X}_{\alpha' l} & [\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (l-1)]. \\ X_{\alpha l'} = \varepsilon_\alpha X_{\alpha' l} \end{cases}$$

Quant aux deux premiers cas $\delta_0 = -l$, ils correspondent nécessairement à $p = q = 0$, c'est-à-dire à

$$\bar{\alpha} = -\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l).$$

Si alors, pour le nouveau sous-groupe γ , on a $\varepsilon = +1$, on obtient sans difficulté les formules

$$(9) \quad X_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'} \quad (\alpha, \beta = \pm 1, \dots, \pm l; \varepsilon_\alpha^2 \neq 1, \varepsilon_{\alpha'} = \varepsilon_\alpha).$$

Si au contraire on a $\varepsilon = -1$, on peut disposer des ρ_α de manière à obtenir les formules

$$(10) \quad X_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'} \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_l = 1; \varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-2} = \dots = \varepsilon_{-l} = -1).$$

En résumé, on a pour δ les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \delta &= l - 2m^2 & (m = 0, 1, 2, \dots, l), \\ \delta &= -l. \end{aligned}$$

Dans les cas (8) et (9), où δ est de la forme $l - 2m^2$ ($\varepsilon = 1$), il existe des groupes linéaires et homogènes à $2l$ variables réelles. On les obtient nécessairement en partant du groupe G , qui laisse inva-

riante la forme quadratique à $2l$ variables complexes (1)

$$x_1 x_{1'} + x_2 x_{2'} + \dots + x_l x_{l'}$$

et en liant ces variables complexes par des relations de la forme

$$(11) \quad x_\alpha = a_\alpha x_{\bar{\alpha}}.$$

On trouve ainsi, dans le cas (8), le groupe linéaire et homogène de la forme quadratique réelle

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + \varepsilon_{l-1} x_{l-1} \bar{x}_{l-1} + x_l x_{l'};$$

dans le cas (9) le groupe linéaire et homogène de la forme quadratique réelle

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + \varepsilon_l x_l \bar{x}_l.$$

Au contraire, dans le cas (10) ($\varepsilon = -1$), il n'y a aucun groupe linéaire et homogène à $2l$ variables réelles; on trouverait, en effet, pour définir les coefficients a_α des formules (11), les relations impossibles

$$a_\alpha \bar{a}_\alpha = -1.$$

Mais il existe un groupe linéaire et homogène à $4l$ variables réelles: c'est celui qui laisse invariante la forme quadratique

$$x_1 x_{1'} + x_2 x_{2'} + \dots + x_l x_{l'}$$

aux $2l$ variables complexes x_1, \dots, x_l , et la forme d'Hermite

$$x_1 \bar{x}_1 - x_{1'} \bar{x}_{1'} + x_2 \bar{x}_2 - x_{2'} \bar{x}_{2'} + \dots + x_l \bar{x}_l - x_{l'} \bar{x}_{l'}.$$

Nous avons supposé implicitement, dans ce qui précède, $l > 4$. Si $l = 4$, l'équation (2) n'est pas nécessairement à coefficients réels, car il y a trois systèmes de quantités qui peuvent jouer le rôle des ω_α ; mais l'un de ces systèmes est nécessairement son propre conjugué et l'on peut supposer que c'est celui des ω_α . Les résultats précédents subsistent donc.

(1) C., p. 87.

V. — Groupes G du type (C).

Si l est le rang du groupe, les transformations peuvent se mettre sous la forme

$$X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

avec les formules de structure (1)

$$(1) \quad \begin{cases} (X_{\alpha\beta} X_{\gamma\beta'}) = \varepsilon_{\beta} X_{\alpha\gamma}, \\ (X_{\alpha\gamma} X_{\alpha'\gamma'}) = \varepsilon_{\alpha} X_{\gamma\gamma'} + \varepsilon_{\gamma} X_{\alpha\alpha'}, \\ (X_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta'}) = 2\varepsilon_{\beta} X_{\alpha\alpha}, \\ (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha'\alpha'}) = \varepsilon_{\alpha} X_{\alpha\alpha'}, \\ (\alpha^2 \neq \gamma^2; \alpha, \beta, \gamma = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l; \alpha' = -\alpha; \\ \varepsilon_{\alpha} = +1 \text{ si } \alpha > 0, \varepsilon_{\alpha} = -1 \text{ si } \alpha < 0). \end{cases}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$2\omega_{\alpha}, \quad \omega_{\alpha} + \omega_{\beta} \quad (\alpha^2 \neq \beta^2; \alpha, \beta = \pm 1, \dots, \pm l; \omega_{\alpha'} = -\omega_{\alpha}).$$

La transformation $X_{\alpha\alpha}$ appartient à la racine $2\omega_{\alpha}$, la transformation $X_{\alpha\beta}$ à la racine $\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}$. Le sous-groupe γ est formé des l transformations $X_{11'}$, $X_{22'}$, ..., $X_{ll'}$.

Les $2l$ quantités ω_{α} sont les racines de l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} e_{11'} + \omega & e_{11} & e_{12'} & e_{12} & \dots & e_{1l'} & e_{1l} \\ e_{1'1'} & e_{1'1} - \omega & e_{1'2'} & e_{1'2} & \dots & e_{1'l'} & e_{1'l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{l'l'} & e_{l'l} & e_{l'2'} & e_{l'2} & \dots & e_{l'l'} & e_{l'l} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

La forme $\psi(e)$ est, à un facteur positif près, la somme des carrés des racines de l'équation (2); on a donc

$$(3) \quad \psi(e) = h[e_{11'}^2 + e_{22'}^2 + \dots + e_{ll'}^2 - \sum e_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha'} - 2 \sum \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} e_{\alpha\beta} e_{\alpha'\beta'}].$$

Les coefficients $\rho_{\alpha\beta}$ par lesquels on peut multiplier les $X_{\alpha\beta}$ sans

(1) C., p. 85.

changer les formules de structure (1) sont de la forme

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha}\rho_{\beta} \quad (\rho_{\alpha}\rho_{\alpha} = 1).$$

Si l'on part d'une transformation \mathfrak{Y} réelle, l'équation (2) correspondante est à coefficients réels ; soit

$$\omega_{\alpha} = \bar{\omega}_{\bar{\alpha}}.$$

On aura

$$(4) \quad X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

avec

$$\lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\gamma\beta} = \varepsilon_{\beta} \bar{\varepsilon}_{\bar{\beta}} \lambda_{\alpha\gamma}.$$

Cela permet d'écrire

$$(5) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta},$$

où les λ_{α} satisfont aux relations

$$(6) \quad \lambda_{\alpha} \lambda_{\alpha'} = \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\bar{\alpha}}.$$

On a de plus

$$(7) \quad \bar{\lambda}_1 \lambda_{\bar{1}} = \bar{\lambda}_1' \lambda_{\bar{1}'}, \bar{\lambda}_2 \lambda_{\bar{2}} = \dots = \varepsilon = \pm 1.$$

Le nombre ε ne peut être égal à -1 que si aucun indice α n'est tel que $\bar{\alpha} = \alpha$.

Remarquons que, d'après les formules (7), on a

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\lambda}_{\alpha} = -\varepsilon \lambda_{\alpha} & \text{si } \bar{\alpha} = -\alpha, \\ \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}} \text{ réel} & \text{si } \bar{\beta} = \alpha \quad (\beta^2 \neq \alpha^2). \end{array} \right.$$

Calculons δ_0 et δ . Supposons qu'il y ait p valeurs positives de α pour lesquelles $\bar{\alpha} = \alpha$, p' valeurs positives de α pour lesquelles $\bar{\alpha} = -\alpha$, et soit

$$p + p' + 2q = l.$$

On a alors, comme on le voit facilement,

$$\delta_0 = p - p'.$$

Pour calculer δ , il faut considérer d'abord les couples d'indices (α, β) tels que $X_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ coïncide avec $X_{\alpha'\beta'}$. Cela peut arriver

- 1° Si $\bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\beta} = -\beta$;
- 2° Si $\bar{\alpha} = -\beta, \bar{\beta} = -\alpha$ ($\beta \neq \alpha$).

I. Supposons en premier lieu $\varepsilon = 1$. Si d'abord on a $\bar{\alpha} = -\alpha$, la formule (8) montre que λ_α est purement imaginaire; on a

$$X_{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha^2 \bar{X}_{\alpha'\alpha'} \quad (\lambda_\alpha^2 < 0);$$

le rectangle $-e_{\alpha\alpha}e_{\alpha'\alpha'}$ donne donc dans $\psi(e)$ deux carrés positifs.

Si ensuite on a $\bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\beta} = -\beta$, on a

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta} &= \lambda_\alpha \lambda_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'}, \\ X_{\alpha\beta'} &= \lambda_\alpha \lambda_{\beta'} \bar{X}_{\alpha'\beta}; \end{aligned}$$

les deux coefficients $\lambda_\alpha \lambda_\beta, \lambda_\alpha \lambda_{\beta'}$, qui sont réels, ont un produit égal à

$$\lambda_\alpha^2 \lambda_\beta \lambda_{\beta'} = \varepsilon_\beta \varepsilon_{\beta'} \lambda_\alpha^2 = -\lambda_\alpha^2 > 0;$$

ils sont donc de même signe; par suite, les deux rectangles

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta e_{\alpha\beta} e_{\alpha'\beta'} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta'} e_{\alpha\beta'} e_{\alpha'\beta} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (e_{\alpha\beta} e_{\alpha'\beta'} - e_{\alpha\beta'} e_{\alpha'\beta})$$

donnent deux carrés positifs et deux négatifs.

Si enfin on a $\bar{\beta} = -\alpha$ ($\beta^2 \neq \alpha^2$), on a

$$X_{\alpha\beta'} = \lambda_\alpha \lambda_{\beta'} \bar{X}_{\alpha'\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \bar{X}_{\alpha'\beta};$$

le rectangle $-\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta'} e_{\alpha\beta'} e_{\alpha'\beta}$ donne donc deux carrés positifs.

Il résulte de ce qui précède la formule

$$(9) \quad \delta = p - p' + 2p' + 2q = l.$$

II. Supposons maintenant $\varepsilon = -1, p = 0$. Si d'abord on a $\bar{\alpha} = -\alpha$, la formule (8) montre que λ_α est réel et par suite le rectangle $-e_{\alpha\alpha}e_{\alpha'\alpha'}$ donne deux carrés négatifs.

Si ensuite on a $\bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\beta} = -\beta$, les deux coefficients réels $\lambda_\alpha \lambda_\beta$,

$\lambda_\alpha \lambda_{\beta'}$ sont de signes contraires; les rectangles

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta e_{\alpha\beta} e_{\alpha'\beta'} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta'} e_{\alpha\beta'} e_{\alpha'\beta}$$

donnent quatre carrés du signe de $-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta$. Si l'on suppose α et β positifs, et si l'on désigne par $[\lambda_\alpha]$ la quantité ± 1 du même signe que λ_α , on a dans δ la partie $-4[\lambda_\alpha][\lambda_\beta]$.

Si enfin on a $\beta = \bar{\alpha} (\beta^2 \neq \alpha^2)$, le rectangle

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta'} e_{\alpha\beta'} e_{\alpha'\beta}$$

donne deux carrés négatifs.

On a finalement

$$\delta = -p' - 2p' - 2q - 4\Sigma[\lambda_\alpha][\lambda_\beta] \quad (\bar{\alpha} = -\alpha < 0, \bar{\beta} = -\beta < 0).$$

Si parmi les p' quantités $\lambda_\alpha (\alpha > 0, \bar{\alpha} = -\alpha)$, il y en a h positives et k négatives, on aura

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_0 = -p', \quad \delta = -p' - 2q - 4(h-k)^2 = -l - 2m^2 \\ (0 \leq m \leq p', (-1)^{m+p'} = 1). \end{array} \right.$$

Remarquons que, si $\varepsilon = +1$, δ est positif; si $\varepsilon = -1$, δ est négatif. La valeur de ε est donc caractéristique du groupe.

Effectuons maintenant la réduction des différents cas :

I. Nous pouvons, dans cette première hypothèse, nous ramener au cas $p = l$; il suffit pour cela de démontrer qu'on peut choisir le sous-groupe γ de manière à avoir $\delta_0 = l$. Or on y arrive en prenant les l transformations réelles

$$\begin{array}{ll} X_{\alpha\alpha'} & (\bar{\alpha} = \alpha), \\ X_{\alpha\alpha} + \lambda_\alpha^2 X_{\alpha'\alpha'} & (\alpha = -\alpha), \\ \varepsilon_\alpha X_{\alpha\alpha'} + \varepsilon_\beta X_{\beta\beta'}, & X_{\alpha\beta'} + \lambda_\alpha \lambda_{\beta'} X_{\alpha'\beta} \quad (\beta = \bar{\alpha}). \end{array}$$

Si donc on a $p = l$, les formules (4) deviennent

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \bar{X}_{\alpha\beta}$$

avec

$$\lambda_\alpha \lambda_{\alpha'} = 1, \quad \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha = 1.$$

On peut alors disposer des ρ_α de manière à rendre les λ_α tous égaux à l'unité, de sorte que les transformations sont toutes réelles.

Ce premier cas, où $\delta = l$, correspond au groupe linéaire et homogène à $2l$ variables réelles qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée (1)

$$[x_1 x_{1'}] + [x_2 x_{2'}] + \dots + [x_l x_{l'}] \quad ([x_i x_{i'}] = x_i y_{i'} - y_i x_{i'}).$$

II. Dans la seconde hypothèse $\varepsilon = -1$, on peut toujours se ramener au cas $\rho' = l$; il suffit pour cela de démontrer qu'on peut choisir le sous-groupe de γ de manière à avoir $\delta_0 = -l$. On y arrive en prenant les l transformations réelles

$$\begin{aligned} iX_{\alpha\alpha'} & \quad (\bar{\alpha} = -\alpha), \\ i\varepsilon_\alpha X_{\alpha\alpha'} - i\varepsilon_\beta X_{\beta\beta'} & \quad (\beta = \bar{\alpha}), \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}} X_{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha'} \lambda_{\beta'}}} X_{\alpha'\beta'} & \quad (\beta = \bar{\alpha}), \end{aligned}$$

les deux radicaux étant choisis dans le dernier cas de manière que leur produit, qui est ± 1 , soit égal à $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$.

Si donc on a $\rho' = l$, les formules deviennent

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \bar{X}_{\alpha'\beta'}$$

avec

$$\lambda_\alpha \lambda_{\alpha'} = \bar{\lambda}_\alpha \lambda_{\alpha'} = -1.$$

On peut enfin disposer des ρ_α de manière à rendre les λ_α tous égaux à ± 1 avec

$$\lambda_\alpha \lambda_{\alpha'} = -1.$$

S'il existe un groupe de ce type, linéaire et homogène à $2l$ variables, on l'obtiendra en prenant

$$X_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha x_{\alpha'} \rho_\beta - \varepsilon_\beta x_\beta \rho_\alpha$$

et regardant les variables complexes x_α liées par les relations

$$x_\alpha = a_\alpha \bar{x}_{\alpha'}.$$

(1) G., p. 85.

Or on trouve

$$a_\alpha = a \bar{\lambda}_\alpha, \quad a \bar{a} \bar{\lambda}_\alpha \lambda_{\alpha'} = +1,$$

ce qui est impossible.

Au contraire, *il existe un groupe à $4l$ variables réelles : c'est le groupe qui laisse invariante la forme bilinéaire*

$$[x_1 x_{1'}] + \dots + [x_l x_{l'}]$$

aux $2l$ variables complexes x_α , et la forme d'Hermite

$$\lambda_1(x_1 \bar{x}_1 + x_{1'} \bar{x}_{1'}) + \lambda_2(x_2 \bar{x}_2 + x_{2'} \bar{x}_{2'}) + \dots + \lambda_l(x_l \bar{x}_l + x_{l'} \bar{x}_{l'}).$$

Il y a $\left[\frac{l+2}{2} \right]$ types différents de cette catégorie dont les caractères sont

$$\delta = -l - 2m^2 \quad \left(m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = l, l-2, \dots, l-2 \left[\frac{l}{2} \right] \right).$$

VI. — Groupes G du type (G).

Ces groupes sont de rang 2 et d'ordre 14. Les transformations sont

$$X_{\alpha 0}, \quad X_{0\alpha}, \quad X_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

et les formules de structure sont (1) :

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha 0}) = \frac{2}{3} X_{\alpha 0}, & (X_{\alpha\alpha} X_{\beta 0}) = -\frac{1}{3} X_{\beta 0}, \\ (X_{\alpha\alpha} X_{0\alpha}) = -\frac{2}{3} X_{0\alpha}, & (X_{\alpha\alpha} X_{0\beta}) = \frac{1}{3} X_{0\beta}, \\ (X_{\alpha 0} X_{\beta 0}) = -2(\alpha\beta\gamma) X_{0\gamma}, & (X_{0\alpha} X_{0\beta}) = 2(\alpha\beta\gamma) X_{\gamma 0}, \\ (X_{\alpha 0} X_{0\beta}) = X_{\alpha\beta}, & \\ (X_{0\alpha} X_{\alpha\beta}) = X_{0\beta}, & (X_{\alpha\beta} X_{\beta 0}) = X_{\alpha 0}, \\ (X_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma}) = X_{\alpha\gamma}, & (X_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}) = X_{\alpha\alpha} - X_{\beta\beta} \\ [\alpha \neq \beta \neq \gamma; \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; (\alpha\beta\gamma) = +1 \text{ ou } -1 \text{ suivant que la} \\ \text{permutation } (\alpha\beta\gamma) \text{ est paire ou impaire}]. \end{array} \right.$$

(1) G., p. 93.

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$\pm \omega_\alpha, \quad \omega_\alpha - \omega_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

où les trois quantités ω_α sont liées par la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Les transformations $X_{\alpha 0}, X_{0\alpha}, X_{\alpha\beta}$ appartiennent aux racines $\omega_\alpha, -\omega_\alpha, \omega_\alpha - \omega_\beta$. Le sous-groupe γ est formé des transformations X_{11}, X_{22}, X_{33} dont la somme est nulle.

Les quantités $\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm \omega_3, 0$, sont les racines de l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} -\omega & 2e_{10} & 2e_{20} & 2e_{30} & -2e_{01} & -2e_{02} & -2e_{03} \\ e_{01} & -e_{11} - \omega & -e_{21} & -e_{31} & 0 & -e_{30} & e_{20} \\ e_{02} & -e_{12} & -e_{22} - \omega & -e_{32} & e_{30} & 0 & -e_{10} \\ e_{03} & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} - \omega & -e_{20} & e_{10} & 0 \\ -e_{10} & 0 & e_{03} & -e_{02} & e_{11} - \omega & e_{12} & e_{13} \\ -e_{20} & -e_{03} & 0 & e_{01} & e_{21} & e_{22} - \omega & e_{23} \\ -e_{30} & e_{02} & -e_{01} & 0 & e_{31} & e_{32} & e_{33} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on suppose e_{11}, e_{22}, e_{33} liés par la relation

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0.$$

Cette équation est à coefficients réels pour toute transformation réelle de G et $\psi(e)$ est, à un facteur positif près, la somme des carrés des racines de cette équation. On a donc

$$(3) \quad \psi(e) = h[e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 6e_{10}e_{01} + 6e_{20}e_{02} + 6e_{30}e_{03} + 2e_{23}e_{32} + 2e_{31}e_{13} + 2e_{12}e_{21}].$$

Les quantités $\rho_{\alpha\beta}$ par lesquelles on peut multiplier les $X_{\alpha\beta}$ sans changer les formules de structure sont

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}$$

avec

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 \rho_2 \rho_3 = 1.$$

Deux cas sont à considérer, suivant que les trois quantités $\omega_1, \omega_2,$

ω_3 sont à elles-mêmes leurs conjuguées ou sont les conjuguées des trois quantités $-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3$.

I. Soit, dans le premier cas,

$$\omega_\alpha = \bar{\omega}_{\bar{\alpha}}.$$

On peut poser

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3).$$

Les coefficients $\lambda_{\alpha\beta}$ peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \quad (\lambda_0 = 1)$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= (\bar{1} \bar{2} \bar{3}), \\ \bar{\lambda}_1 \lambda_{\bar{1}} &= \bar{\lambda}_2 \lambda_{\bar{2}} = \bar{\lambda}_3 \lambda_{\bar{3}} = 1. \end{aligned}$$

Calculons δ_0 et δ . Supposons d'abord qu'on ait

$$\bar{1} = 1, \quad \bar{2} = 2, \quad \bar{3} = 3.$$

Alors on a manifestement

$$(4) \quad \delta_0 = \delta = 2.$$

Supposons ensuite qu'on ait

$$\bar{1} = 2, \quad \bar{2} = 1, \quad \bar{3} = 3.$$

Alors on aura

$$e_{11} = e_{22}, \quad e_{33} \text{ réel,}$$

et par suite

$$e_{11} = e + i\eta, \quad e_{22} = e - i\eta, \quad e_{33} = -2e;$$

donc

$$\delta_0 = 0.$$

Quant à δ , il faudra, pour le calculer, considérer le rectangle $2e_{12}e_{21}$; or on a

$$X_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{X}_{21} = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \bar{X}_{21};$$

le rectangle $2e_{12}e_{21}$ fournit donc deux carrés positifs, et par suite

$$(5) \quad \delta_0 = 0, \quad \delta = 2.$$

II. Soit maintenant

$$\bar{\omega}_\alpha = -\omega_{\bar{\alpha}}.$$

On peut poser

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\beta\bar{\alpha}}.$$

Les coefficients $\lambda_{\alpha\beta}$ peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \quad (\lambda_0 = -1)$$

avec les conditions

$$(6) \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -(\bar{1} \bar{2} \bar{3}),$$

$$(7) \quad \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2} = \frac{\bar{\lambda}_3}{\lambda_3} = 1.$$

On a aussi

$$X_{\alpha\alpha} = -\bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}.$$

Calculons δ_0 et δ . Supposons d'abord

$$\bar{1} = 1, \quad \bar{2} = 2, \quad \bar{3} = 3.$$

On a, manifestement, les $e_{\alpha\alpha}$ étant purement imaginaires,

$$\delta_0 = -2.$$

Pour calculer δ , il faut considérer les différents rectangles $e_{\alpha_0} e_{0\alpha}$, $e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}$.

Les formules (7) montrent que les λ_α sont réels et les formules

$$X_{\alpha 0} = \lambda_\alpha \bar{X}_{0\alpha}, \quad X_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \bar{X}_{\beta\alpha}$$

donnent pour δ la valeur

$$\delta = -2 + 2 \sum \varepsilon_\alpha - 2 \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta,$$

où l'on a désigné par ε_α le nombre ± 1 du même signe que λ_α . Comme on a, d'après (6),

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1,$$

on a deux cas à distinguer :

1° $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = -1$. On a, dans ce cas,

$$(8) \quad \delta_0 = -2, \quad \delta = 2.$$

2° $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. On a

$$(9) \quad \delta_0 = -2, \quad \delta = -14.$$

Supposons maintenant $\bar{1} = 2, \bar{2} = 1, \bar{3} = 3$. On a, dans ce cas,

$$e_{11} = e + i\eta, \quad e_{22} = -e + i\eta, \quad e_{33} = -2i\eta$$

et, par suite,

$$\delta_0 = 0.$$

Quant à δ , il faut, pour le calculer, considérer le rectangle $e_{30}e_{03}$; or on a

$$X_{30} = \lambda_3 \bar{X}_{03},$$

avec, d'après (6) et (7),

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 \lambda_3 = 1;$$

par suite, le rectangle $e_{30}e_{03}$ donne deux carrés positifs et l'on a

$$(10) \quad \delta_0 = 0, \quad \delta = 2.$$

Nous avons obtenu deux valeurs distinctes de δ :

$$\delta = 2, \quad \delta = -14.$$

La valeur $\delta = -14$ a été obtenue dans un seul cas lorsque

$$\bar{\omega}_\alpha = -\omega_\alpha, \quad \lambda_\alpha < 0.$$

On peut disposer, dans ce cas, des ρ_α de manière à réduire les λ_α à la valeur commune -1 . On a alors

$$(11) \quad \begin{cases} X_{\alpha 0} = -\bar{X}_{0\alpha} \\ X_{\alpha\beta} = -\bar{X}_{\beta\alpha} \end{cases} \quad (\delta = -14).$$

La valeur $\delta = 2$ a été obtenue pour les différentes valeurs 2, 0, -2 de δ_0 . Nous allons montrer qu'on peut toujours supposer $\delta_0 = 2$ par un choix convenable du sous-groupe réel γ .

En effet, dans le cas (5), où l'on a

$$\bar{\omega}_1 = \omega_2, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_1, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3,$$

il suffit de prendre les deux transformations

$$X_{33}, \quad X_{12} + \lambda_1 \bar{\lambda}_1 X_{21}.$$

Dans le cas (8), où l'on a

$$\bar{\omega}_1 = -\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = -\omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = -\omega_3, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

il suffit de prendre

$$X_{10} + \lambda_1 X_{01}, \quad X_{23} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} X_{32}.$$

Dans le cas (10), où l'on a

$$\bar{\omega}_1 = -\omega_2, \quad \bar{\omega}_2 = -\omega_1, \quad \bar{\omega}_3 = -\omega_3,$$

il suffit de prendre

$$X_{11} - X_{22}, \quad X_{30} + \lambda_3 X_{03}.$$

On peut donc toujours supposer $\delta_0 = 2$, c'est-à-dire

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3.$$

Dans ce cas on peut disposer des ρ_α de manière à réduire tous les λ_α à l'unité et l'on a

$$(12) \quad X_{\alpha\beta} = \bar{X}_{\alpha\beta} \quad (\delta = 2).$$

Il existe donc deux groupes réels correspondant au type (2) et de caractères $\delta = 2$, $\delta = -14$.

Il existe, dans le cas $\delta = 2$, un groupe linéaire et homogène à sept variables réelles. C'est celui (1) qui laisse invariante la forme quadratique

$$z^2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

et, en même temps, le système des sept équations bilinéaires alternées

$$\begin{aligned} [zx_1] + [y_2 y_3] &= [zx_2] + [y_3 y_1] = [zx_3] + [y_1 y_2] = 0, \\ [zy_1] + [x_2 x_3] &= [zy_2] + [x_3 x_1] = [zy_3] + [x_1 x_2] = 0, \\ [x_1 y_1] + [x_2 y_2] + [x_3 y_3] &= 0. \end{aligned}$$

(1) C. r. 146.

Dans le cas $\delta = -14$, il existe aussi un groupe linéaire et homogène à sept variables réelles. Il suffit de regarder les sept variables précédentes comme des variables complexes liées par les relations

$$z = \bar{z}, \quad y_\alpha = \bar{x}_\alpha.$$

Si l'on pose alors

$$z = X_7, \quad x_1 = X_4 + iX_6, \quad x_2 = X_1 + iX_5, \quad x_3 = X_2 + iX_3,$$

on obtient le groupe linéaire et homogène qui laisse invariants la forme quadratique réelle

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2,$$

et le système des sept équations bilinéaires alternées

$$[X_{i+1} X_{i+5}] + [X_{i+4} X_{i+6}] + [X_{i+2} X_{i+3}] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

où l'on suppose l'indice, lorsqu'il est plus grand que 7, remplacé par le reste de sa division par 7.

Les transformations du groupe peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} U_i &= X_{i+4} P_{i+6} - X_{i+6} P_{i+4} - X_{i+2} P_{i+3} + X_{i+3} P_{i+2}, \\ V_i &= X_{i+2} P_{i+3} - X_{i+3} P_{i+2} - X_{i+1} P_{i+5} + X_{i+5} P_{i+1}, \\ W_i &= X_{i+1} P_{i+5} - X_{i+5} P_{i+1} - X_{i+4} P_{i+6} + X_{i+6} P_{i+4} \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, 7)$$

avec les relations

$$U_i + V_i + W_i \equiv 0.$$

Ce groupe se rattache au système des octaves de Graves et Cayley. C'est le plus grand groupe linéaire et homogène qu'on puisse effectuer dans les sept unités relatives de ce système sans changer leur loi de multiplication.

VII. — Groupes G du type (E) ($l=6$).

Ces groupes sont de rang 6 et d'ordre 78. Les transformations peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} &= -X_{\beta\alpha\gamma} = -X_{\alpha\gamma\beta}, \quad X'_{\alpha\beta\gamma}, \quad X_{000}, \quad X'_{000} \\ (\alpha, \beta, \gamma &= 1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

avec les formules de structure (1)

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta}) = (X_{\alpha\gamma} X_{\gamma\beta}) = X_{\alpha\beta}, & (X_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}) = X_{\alpha\alpha} - X_{\beta\beta}, \\ (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{2}{3} X_{\alpha\beta\gamma}, & (X_{\alpha\alpha} X_{\beta\gamma\delta}) = -\frac{1}{3} X_{\beta\gamma\delta}, \\ (X_{\alpha\alpha} X'_{\alpha\beta\gamma}) = -\frac{2}{3} X'_{\alpha\beta\gamma}, & (X_{\alpha\alpha} X'_{\beta\gamma\delta}) = \frac{1}{3} X'_{\beta\gamma\delta}, \\ (X_{\alpha\alpha} X_{000}) = -\frac{1}{3} X_{000}, & (X_{\alpha\alpha} X'_{000}) = \frac{1}{3} X'_{000}, \\ (X_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma\delta}) = X_{\alpha\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta} X'_{\alpha\gamma\delta}) = -X'_{\beta\gamma\delta}, \\ (X_{\alpha\beta\gamma} X'_{\alpha\beta\gamma}) = X_{\alpha\alpha} + X_{\beta\beta} + X_{\gamma\gamma}, & \\ (X_{000} X'_{000}) = -\Sigma X_{\alpha\alpha}, & \\ (X_{\alpha\beta\gamma} X'_{\delta\beta\gamma}) = X_{\alpha\delta}, & \\ (X_{\alpha\beta\gamma} X_{\lambda\mu\nu}) = -(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) X'_{000}, & \\ (X'_{\alpha\beta\gamma} X'_{\lambda\mu\nu}) = (\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) X_{000}, & \\ (X_{000} X_{\alpha\beta\gamma}) = -(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) X'_{\lambda\mu\nu}, & \\ (X'_{000} X_{\alpha\beta\gamma}) = (\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) X_{\lambda\mu\nu}. & \end{array} \right.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$\omega_\alpha - \omega_\beta, \quad \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma, \quad -(\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma), \quad 3\omega_0 = -\Sigma\omega_\alpha, \quad -3\omega_0 = \Sigma\omega_\alpha,$$

et à ces racines appartiennent respectivement les transformations

$$X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma}, \quad X'_{\alpha\beta\gamma}, \quad X_{000}, \quad X'_{000}.$$

Le sous-groupe γ est formé des six transformations $X_{11}, X_{22}, \dots, X_{00}$.

Il existe deux systèmes de 27 quantités covariants au système des racines de l'équation caractéristique; le premier est formé des quantités

$$(2) \quad \omega_\alpha - \omega_0, \quad \omega_\alpha + 2\omega_0, \quad -\omega_0 - \omega_\alpha - \omega_\beta;$$

le second des quantités

$$(3) \quad \omega_0 - \omega_\alpha, \quad -\omega_\alpha - 2\omega_0, \quad \omega_0 + \omega_\alpha + \omega_\beta.$$

On a, pour la transformation $\Sigma e_{\alpha\alpha} X_{\alpha\alpha}$, les valeurs

$$\omega_\alpha - \omega_0 = e_{\alpha\alpha}, \quad \omega_\alpha + 2\omega_0 = e_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3} \Sigma e_{\gamma\lambda}, \quad -\omega_0 - \omega_\alpha - \omega_\beta = -e_{\alpha\alpha} - e_{\beta\beta} + \frac{1}{3} \Sigma e_{\gamma\lambda}.$$

(1) C., p. 90.

Les 27 quantités précédentes sont racines d'une équation qu'il est inutile d'écrire. La forme $\psi(e)$ est, à un facteur positif près, égale à la somme des carrés des racines de cette équation. On trouve ainsi

$$(4) \quad \psi(e) = h \left[e_{11}^2 + \dots + e_{66}^2 + \left(e_{11} - \frac{1}{3} \sum e_{\alpha\alpha} \right)^2 + \dots + \left(e_{11} + e_{22} - \frac{1}{3} \sum e_{\alpha\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. + 12 \sum e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} + 12 e_{000} e'_{000} + 12 \sum e_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma} \right].$$

Si l'on part d'une transformation réelle \mathfrak{F} , ou bien l'équation qui admet pour racines les 27 quantités (2) a ses coefficients réels, ou bien chaque quantité (2) est imaginaire conjuguée d'une quantité (3). Ces deux cas sont d'ailleurs essentiellement distincts, le résultat ne dépendant pas du choix de la transformation \mathfrak{F} , car le premier membre de l'équation qui admet pour racines les 27 quantités (2) lorsqu'on part d'une transformation arbitraire du groupe G est un invariant pour le groupe adjoint.

I. *L'équation qui admet pour racines les 27 quantités (2) est à coefficients réels.*

Le premier problème à résoudre est de rechercher comment peuvent s'associer les quantités (2) complexes conjuguées. Ce problème revient au suivant :

Rechercher toutes les substitutions d'ordre 2 du groupe de Galois de l'équation admettant les quantités (2) pour racines.

Ce groupe de Galois est isomorphe au groupe des 27 droites d'une surface du troisième degré (1). Faisons correspondre respectivement aux 27 quantités

$$\omega_\alpha - \omega_0, \quad \omega_\alpha + 2\omega_0, \quad -\omega_0 - \omega_\alpha - \omega_\beta$$

les lettres

$$b_\alpha, \quad a_\alpha, \quad c_{\alpha\beta}.$$

Nous dirons que deux lettres se *rencontrent* lorsque la différence des

(1) Voir CARTAN, *Sur la réduction à sa forme canonique d'un groupe de transformations fini et continu* (Amer. J. of Math., t. XVIII, p. 35-43).

quantités (2) correspondantes est une racine de l'équation caractéristique du groupe G. Les couples formés de deux lettres qui se rencontrent sont de la forme

$$(a_\alpha, b_\beta), (a_\alpha, c_{\alpha\beta}), (c_{\alpha\beta}, c_{\gamma\delta}) \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta).$$

Il existe toujours dans le groupe de Galois au moins une substitution remplaçant deux lettres quelconques qui se rencontrent par deux autres lettres quelconques qui se rencontrent, et aussi au moins une substitution remplaçant deux lettres quelconques ne se rencontrant pas par deux autres lettres quelconques ne se rencontrant pas.

Cela posé, supposons qu'une substitution S d'ordre 2 contienne au moins un cycle formé de deux lettres qui ne se rencontrent pas; on peut supposer que ce cycle est (a_1, b_1) . L'ensemble des lettres qui rencontrent a_1 et pas b_1 sera alors remplacé par l'ensemble des lettres qui rencontrent b_1 et pas a_1 . Autrement dit les lettres

$$b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$$

seront changées, à l'ordre près, dans les lettres

$$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.$$

Si, de plus, on a les cycles

$$(a_\alpha b_{\alpha'}) (a_\beta b_{\beta'}),$$

il faudra que si a_α ne rencontre pas $b_{\beta'}$, a_β ne rencontre pas $b_{\alpha'}$; autrement dit, il faudra que, si $\beta' = \alpha$, on ait $\alpha' = \beta$. Par suite, la substitution S sera de l'une des formes

$$\begin{aligned} S &= (a_1 b_1) (a_2 b_2) (a_3 b_3) (a_4 b_4) (a_5 b_5) (a_6 b_6) \dots, \\ S &= (a_1 b_1) (a_2 b_2) (a_3 b_3) (a_4 b_4) (a_5 b_6) (a_6 b_5) \dots, \\ S &= (a_1 b_1) (a_2 b_2) (a_3 b_4) (a_4 b_3) (a_5 b_6) (a_6 b_5) \dots \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la substitution S ne contienne que des cycles formés de deux lettres qui se rencontrent. On peut supposer que l'un de ces cycles est $(a_1 b_2)$. La lettre a_2 , qui ne rencontre ni a_1 ni b_2 , sera alors remplacée par une lettre ne rencontrant ni a_1 ni b_2 , mais rencontrant a_2 : il n'y a que la lettre b_1 qui satisfasse à cette con-

dition. On aura donc

$$S = (a_1 b_2) (a_2 b_1) \dots$$

De même que tout à l'heure, les lettres qui rencontrent b_1, b_2 , mais pas a_1 et a_2 , seront changées dans les lettres qui rencontrent a_1, a_2 , mais pas b_1 et b_2 . Autrement dit chaque lettre a_α sera changée dans une lettre b_α et l'on aura

$$S = (a_1 b_2) (a_2 b_1) (a_3 b_4) (a_4 b_3) (a_5 b_6) (a_6 b_5) \dots$$

Les substitutions ainsi obtenues se complètent sans difficulté et l'on obtient, en tenant compte de la substitution identique, les solutions suivantes du problème :

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = (a_1 b_1) (a_2 b_2) (a_3 b_3) (a_4 b_4) (a_5 b_5) (a_6 b_6),$$

$$S_3 = (a_1 b_1) (a_2 b_2) (a_3 b_3) (a_4 b_4) (a_5 b_6) (a_6 b_5) (c_{15} c_{16}) (c_{23} c_{26}) (c_{35} c_{36}) (c_{45} c_{46}),$$

$$S_4 = (a_1 b_1) (a_2 b_2) (a_3 b_4) (a_4 b_3) (a_5 b_6) (a_6 b_5) \\ \times (c_{13} c_{14}) (c_{23} c_{24}) (c_{15} c_{16}) (c_{25} c_{26}) (c_{35} c_{46}) (c_{36} c_{45}),$$

$$S_5 = (a_1 b_2) (a_2 b_1) (a_3 b_4) (a_4 b_3) (a_5 b_6) (a_6 b_5) \\ \times (c_{13} c_{24}) (c_{14} c_{23}) (c_{15} c_{26}) (c_{16} c_{25}) (c_{35} c_{46}) (c_{36} c_{45}).$$

Ces cinq substitutions sont essentiellement distinctes. Il ne pourrait y avoir de doute que pour S_4 et S_5 qui contiennent le même nombre de cycles; mais tous les cycles de S_5 sont formés de lettres qui se rencontrent, ce qui n'est pas le cas pour S_4 .

Nous allons passer en revue les cinq cas qui peuvent se présenter en nous attachant d'abord, dans chaque cas, à déterminer les valeurs de δ_0 et de δ .

11. On a dans le premier cas

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}_{\alpha\beta\gamma}, \quad \dots, \\ X_{\alpha\alpha} = \bar{X}_{\alpha\alpha}.$$

On voit immédiatement qu'on a

$$(7) \quad \delta_0 = 6, \quad \delta = 6.$$

12, 3, 4, 5. On peut d'abord faire des calculs se rapportant à la fois aux quatre derniers cas. Soit en effet $(a_\alpha b_{\bar{\alpha}})$ celui des cycles de S qui contient a_α . On aura

$$\omega_\alpha + 2\omega_0 = \bar{\omega}_{\bar{\alpha}} - \bar{\omega}_0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6),$$

d'où l'on tire, par addition,

$$3\omega_0 = -3\bar{\omega}_0,$$

puis

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = \bar{\omega}_{\bar{\alpha}} - \bar{\omega}_{\bar{\beta}}, \quad \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = -\bar{\omega}_{\bar{\lambda}} - \bar{\omega}_{\bar{\mu}} - \bar{\omega}_{\bar{\nu}}.$$

On peut donc écrire les relations

$$(8) \quad \begin{cases} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) \lambda_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}'_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}}, \\ X'_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) \lambda'_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}}, \\ X_{000} = \lambda_{000} \bar{X}'_{000}, \\ X'_{000} = \lambda'_{000} \bar{X}_{000}. \end{cases}$$

En exprimant que les formules (1) sont vérifiées par les X et les \bar{X} , on obtient entre les λ des relations qui permettent d'écrire

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, & \lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma, & \lambda'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma}, \\ \lambda_{000} = -\frac{(\tau\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6})}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6}, & \lambda'_{000} = -(\tau\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6. \end{cases}$$

Les λ_α sont d'ailleurs définis à une racine cubique près de l'unité et l'on de plus

$$(10) \quad \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_{\bar{1}} = \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_{\bar{2}} = \dots = k, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6 = -(\tau\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}) k^3,$$

d'où l'on déduit

$$(11) \quad \lambda_{000} = \frac{1}{k^3}, \quad \lambda'_{000} = k^3.$$

Nous allons, dans chaque cas, calculer δ_0 et δ . Remarquons d'abord que des formules (8) et (9) on déduit

$$X_{\alpha\alpha} = \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} - \frac{1}{5} \Sigma \bar{X}_{\lambda\lambda}.$$

Si l'on pose

$$e = e_\alpha + i\eta_\alpha,$$

on obtient

$$(12) \quad e_\alpha = e_{\bar{\alpha}}, \quad \sum e_\lambda = 0, \quad \eta_1 + \eta_{\bar{1}} = \eta_2 + \eta_{\bar{2}} = \dots = \eta_6 + \eta_{\bar{6}}.$$

On trouve facilement alors les valeurs suivantes de δ_0 :

I ₂	$\delta_0 = 5 - 1 = 4,$
I ₃	$\delta_0 = 4 - 2 = 2,$
I ₄	$\delta_0 = 3 - 3 = 0,$
I ₅	$\delta_0 = 2 - 4 = -2.$

Pour calculer δ , il faut considérer les rectangles

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha} & \quad (\bar{\alpha} = \beta), \\ e_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma} & \quad (\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \text{ tous distincts}), \\ e_{000}e'_{000}. & \end{aligned}$$

I₂. Dans ce cas, il n'y a que le dernier rectangle qui entre en jeu et il donne deux carrés du même signe que λ_{000} , c'est-à-dire que k . Or, d'après (10), k est ici positif. On a donc

$$(13) \quad \delta_0 = 4, \quad \delta = \delta_0 + 2 = 6.$$

I₃. Dans ce cas, il y a à considérer les rectangles $e_{56}e_{65}$ et $e_{000}e'_{000}$. Comme, d'après (10), k est positif, on a

$$\lambda_{56} = \frac{\lambda_{55}}{\lambda_6} = k\lambda_5\bar{\lambda}_6 > 0.$$

Il en est de même de λ_{000} . Par suite

$$(14) \quad \delta_0 = 2, \quad \delta = \delta_0 + 4 = 6.$$

I₄. Dans ce cas, il faut considérer les rectangles $e_{24}e_{43}$, $e_{56}e_{65}$, $e_{000}e'_{000}$. On trouve aussi facilement

$$(15) \quad \delta_0 = 0, \quad \delta = \delta_0 + 6 = 6.$$

15. Dans ce cas, il faut considérer les rectangles

$$\begin{aligned} e_{12}e_{21}, & \quad e_{34}e_{43}, & \quad e_{56}e_{65}, \\ e_{135}e'_{135}, & \quad e_{146}e'_{146}, & \quad e_{236}e'_{236}, & \quad e_{245}e'_{245}, \\ e_{246}e'_{246}, & \quad e_{235}e'_{235}, & \quad e_{145}e'_{145}, & \quad e_{136}e'_{136}, \\ e_{000}e'_{000}. \end{aligned}$$

Le signe des deux carrés réels fournis par chaque rectangle est celui de

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= k\lambda_1\bar{\lambda}_1, & \quad k\lambda_3\bar{\lambda}_3, & \quad k\lambda_5\bar{\lambda}_5, \\ -\lambda_1\lambda_3\lambda_5, & \quad -k^2\lambda_1\lambda_3\lambda_5, & \quad -k^2\lambda_1\lambda_3\lambda_5, & \quad -k^2\lambda_1\lambda_3\lambda_5, \\ k^3\lambda_1\lambda_3\lambda_5, & \quad k\lambda_1\lambda_3\lambda_5, & \quad k\lambda_1\lambda_3\lambda_5, & \quad k\lambda_1\lambda_3\lambda_5, \\ & \quad k^2. \end{aligned}$$

Appelons ε et ε' les nombres égaux à ± 1 et de même signe respectivement que k et $\lambda_1\lambda_3\lambda_5$. On aura

$$\delta_0 = -2, \quad \delta = -2 + 8\varepsilon - 8\varepsilon' + 8\varepsilon\varepsilon'.$$

On aura donc les subdivisions suivantes :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon = 1, & \delta_0 = -2, & \delta = 6, \\ \varepsilon = \varepsilon' = -1, & \delta_0 = -2, & \delta = 6, \\ \varepsilon = -1, \quad \varepsilon' = 1, & \delta_0 = -2, & \delta = -26. \end{array} \right.$$

En résumé, dans les groupes de la catégorie I, le caractère δ peut prendre deux valeurs seulement, à savoir 6 et -26 .

Montrons que tous les groupes de caractère 6 sont isomorphes. Montrons d'abord qu'on peut, pour chacun d'eux, choisir le sous-groupe réel γ de manière à obtenir $\delta_0 = 6$, ce qui nous ramènera à l'examen du seul cas I 1.

Il suffit pour cela de définir le sous-groupe γ :

Dans le cas I 2, par les transformations réelles

$$X_{11} - X_{66}, \quad X_{22} - X_{66}, \quad X_{33} - X_{66}, \quad X_{44} - X_{66}, \quad X_{55} - X_{66}, \quad X_{000} + \lambda_{000}X'_{000};$$

(1) C., p. 142-143.

Dans le cas I 3, par les transformations réelles

$$\begin{aligned} 2X_{11} - X_{55} - X_{66}, \quad 2X_{22} - X_{55} - X_{66}, \quad 2X_{33} - X_{55} - X_{66}, \\ 2X_{44} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{000} + \lambda_{000} X'_{000}; \end{aligned}$$

Dans le cas I 4, par les transformations réelles

$$\begin{aligned} 2X_{11} - X_{55} - X_{66}, \quad 2X_{22} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66}, \\ X_{34} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{000} + \lambda_{000} X'_{000}; \end{aligned}$$

Dans le cas I 5 ($\varepsilon = 1$), par les transformations réelles

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{22} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{12} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \\ X_{34} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{000} + \lambda_{000} X'_{000}; \end{aligned}$$

Dans le cas I 5 ($\varepsilon = \varepsilon' = -1$), par les transformations réelles

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{22} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{246} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_6 X'_{246}, \\ X_{235} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 X'_{235}, \quad X_{145} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 X'_{145}, \quad X_{136} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 X'_{136}. \end{aligned}$$

Quant au cas I 1, on voit sans difficulté qu'on peut multiplier les transformations X par des coefficients ρ de manière à réduire tous les λ à l'unité. Les X forment alors un système de transformations réelles définissant le groupe réel \mathfrak{g} .

Dans le cas $\delta = 6$, il y a un seul type de groupes réels : c'est le plus grand groupe linéaire et homogène laissant invariante la forme cubique (1)

$$(17) \quad \sum x_\alpha y_\beta z_{\alpha\beta} - \sum (\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu) z_{\alpha\beta} z_{\gamma\delta} z_{\lambda\mu},$$

aux 27 variables réelles

$$x_\alpha, \quad y_\alpha, \quad z_{\alpha\beta} = -z_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6).$$

Quant au cas $\delta = -26$, qui correspond à

$$k < 0, \quad \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 > 0,$$

il donne aussi un seul type de groupes réels. On montre facilement en

(1) C., p. 142-143.

effet que les coefficients $\rho_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta\gamma}$, $\rho'_{\alpha\beta\gamma}$, ρ_{000} , ρ'_{000} , par lesquels on peut multiplier les X sans changer les formules de structure du groupe, sont donnés par les formules

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}, \quad \rho_{\alpha\beta\gamma} = \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma, \quad \rho'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma}, \quad \rho_{000} = \frac{1}{\prod \rho_\alpha}, \quad \rho'_{000} = -\prod \rho_\alpha.$$

On aura alors

$$\Lambda_{000} = \rho_{000} \bar{\rho}_{000} \lambda_{000},$$

ce qui permet de supposer $\lambda_{000} = -1$, $k = -1$, avec $|\rho_{000}| = 1$.

On a ensuite

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_1}{\rho_3 \bar{\rho}_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad \frac{\Lambda_1}{\Lambda_5} = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_6}{\rho_5 \bar{\rho}_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_5};$$

on peut donc disposer des ρ de manière à avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5$. On aura par suite

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = -\frac{1}{\lambda_1}$$

et, d'après (10),

$$\left(\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}_1}\right)^3 = 1,$$

ce qui permet de supposer $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$, puisque les λ ne sont définis qu'à une racine cubique près de l'unité. Les $\bar{\lambda}_x$ sont donc tous réels. Enfin la formule

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_1}{\rho_2 \bar{\rho}_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{ou} \quad \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 = \frac{\rho_1 \bar{\rho}_1}{\rho_2 \bar{\rho}_2} \lambda_1 \bar{\lambda}_1$$

montre qu'on peut encore supposer λ_1 de module égal à 1. On aura donc finalement

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = -1, \quad \lambda_{000} = \lambda'_{000} = -1.$$

Les formules (8) deviennent, dans ce cas,

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_{2\alpha-1, 2\beta-1} = \bar{X}_{2\alpha, 2\beta}, & \bar{X}_{2\alpha-1, 2\beta} = -\bar{X}_{2\alpha, 2\beta-1}, \\ X_{2\alpha-1, 2\beta-1, 2\gamma-1} = -\bar{X}'_{2\alpha-1, 2\beta-1, 2\gamma-1}, & X_{2\alpha, 2\beta, 2\gamma} = -\bar{X}'_{2\alpha, 2\beta, 2\gamma}, \\ X_{2\alpha-1, 2\beta, 2\gamma} = -\bar{X}'_{2\alpha-1, 2\beta, 2\gamma}, & X_{2\alpha, 2\beta-1, 2\gamma-1} = -\bar{X}'_{2\alpha, 2\beta-1, 2\gamma-1}, \\ X_{2\alpha-1, 2\alpha, 2\beta-1} = \bar{X}'_{2\beta-1, 2\gamma-1, 2\gamma}, & X_{2\alpha-1, 2\alpha, 2\beta} = \bar{X}'_{2\beta, 2\gamma-1, 2\gamma}, \\ X_{000} = -\bar{X}'_{000}, & X_{2\alpha-1, 2\alpha-1} = \bar{X}_{2\alpha, 2\alpha} - \frac{1}{3} \sum \bar{X}_{\lambda\lambda}. \end{array} \right.$$

Il existe un groupe réel linéaire et homogène à 27 variables correspondant à $\delta = -26$, c'est celui qui laisse invariante la forme cubique (17) aux 27 variables complexes $x_\alpha, y_\alpha, z_{\alpha\beta}$, supposées liées par les relations

$$\begin{aligned} y_{2\alpha-1} &= \overline{x_{2\alpha}}, & y_{2\alpha} &= -\overline{x_{2\alpha-1}}, \\ z_{2\alpha-1, 2\beta-1} &= \overline{z_{2\alpha, 2\beta}}, & z_{2\alpha-1, 2\beta} &= \overline{z_{2\beta-1, 2\alpha}}. \end{aligned}$$

II. L'équation qui admet pour racines les 27 quantités (2) n'est pas à coefficients réels.

Dans ce cas, chacune des quantités (2) est imaginaire conjuguée d'une quantité (3). Il est évident qu'il y a autant de cas à distinguer que dans la catégorie I, chacun étant caractérisé par une des substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 obtenues plus haut.

II 1. Dans ce premier cas, on a évidemment

$$X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \overline{X_{\beta\alpha}}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\beta\gamma} \overline{X_{\alpha\beta\gamma}}, \quad X_{000} = \lambda_{000} \overline{X_{000}}, \quad X_{\alpha\alpha} = -\overline{X_{\alpha\alpha}}.$$

On trouve facilement que les coefficients λ peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma, \quad \lambda_{000} = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6}.$$

On a de plus

$$\frac{\overline{\lambda_1}}{\lambda_1} = \frac{\overline{\lambda_2}}{\lambda_2} = \dots = \frac{\overline{\lambda_6}}{\lambda_6} = k \quad (k^3 = 1).$$

Comme d'autre part les λ ne sont définis qu'à une racine cubique près de l'unité, on peut supposer $k = 1$, c'est-à-dire les λ_α tous réels.

On a manifestement

$$(19) \quad \delta_0 = -6.$$

Calculons δ . Pour cela désignons par ε_α le nombre ± 1 , qui est du signe de λ_α . On trouve facilement, grâce à la forme de $\psi(e)$,

$$\delta = \delta_0 - 2 \Pi \varepsilon_\alpha + 2 \Sigma \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + 2 \Sigma \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma.$$

Supposons qu'il y ait h quantités λ_α positives et k négatives. On

trouve facilement

$$\delta = - (h - k)^2 + 4 \frac{(h - k)(5 - hk)}{3} - 2(-1)^k.$$

On a ainsi les valeurs suivantes :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{lll} h = 6, & k = 0; & \delta = 2; \\ h = 5, & k = 1; & \delta = -14; \\ h = 4, & k = 2; & \delta = -14; \\ h = 3, & k = 3; & \delta = 2; \\ h = 2, & k = 4; & \delta = 2; \\ h = 1, & k = 5; & \delta = -14; \\ h = 0, & k = 6; & \delta = -78. \end{array} \right.$$

II 2, 3, 4, 5. Dans ces derniers cas, on peut poser

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \overline{X}_{\beta\alpha}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) \lambda_{\alpha\beta\gamma} \overline{X}_{\overline{\lambda\mu\nu}}, \\ X'_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) \lambda'_{\alpha\beta\gamma} \overline{X}'_{\overline{\lambda\mu\nu}}, \\ X_{000} = \lambda_{000} \overline{X}_{000}, \\ X'_{000} = \lambda'_{000} \overline{X}'_{000}. \end{array} \right.$$

Les coefficients λ sont de la forme

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}\lambda_{\gamma}, \quad \lambda'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}\lambda_{\gamma}}, \\ \lambda_{000} = \frac{(\overline{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6})}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}, \quad \lambda'_{000} = (\overline{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6})\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6. \end{array} \right.$$

On a de plus les relations

$$(23) \quad \frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1} = \frac{\overline{\lambda}_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\overline{\lambda}_6}{\lambda_6} = k, \quad \lambda_{000} = -k^3, \quad \lambda'_{000} = -\frac{1}{k^3},$$

où k est défini à une racine cubique près de l'unité.

On a enfin

$$X_{\alpha\alpha} = -\overline{X}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{3} \Sigma \overline{X}_{\lambda\lambda},$$

ce qui donne, pour les $e_{\alpha\alpha} = e_\alpha + i\eta_\alpha$, les relations

$$(24) \quad e_1 + e_{\bar{1}} = e_2 + e_{\bar{2}} = \dots = e_6 + e_{\bar{6}}, \quad \eta_\alpha = \eta_{\bar{\alpha}}, \quad \sum \eta_\alpha = 0.$$

On trouve facilement les valeurs de δ_0 :

$$\begin{array}{ll} \text{II}_2 & \delta_0 = 1 - 5 = -4; \\ \text{II}_3 & \delta_0 = 2 - 4 = -2; \\ \text{II}_4 & \delta_0 = 3 - 3 = 0; \\ \text{II}_5 & \delta_0 = 4 - 2 = 2. \end{array}$$

Quant au calcul de δ , il exige la considération des rectangles

$$e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} \quad (\bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \beta);$$

chacun d'eux donne deux carrés réels dont le signe est celui du nombre réel $-\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}$. Supposons qu'il y ait q couples d'indices deux à deux conjugués, et posons $\lambda_\alpha = h l_\alpha$, l_α désignant un nombre réel, pour tous les indices α égaux à leurs conjugués. Les formules (23) montrent qu'on a

$$k = \frac{\bar{h}}{h};$$

de plus, si α et β sont deux indices conjugués, on a

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \frac{h}{\bar{h}} \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha.$$

On a, par suite,

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6) = A \left(\frac{h}{\bar{h}} \right)^q h^{6-2q} \prod l_\alpha,$$

le coefficient A étant réel et positif, d'où les formules (22) donnent

$$-\left(\frac{h}{\bar{h}} \right)^3 = (-1)^q A \left(\frac{h}{\bar{h}} \right)^q h^{6-2q} \prod l_\alpha,$$

ou finalement

$$\text{sgn} \prod l_\alpha = (-1)^{q+1}.$$

En d'autres termes, si l'on désigne par ε_α la quantité ± 1 du signe

de $l_\alpha (\bar{\alpha} = \alpha)$, on a la relation

$$\prod \varepsilon_\alpha = (-1)^{q+1};$$

d'ailleurs on peut toujours supposer que ce sont les quantités ε_α positives qui sont en plus grand nombre.

On a par suite la formule

$$\delta = \delta_0 - 2 \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta.$$

En distinguant tous les cas possibles, on obtient :

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \text{II 2 } (q = 0, \prod \varepsilon_\alpha = -1): \\ \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0, \quad \varepsilon_6 < 0; \quad \delta_0 = -4, \quad \delta = -14; \\ \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0, \quad \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 < 0; \quad \delta_0 = -4, \quad \delta = 2. \\ \text{II 3 } (q = 1, \prod \varepsilon_\alpha = 1): \\ \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0; \quad \delta_0 = -2, \quad \delta = -14; \\ \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_3, \varepsilon_4 < 0; \quad \delta_0 = -2, \quad \delta = 2. \\ \text{II 4 } (q = 2, \prod \varepsilon_\alpha = -1): \\ \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 < 0; \quad \delta_0 = 0, \quad \delta = 2. \\ \text{II 5 } (q = 0): \quad \delta_0 = 2, \quad \delta = 2. \end{array} \right.$$

En résumé, pour les groupes de la seconde catégorie, le caractère δ peut prendre trois valeurs distinctes : 2, -14, -78.

Nous allons montrer qu'à chaque valeur de δ correspond un seul type de groupes réels. Montrons d'abord que, pour $\delta = 2$ et -14, on peut toujours choisir le sous-groupe γ de manière à avoir $\delta_0 = -2$.

D'abord dans le cas II 1, si les λ_α ne sont pas tous négatifs, on peut toujours supposer $\lambda_6 > 0$ et choisir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ de manière que les deux produits $\lambda_1 \lambda_2$ et $\lambda_3 \lambda_4$ soient positifs. Il suffira alors de prendre le sous-groupe γ défini par les transformations réelles

$$\begin{aligned} & i(X_{11} - X_{22}), \quad i(X_{33} - X_{44}), \quad i(X_{11} + X_{22} + X_{33} + X_{44} - X_{66}), \\ & i(2X_{55} + X_{66}), \quad X_{126} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_6 X'_{126}, \quad X_{346} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 X'_{346}. \end{aligned}$$

Dans le cas II 2, on prendra les transformations réelles

$$\begin{aligned} & X_{11} + X_{22} + \dots + X_{66}, \quad i(X_{11} + X_{66} - 2X_{55}), \quad i(X_{22} - X_{55}), \\ & i(X_{33} - X_{55}), \quad i(X_{44} - X_{55}), \quad X_{126} + \frac{\lambda_1}{\lambda_6} X'_{126}. \end{aligned}$$

Dans le cas II 4, on prendra les transformations réelles

$$X_{11} + X_{22} + \dots + X_{66}, \quad i(X_{11} + X_{22} - X_{55} - X_{66}), \quad i(X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66}),$$

$$X_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} X_{34} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}}} X_{43}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}} X_{56} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}}} X_{65}.$$

Enfin, dans le cas II 5, on prendra les transformations réelles

$$X_{11} + X_{22} + \dots + X_{66}, \quad i(X_{11} + X_{22} - X_{55} - X_{66}), \quad i(X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66}),$$

$$\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} X_{12} + \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} X_{21}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} X_{34} + \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}}} X_{43},$$

$$\sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}} X_{56} + \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}}} X_{65}.$$

On vérifie facilement que, dans les cas II 3 ($\delta = 2$ ou -14), on peut réduire les λ à des valeurs bien déterminées. Mais pour avoir un représentant de chacun de ces deux types (ainsi d'ailleurs que du type $\delta = -78$), on peut se supposer ramené au cas II 1. Nous prendrons dans ce cas :

Pour $\delta = 2$, les λ_α tous positifs ;

Pour $\delta = -14$, les λ_α positifs, sauf λ_6 négatif ;

Pour $\delta = -78$, les λ_α tous négatifs.

On montre facilement que chaque λ_α peut être réduit à l'une des valeurs ± 1 . On a alors les formules suivantes pour définir les trois types réels de la seconde catégorie :

1° $\delta = 2$:

$$X_{\alpha\beta} = -\overline{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = \overline{X}'_{\alpha\beta\gamma}, \quad X_{000} = -\overline{X}'_{000} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

2° $\delta = -14$:

$$X_{\alpha\beta} = -\overline{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha 6} = \overline{X}_{6\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = \overline{X}'_{\alpha\beta\gamma}, \quad X_{\alpha\beta 6} = -\overline{X}'_{\alpha\beta 6},$$

$$X_{000} = \overline{X}'_{000}, \quad X_{66} = -\overline{X}_{66} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4, 5).$$

3° $\delta = -78$:

$$X_{\alpha\beta} = -\overline{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = -\overline{X}'_{\alpha\beta\gamma}, \quad X_{000} = -\overline{X}'_{000} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Aucun de ces trois types n'admet un représentant linéaire et homogène à 27 variables réelles. Mais il en existe à 54 variables réelles. C'est le plus grand groupe linéaire et homogène qui laisse invariante la forme cubique à 27 variables complexes

$$\Sigma x_{\alpha} y_{\beta} z_{\alpha\beta} - \Sigma (\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu) z_{\alpha\beta} z_{\gamma\delta} z_{\lambda\mu},$$

et en même temps, si $\delta = 2$, la forme d'Hermité

$$\Sigma x_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} + \Sigma y_{\alpha} \bar{y}_{\alpha} - \Sigma z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta},$$

si $\delta = -14$, la forme d'Hermité

$$\Sigma x_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} - x_6 \bar{x}_6 - \Sigma y_{\alpha} \bar{y}_{\alpha} + y_6 \bar{y}_6 + \Sigma z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta} - \Sigma z_{\alpha 6} \bar{z}_{\alpha 6};$$

si $\delta = -78$, la forme d'Hermité définie positive

$$\Sigma x_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} + \Sigma y_{\alpha} \bar{y}_{\alpha} + \Sigma z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta}.$$

En résumé, il y a cinq types de groupes réels correspondant au type (E) ($l=6$) des groupes complexes : ils sont respectivement de caractères

$$\delta = 6, \quad -26; \quad 2, \quad -14, \quad -78.$$

Dans le dernier type, la forme quadratique $\psi(e)$ est définie négative ; l'équation caractéristique a ses racines toutes purement imaginaires.

Il résulte de plus de la discussion que la forme cubique (17) n'admet que deux formes réelles irréductibles l'une à l'autre par une substitution réelle.

VIII. — Groupes G du type (E) ($l=7$).

Ces groupes sont de rang 7 et d'ordre 133. Les transformations peuvent être mises sous la forme (1)

$$X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, 8),$$

(1) Les notations employées ici diffèrent de celles qui sont indiquées dans ma Thèse (p. 91). Les différences consistent en ce que j'écris ici $X_{\alpha\delta}$ à la place de $X_{00\alpha}$, $X_{\delta\alpha}$ à la place de $X'_{00\alpha}$, $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ à la place de $X_{\alpha\beta\gamma}$ et $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ à la place de $X'_{\lambda\mu\nu}$.

($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, 7$).

où, dans la transformation $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$, on peut faire subir une permutation quelconque aux indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, à condition de changer le signe si cette permutation est impaire.

Les formules de structure sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta}) = (X_{\alpha\gamma} X_{\gamma\beta}) = X_{\alpha\beta}, \quad (X_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}) = X_{\alpha\alpha} - X_{\beta\beta}, \\ (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta\gamma\delta}) = \frac{1}{2} X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (X_{\alpha\alpha} X_{\beta\gamma\delta\epsilon}) = -\frac{1}{2} X_{\beta\gamma\delta\epsilon}, \\ (X_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma\delta\epsilon}) = X_{\alpha\gamma\delta\epsilon}, \\ (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha\epsilon\lambda\mu}) = (\alpha\epsilon\lambda\mu\beta\gamma\delta\nu) X_{\alpha\nu}, \\ (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\epsilon\lambda\mu\nu}) = \frac{1}{2} (\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\lambda\mu\nu) \\ \quad \times (X_{\epsilon\epsilon} + X_{\lambda\lambda} + X_{\mu\mu} + X_{\nu\nu} - X_{\alpha\alpha} - X_{\beta\beta} - X_{\gamma\gamma} - X_{\delta\delta}). \end{array} \right.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$\omega_\alpha - \omega_\beta, \quad \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta,$$

où les huit quantités ω_α sont liées par la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_8 = 0.$$

A ces racines appartiennent respectivement les transformations

$$X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Le sous-groupe γ est formé des huit transformations $X_{\alpha\alpha}$ liées par les relations

$$X_{11} + X_{22} + \dots + X_{88} = 0.$$

Il existe un système de 56 quantités covariant au système de l'équation caractéristique; il est formé des quantités

$$(2) \quad \omega_\alpha + \omega_\beta, \quad -\omega_\alpha - \omega_\beta.$$

On a, pour la transformation $\Sigma e_{\alpha\alpha} X_{\alpha\alpha}$, où la somme des $e_{\alpha\alpha}$ est supposée nulle, les valeurs $\omega_\alpha = e_{\alpha\alpha}$.

La forme quadratique $\psi(e)$ est, à un facteur positif près, la somme des carrés des quantités (2); on trouve

$$(3) \quad \psi(e) = h[\Sigma(e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta})^2 + 6\Sigma e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} - 6\Sigma(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\lambda\mu\nu) e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\epsilon\lambda\mu\nu}].$$

Si l'on part d'une transformation réelle \mathcal{J} , les 56 quantités (2) sont réelles ou complexes conjuguées. Si on leur fait correspondre les lettres

$$a_{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta},$$

le problème se pose de déterminer toutes les substitutions d'ordre 2 du groupe de Galois de ces lettres (1).

Nous conviendrons de dire que deux lettres sont *alliées* si la différence des quantités (2) correspondantes est une racine de l'équation caractéristique de G. Deux lettres a ou deux lettres b sont alliées quand elles ont un indice commun; une lettre a et une lettre b sont alliées quand elles n'ont aucun indice commun.

Il existe toujours une substitution remplaçant deux lettres alliées par deux lettres alliées et une autre remplaçant deux lettres non alliées par deux lettres non alliées.

Enfin nous appellerons *opposées* deux lettres a et b aux mêmes indices.

Montrons d'abord que toute substitution S d'ordre 2 laisse au moins une lettre invariante ou du moins contient un cycle formé de deux lettres opposées.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. On peut toujours supposer que l'un des cycles de S est $(a_{12}a_{13})$ ou $(a_{12}b_{13})$. Le deuxième cas se ramène au premier en changeant les a en b et les b en a pour une des lettres de chaque cycle.

La substitution S contenant le cycle $(a_{12}a_{13})$ échange entre elles les lettres alliées à la fois à a_{12} et a_{13} , c'est-à-dire les lettres

$$a_{1i}, \quad a_{23}, \quad b_{ij} \quad (i, j = 4, 5, 6, 7, 8).$$

La lettre a_{23} en particulier est changée soit en a_{14} , soit en b_{45} .

1° Si l'on a

$$S = (a_{12}a_{13})(a_{23}a_{14}) \dots,$$

chaque lettre $a_{2\alpha} (\alpha \geq 5)$, qui est alliée à $a_{12}, a_{23}, b_{13}, b_{14}$, sera remplacée par une lettre alliée à $a_{13}, a_{14}, b_{12}, b_{23}$, c'est-à-dire par une lettre

(1) Ce groupe est étudié (*Amer. J. of Math.*, t. XVIII, p. 43-50).

$b_{2\bar{2}}(\bar{\alpha} \geq 5)$. Si nous ne voulons dans la substitution S aucun cycle contenant deux lettres opposées, nous aurons donc

$$S = (a_{12}a_{13})(a_{23}a_{14})(a_{25}b_{26})(a_{27}b_{28}) \dots$$

La lettre a_{57} , qui est alors alliée à

$$b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, a_{25}, b_{26}, a_{27}, b_{28},$$

sera remplacée par une lettre alliée à

$$b_{13}, b_{12}, b_{14}, b_{23}, b_{26}, a_{25}, b_{28}, a_{27};$$

or il n'y a que a_{57} qui jouisse de cette propriété. Nous arrivons donc à une contradiction.

2° Si l'on a

$$S = (a_{12}a_{13})(a_{23}b_{45}) \dots,$$

la lettre a_{14} alliée à $a_{12}, a_{13}, b_{23}, a_{45}$ sera remplacée par une lettre alliée à $a_{13}, a_{12}, a_{45}, b_{23}$; ce ne peut être que a_{45} . On a donc

$$S = (a_{12}a_{13})(a_{23}b_{45})(a_{14}a_{15}) \dots$$

Mais alors la lettre a_{24} , alliée aux lettres

$$a_{12}, b_{13}, a_{23}, a_{45}, a_{14}, b_{15},$$

sera remplacée par une lettre alliée aux lettres

$$a_{13}, b_{12}, b_{45}, b_{23}, a_{15}, b_{14};$$

or il n'y a que b_{24} qui satisfasse à cette condition. La substitution S contiendrait donc le cycle $(a_{24}b_{24})$, contrairement à l'hypothèse.

Supposons donc maintenant que la substitution S laisse une lettre invariante, par exemple a_{78} . Elle échangera entre elles les lettres alliées de a_{78} , c'est-à-dire

$$a_{\alpha 7}, a_{\alpha 8}, b_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Le groupe de ces 27 lettres est celui dont nous nous sommes occupé

dans le Chapitre précédent; les lettres

$$a_{\alpha 7}, \quad a_{\alpha 8}, \quad b_{\alpha \beta}$$

jouent maintenant le rôle que jouaient

$$a_{\alpha}, \quad b_{\alpha}, \quad c_{\alpha \beta}.$$

Par suite, on a les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, \\ S_2 &= (a_{\alpha 7} a_{\bar{\alpha} 8}) (b_{\alpha 7} b_{\bar{\alpha} 8}) (a_{\alpha \beta} a_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}) (b_{\alpha \beta} b_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}), \end{aligned}$$

où $\bar{\alpha}$ désigne l'indice transformé de α dans une substitution quelconque d'ordre 2 portant sur les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Si maintenant la substitution S contient un cycle formé de deux lettres opposées, on aura

$$\begin{aligned} S'_1 &= (a_{\alpha \beta} b_{\alpha \beta}), \\ S'_2 &= (a_{\alpha 7} b_{\bar{\alpha} 8}) (b_{\alpha 7} a_{\bar{\alpha} 8}) (a_{7 8} b_{7 8} (a_{\alpha \beta} b_{\bar{\alpha} \bar{\beta}})). \end{aligned}$$

Tous ces cas peuvent se réunir en deux seulement. On considère une substitution d'ordre 2 portant sur les huit indices 1, 2, ..., 8; si l'on désigne par $\bar{\alpha}$ l'indice transformé de α , on aura les deux catégories de substitutions

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \Pi(a_{\alpha \beta} a_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}) (b_{\alpha \beta} b_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}) \\ \Sigma_2 = \Pi(a_{\alpha \beta} b_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}) \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 8).$$

Comme une substitution d'ordre 2 portant sur huit lettres peut être formée de 0, 1, 2, 3, 4 cycles de deux lettres, on a dix substitutions possibles. Ces dix substitutions sont essentiellement distinctes. En effet, les cinq substitutions Σ_1 contiennent respectivement

$$0, \quad 12, \quad 20, \quad 24, \quad 24$$

cycles; mais la dernière ne contient que des cycles formés de deux lettres non alliées, ce qui n'est pas le cas pour l'avant-dernière. Quant aux dix substitutions Σ_2 , elles contiennent toutes 28 cycles; mais comme on les obtient en multipliant les cinq substitutions distinctes

Σ_1 par une substitution $(a_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta})$, invariante dans le groupe, les produits sont essentiellement distincts.

I. Les formules qui donnent un groupe réel dans le cas de la substitution Σ_1 sont :

$$(5) \quad \begin{cases} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}. \end{cases}$$

Les coefficients λ sont donnés par les formules

$$(6) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}\lambda_{\gamma}\lambda_{\delta}, \quad \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_8 = (\bar{1}\bar{2}\bar{3}\dots\bar{8}).$$

De plus on a

$$\bar{\lambda}_1\lambda_{\bar{1}} = \dots = \bar{\lambda}_8\lambda_{\bar{8}} = k \quad (k^4 = 1);$$

comme k est réel, il est égal à ± 1 . Il ne peut d'ailleurs être égal à -1 que si la substitution des huit indices 1, 2, ..., 8 contient quatre cycles.

On a enfin

$$X_{\alpha\alpha} = \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}.$$

Calculons d'abord δ_0 . En désignant par q le nombre de cycles de la substitution effectuée sur les huit indices 1, 2, ..., 8, on a

$$\delta_0 = 7 - 2q.$$

Pour avoir δ , supposons d'abord $q < 4$. Alors il faut considérer dans $\psi(e)$ les rectangles $e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha}$, où l'on suppose $\bar{\alpha} = \beta$. Il y a q de ces rectangles; or l'on a

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\bar{\alpha}}} = \lambda_{\alpha}\bar{\lambda}_{\alpha} > 0.$$

Par suite on trouve immédiatement

$$(7) \quad \delta = \delta_0 + 2q = 7 \quad (q = 0, 1, 2, 3).$$

Supposons maintenant $q = 4$. On peut supposer

$$\bar{1} = 2, \quad \bar{3} = 4, \quad \bar{5} = 6, \quad \bar{7} = 8.$$

Il faut alors considérer les rectangles

$$e_{2\alpha-1,2\alpha} e_{2\alpha,2\alpha-1} - (\alpha\beta\gamma\delta\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}) e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}},$$

en supposant dans les derniers rectangles que les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont pris respectivement dans chacun des couples (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8).

La formule

$$X_{2\alpha-1,2\alpha} = \frac{\lambda_{2\alpha-1}}{\lambda_{2\alpha}} \bar{X}_{2\alpha,2\alpha-1} = k \lambda_{2\alpha-1} \bar{\lambda}_{2\alpha-1} \bar{X}_{2\alpha,2\alpha-1}$$

montre que chacun des rectangles $e_{2\alpha-1,2\alpha}, e_{2\alpha,2\alpha-1}$, donne naissance à deux carrés du signe de k .

On a de plus

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \lambda_{\gamma} \lambda_{\delta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}};$$

si parmi les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, il y en a h pairs, on a

$$\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \lambda_{\gamma} \lambda_{\delta} = \frac{k^h \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_7}{m^2} \quad (m^2 > 0),$$

puis

$$(\alpha\beta\gamma\delta\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}) = (\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}\delta\bar{\delta}) = (-1)^h;$$

par suite le rectangle correspondant fournit deux carrés réels dont le signe est celui de

$$(-k)^h \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_7.$$

Désignons enfin par ε le signe du produit $\lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_7$. On aura

$$\delta = -1 + 8k + 8\varepsilon - 8\varepsilon k.$$

Par suite

$$(8) \quad \begin{cases} k = 1, & \delta = 7; \\ \varepsilon = 1, & \delta = 7; \\ k = \varepsilon = -1, & \delta = -25. \end{cases}$$

En résumé on trouve pour δ les deux valeurs 7 et -25.

II. Plaçons-nous maintenant dans le cas de la substitution Σ_2 . Nous avons

$$(9) \quad \begin{cases} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau) \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{X}_{\bar{\varepsilon}\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\tau}}. \end{cases}$$

Les coefficients λ sont donnés par les formules

$$(10) \quad \lambda_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma \lambda_\delta, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_8 = (\bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \bar{8}).$$

De plus on a

$$(11) \quad \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\bar{\lambda}_8}{\lambda_8} = k \quad (k^4 = 1).$$

Comme les λ_α ne sont définis qu'à une racine quatrième près de l'unité, le nombre k est défini au signe près.

On a enfin

$$X_{\alpha\alpha} = -\bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}.$$

Calculons d'abord δ_0 . En désignant par q le nombre des cycles de la substitution effectuée sur les indices 1, 2, ..., 8, on a

$$(12) \quad \delta_0 = 2q - 7.$$

Pour calculer δ , il faut considérer dans $\psi(e)$ les rectangles

$$e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} \quad (\bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \beta), \\ -(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau) e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\varepsilon\rho\sigma\tau} \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta} = \alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Si $q = 4$ les premiers rectangles ne sont pas à considérer; les seconds rectangles (en supposant $\bar{2}\alpha = 2\alpha - 1$) sont de la forme

$$-e_{1,2,2\alpha-1,2\alpha} e_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma}.$$

Or on a

$$X_{1,2,2\alpha-1,2\alpha} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{2\alpha-1} \lambda_{2\alpha} X_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma} = k^2 \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \lambda_{2\alpha-1} \bar{\lambda}_{2\alpha-1} \bar{X}_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma}.$$

Le rectangle correspondant donne deux carrés du signe de $-k^2$. On a donc

$$\delta = 1 - 6k^2 \quad (q = 4), \\ \delta = 7, \quad (k^2 = -1), \\ \delta = -5, \quad (k^2 = +1).$$

Si maintenant q est inférieur à 4, on trouve, comme dans le cas de $l=6$, que les λ_α pour lesquels $\bar{\alpha} = \alpha$ sont proportionnels à des

nombres réels; si l'on pose $\lambda_\alpha = h l_\alpha$, les l_α étant réels, le produit des l_α est du signe de $(-1)^q$. Les rectangles $e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}$ fournissent alors dans δ le terme

$$- 2 \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta,$$

où l'on suppose $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ du signe de l_α et où tous les ε_α peuvent être changés simultanément de signe.

Si $q = 3$ et si la substitution effectuée sur les huit indices 1, 2, ..., 8 est (34) (56) (78), on aura à considérer les rectangles

$$- e_{1,2,2\alpha-1,2\alpha} e_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, 4).$$

Or on a

$$\begin{aligned} X_{1,2,2\alpha-1,2\alpha} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{2\alpha-1} \lambda_{2\alpha} \bar{X}_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma} \\ &= - \frac{k^2}{(h\bar{h})^3} l_1 l_2 \lambda_{2\alpha-1} \bar{\lambda}_{2\alpha-1} \bar{X}_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\delta = \delta_0 + 2 - 6k^2 = \begin{cases} 7 & (k^2 = -1), \\ -5 & (k^2 = +1). \end{cases}$$

Si $q = 2$ et si l'on a la substitution (56) (78), on aura à considérer les rectangles

$$- (\alpha\beta\gamma) e_{1\alpha 5\beta} e_{\beta\gamma 78} - (\alpha\beta\gamma) e_{1\alpha 78} e_{\beta\gamma 56} - e_{1234} e_{5678} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, 4).$$

Or on a

$$\begin{aligned} X_{1\alpha 5\beta} &= - (\alpha\beta\gamma) \lambda_1 \lambda_\alpha \lambda_5 \lambda_\beta \bar{X}_{\beta\gamma 78} = - (\alpha\beta\gamma) \frac{k^2}{(h\bar{h})^3} l_1 l_\alpha \lambda_5 \bar{\lambda}_5 \bar{X}_{\beta\gamma 78}, \\ X_{1\alpha 78} &= - (\alpha\beta\gamma) \lambda_1 \lambda_\alpha \lambda_7 \lambda_8 \bar{X}_{\beta\gamma 56} = - (\alpha\beta\gamma) \frac{k^2}{(h\bar{h})^3} l_1 l_\alpha \lambda_7 \bar{\lambda}_7 \bar{X}_{\beta\gamma 56}, \\ X_{1234} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \bar{X}_{5678} = \frac{k^2}{(h\bar{h})^2} l_1 l_2 l_3 l_4 \bar{X}_{5678}. \end{aligned}$$

On a, par suite,

$$\delta = \delta_0 - 2 \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + 4 k^2 \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) - 2 k^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = \delta_0 + 2(k^2 - 1) \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta - 2 k^2;$$

par suite :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0; & \quad \delta = \begin{cases} -25 & (k^2 = -1), \\ -5 & (k^2 = +1); \end{cases} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0; \varepsilon_3, \varepsilon_4 < 0; & \quad \delta = \begin{cases} 7 & (k^2 = -1), \\ -5 & (k^2 = +1). \end{cases} \end{aligned}$$

Si $q = 1$ et si l'on a la substitution (78), on aura à considérer les rectangles

$$-(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)e_{1\alpha\beta\gamma}e_{2\varepsilon78} - (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)e_{1\alpha78}e_{\beta\gamma\delta\varepsilon} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 2, 3, 4, 5, 6).$$

Or on a

$$\begin{aligned} X_{1\alpha\beta\gamma} &= -(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\lambda_1\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\bar{X}_{\delta\varepsilon78} = -(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\frac{k^2}{(h\bar{h})^3}l_1l_\alpha l_\beta l_\gamma\bar{X}_{\delta\varepsilon78}, \\ X_{1\alpha78} &= (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\lambda_1\lambda_\alpha\lambda_7\lambda_8\bar{X}_{\beta\gamma\delta\varepsilon} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\frac{k^2}{(h\bar{h})^3}l_1l_\alpha\lambda_7\lambda_8\bar{X}_{\beta\gamma\delta\varepsilon}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\delta = \delta_0 - 2\sum\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 2k^2\varepsilon_1\sum\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma - 2k^2\varepsilon_1\sum\varepsilon_\alpha.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0, \varepsilon_6 < 0; \quad \delta &= \begin{cases} -5 & (k^2 = -1), \\ -25 & (k^2 = 1); \end{cases} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6 < 0; \quad \delta &= \begin{cases} -5 & (k^2 = -1), \\ 7 & (k^2 = 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Si, enfin, $q = 0$, on aura à considérer les rectangles

$$-(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\sigma\tau)e_{1\alpha\beta\gamma}e_{\delta\varepsilon\sigma\tau};$$

or l'on a

$$X_{1\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\sigma\tau)\lambda_1\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\bar{X}_{\delta\varepsilon\sigma\tau} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\sigma\tau)\frac{k^2}{(h\bar{h})^2}l_1l_\alpha l_\beta l_\gamma\bar{X}_{\delta\varepsilon\sigma\tau}.$$

On aura donc

$$\delta = \delta_0 - 2\sum\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta - 2k^2\varepsilon_1\sum\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = \delta_0 - 2\sum\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta - k^2\sum\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma\varepsilon_\delta.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \varepsilon_8 > 0; \quad \delta &= \begin{cases} 7 & (k^2 = -1), \\ -133 & (k^2 = 1); \end{cases} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0, \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0; \quad \delta &= \begin{cases} -25 & (k^2 = -1), \\ -5 & (k^2 = 1); \end{cases} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0; \quad \delta &= \begin{cases} 7 & (k^2 = -1), \\ -5 & (k^2 = 1). \end{cases} \end{aligned}$$

En résumé, on obtient pour δ quatre valeurs distinctes :

$$\delta = 7, \quad -5, \quad -25, \quad -133.$$

Nous allons montrer que les groupes réels de même caractère δ sont isomorphes entre eux.

Rappelons d'abord les cas dans lesquels ces différents caractères se sont présentés. On a le Tableau suivant :

$\delta = 7$	}	I. $q < 4$;		$\delta_0 = 7 - 2q$;	
		I. $q = 4$, k ou $\varepsilon = 1$;		$\delta_0 = -1$;	
		II. $q = 3, 4$, $k^2 = -1$;		$\delta_0 = -1, 1$;	
		II. $q = 2$, $k^2 = -1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3, \varepsilon_4 < 0$;	$\delta_0 = -3$;	
		II. $q = 1$, $k^2 = 1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 < 0$;	$\delta_0 = -5$;	
		II. $q = 0$, $k^2 = -1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0$;	$\delta_0 = -7$.	
$\delta = -5$	}	II. $q = 4, 3$, $k^2 = 1$;		$\delta_0 = 1, -1$;	
		II. $q = 2$, $k^2 = 1$;		$\delta_0 = -3$;	
		II. $q = 1$, $k^2 = -1$;		$\delta_0 = -5$;	
		II. $q = 0$, $k^2 = 1$;	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0, \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0, \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0$;	$\delta_0 = -7$.	
$\delta = -25$	}	I. $q = 4$, $k = \varepsilon = -1$;		$\delta_0 = -1$;	
		II. $q = 2$, $k^2 = -1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$;	$\delta_0 = -3$;	
		II. $q = 1$, $k^2 = 1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0, \varepsilon_6 < 0$;	$\delta_0 = -5$;	
		II. $q = 0$, $k^2 = -1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0, \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0$;	$\delta_0 = -7$.	
$\delta = -133$	}	II. $q = 0$,	$k^2 = 1$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8 > 0$;	$\delta_0 = -7$.

Étude du cas $\delta = 7$. — Nous allons montrer que dans ce cas on peut toujours choisir le sous-groupe γ de manière à donner à δ_0 la valeur 7, on sera ainsi ramené au cas I ($q = 0$).

Le Tableau suivant indique dans chaque cas les sept transformations réelles qu'il suffit de choisir pour définir le nouveau sous-groupe γ :

I. $q = 1$. On prendra

$$2X_{\alpha\alpha} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{78} + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} X_{87} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

I. $q = 2$. On prendra

$$2X_{\alpha\alpha} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{55} + X_{66} - X_{77} - X_{88}, \\ X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{78} + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} X_{87} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

I. $q = 3$. On prendra

$$2X_{11} - X_{77} - X_{88}, \quad 2X_{22} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{77} - X_{88}, \\ X_{55} + X_{66} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{34} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{78} + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} X_{87}.$$

I. $q = 4, k = 1$. On prendra

$$X_{11} + X_{22} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{55} + X_{66} - X_{77} - X_{88}, \\ X_{12} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \quad X_{34} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{78} + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} X_{87}.$$

I. $q = 4, k = -1, \varepsilon = 1$. On prendra

$$X_{11} + X_{22} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{77} - X_{88}, \quad X_{55} + X_{66} - X_{77} - X_{88}, \\ X_{1357} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_7 X_{2468}, \quad X_{1,2\alpha-1,2\beta,2\gamma} + \lambda_1 \lambda_{2\alpha-1} \lambda_{2\beta} \lambda_{2\gamma} X_{2,2\alpha,2\beta-1,2\gamma-1} \\ (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, 4).$$

II. $q = 4, k^2 = -1$. On prendra

$$X_{11} - X_{22}, \quad X_{2\alpha-1,2\alpha-1} - X_{2\alpha,2\alpha}, \quad X_{1,2,2\alpha-1,2\alpha} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{2\alpha-1} \lambda_{2\alpha} X_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma} \\ (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, 4).$$

II. $q = 3, k^2 = -1$. On prendra

$$X_{2\alpha-1,2\alpha-1} - X_{2\alpha,2\alpha}, \quad X_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \\ X_{1,2,2\alpha-1,2\alpha} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{2\alpha-1} \lambda_{2\alpha} X_{2\beta-1,2\beta,2\gamma-1,2\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, 4).$$

II. $q = 2, k^2 = -1; \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3, \varepsilon_4 < 0$. On prendra

$$X_{55} - X_{66}, \quad X_{77} - X_{88}, \quad X_{13} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} X_{31}, \quad X_{24} - \frac{\lambda_2}{\lambda_4} X_{42}, \\ X_{1356} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 X_{2478}, \quad X_{1378} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_7 \lambda_8 X_{2456}, \quad X_{1234} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 X_{5678}.$$

II. $q = 1, k^2 = 1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 < 0$. On prendra

$$X_{77} - X_{88}, \quad X_{14} - \frac{\lambda_1}{\lambda_4} X_{41}, \quad X_{25} - \frac{\lambda_2}{\lambda_5} X_{52}, \quad X_{36} - \frac{\lambda_3}{\lambda_6} X_{63}, \\ X_{1245} - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 X_{3678}, \quad X_{1346} - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 X_{2578}, \quad X_{1478} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_7 \lambda_8 X_{2356}.$$

II. $q = 0, k^2 = -1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8 \geq 0$. On prendra

$$X_{1234} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 X_{5678}, \quad X_{1256} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 X_{3478}, \quad X_{1278} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8 X_{3456}, \\ X_{1358} - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_8 X_{2467}, \quad X_{1367} - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 \lambda_7 X_{2458}, \quad X_{1457} - \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_7 X_{2368}, \\ X_{1468} - \lambda_1 \lambda_4 \lambda_6 \lambda_8 X_{2357}.$$

On se ramène donc toujours au cas $\delta_0 = 7$. On vérifie facilement que dans ce cas on peut supposer toutes les transformations X réelles. On a un groupe de ce type linéaire et homogène à 56 variables réelles en prenant le groupe qui laisse invariante la forme biquadratique (1)

$$(12) \quad \Sigma x_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta} y_{\alpha\delta} y_{\beta\gamma} + \Sigma (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau) (x_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta} x_{\varepsilon\rho} x_{\sigma\tau} + y_{\alpha\beta} y_{\gamma\delta} y_{\varepsilon\rho} y_{\sigma\tau}),$$

et la forme bilinéaire alternée

$$(13) \quad \Sigma [x_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}],$$

les variables $x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 8$) étant telles que $x_{\beta\alpha} = -x_{\alpha\beta}$, $y_{\beta\alpha} = -y_{\alpha\beta}$.

Étude du cas $\delta = -5$. — Nous allons d'abord montrer que tous les cas pour lesquels $\delta = -5$ se ramènent au cas $q = 4$, c'est-à-dire qu'on peut choisir le sous-groupe γ de manière à obtenir $\delta_0 = 1$.

Le Tableau suivant indique, dans chaque cas, les sept transformations réelles qu'il suffit de choisir pour définir le nouveau sous-groupe γ :

II. $q = 3, k^2 = 1$. On prendra

$$X_{33} - X_{44}, \quad X_{55} - X_{66}, \quad X_{77} - X_{88}, \quad X_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \\ X_{1234} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 X_{5678}, \quad X_{1256} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 X_{3478}, \quad X_{1278} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8 X_{3456}.$$

II. $q = 2, k^2 = 1$. On prendra

$$X_{55} - X_{66}, \quad X_{77} - X_{88}, \quad X_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \quad X_{34} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \\ X_{1234} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 X_{5678}, \quad X_{1256} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 X_{1278}, \quad X_{1278} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8 X_{3456}.$$

II. $q = 1, k^2 = -1$. On prendra

$$X_{77} - X_{88}, \quad i(X_{22} - X_{33}), \quad i(X_{44} - X_{55}), \quad X_{16} - \frac{\lambda_1}{\lambda_6} X_{61}, \\ X_{1236} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 X_{4578}, \quad X_{1456} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 X_{2378}, \quad X_{1678} + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 X_{2345}.$$

[(1) C., p. 143-144. J'écris ici $x_{\alpha\beta}$ et $y_{\alpha\beta}$ les variables que j'écrivais dans ma Thèse x_{β} et y_{β} .

II. $q = 0, k^2 = 1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0; \varepsilon_5, \varepsilon_6 \geq 0; \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0$. On prendra

$$\begin{aligned} X_{17} - \frac{\lambda_1}{\lambda_7} X_{71}, \quad X_{28} - \frac{\lambda_2}{\lambda_8} X_{82}, \quad X_{34} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad X_{56} - \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \\ X_{1347} - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_7 X_{2568}, \quad X_{1567} - \lambda_1 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 X_{2348}, \quad X_{1278} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8 X_{3456}. \end{aligned}$$

On démontre facilement que, dans le cas $q = 4, \delta_0 = 1, k^2 = 1$, on peut réduire les λ à des valeurs bien déterminées. *Il n'y a donc qu'un groupe réel de caractère $\delta = -5$.* Pour avoir un représentant, rien n'empêche de chercher la forme réduite pour $q = 0, k^2 = 1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0, \varepsilon_7, \varepsilon_8 < 0$. Comme k n'est défini qu'au signe près, on peut le supposer égal à 1. Alors les λ_α sont réels, les six premiers étant positifs, les deux derniers négatifs. On peut d'abord disposer des modules des ρ_α pour rendre les λ_α tous égaux en valeur absolue. Alors, d'après (10), cette valeur absolue commune est 1. Par suite,

$$(14) \quad X_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \bar{X}_{\varepsilon\rho\sigma\tau} \\ (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1, \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = -1).$$

Il n'existe aucun groupe linéaire et homogène à 56 variables réelles appartenant à ce type. Mais il en existe un à 112 variables réelles. C'est le groupe linéaire et homogène laissant invariantes les formes (12) et (13) à 56 variables complexes et la forme d'Hermite

$$(15) \quad \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (x_{\alpha\beta} \bar{x}_{\alpha\beta} + y_{\alpha\beta} \bar{y}_{\alpha\beta}).$$

Étude du cas $\delta = -25$. — Nous allons montrer que dans ce cas on peut toujours choisir le sous-groupe γ de manière à avoir $\delta_0 = -7$. Voici les transformations qu'il convient de choisir dans chaque cas :

I. $q = 4, k = \varepsilon = -1$. On prendra

$$\begin{aligned} i(X_{11} - X_{22}), \quad i(X_{33} - X_{44}), \quad i(X_{55} - X_{66}), \quad i(X_{77} - X_{88}), \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}} X_{1234} + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} X_{5678}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6}} X_{1256} + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6} X_{3478}, \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8}} X_{1278} + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8} X_{3456}. \end{aligned}$$

II. $q = 2, k^2 = -1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$. On prendra

$$i(X_{11} + X_{22} + X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66} - X_{77} - X_{88}),$$

$$X_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \quad X_{34} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}} X_{56} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}}} X_{65},$$

$$\sqrt{-\frac{\lambda_8}{\lambda_7}} X_{78} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_8}{\lambda_7}}} X_{87}, \quad X_{1256} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 X_{3478}, \quad X_{1278} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8 X_{3456}.$$

II. $q = 1, k^2 = 1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0; \varepsilon_6 < 0$. On prendra

$$i(X_{55} - X_{66}), \quad i(X_{11} + X_{22} + X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66} - X_{77} - X_{88}),$$

$$X_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \quad X_{34} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_8}{\lambda_7}} X_{78} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_8}{\lambda_7}}} X_{87},$$

$$X_{1256} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 X_{3478}, \quad X_{1278} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \lambda_8 X_{3456}.$$

Nous sommes donc ramenés à étudier le cas où

$$q = 0, \quad k^2 = -1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -\varepsilon_7 = -\varepsilon_8 = 1.$$

On peut supposer $k = i$ et l'on a

$$\bar{\lambda}_\alpha = i \lambda_\alpha, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_8 = 1;$$

l'argument de λ_α est de la forme $-\frac{\pi}{4} + n_\alpha \pi$ où n_α est nul, sauf n_7 et n_8 qui sont égaux à 1. On peut disposer des modules des coefficients ρ_α pour rendre les λ_α de même module; ce module sera alors égal à 1. On aura donc finalement

$$(16) \quad X_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \bar{X}_{\varepsilon\rho\sigma\tau}$$

$$(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1, \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = -1).$$

Tous les groupes réels de caractère $\delta = -25$ sont donc isomorphes. Il en existe un linéaire et homogène à 56 variables: c'est celui qui laisse invariantes les formes (12) et (13) où les variables complexes $x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}$ sont liées par les relations

$$y_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \bar{x}_{\alpha\beta}.$$

Étude du cas $\delta = -133$. — On a dans ce cas

$$q = 0, \quad k^2 = 1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = 1.$$

On peut supposer $k = 1$ de sorte que, d'après (11), tous les λ_α sont réels. On peut alors disposer des modules des ρ_α de manière à rendre les λ_α tous égaux, et, comme leur produit est égal à 1, chacun d'eux est égal à 1. On a donc les formules

$$(17) \quad X_{\alpha\beta} = -\bar{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau)\bar{X}_{\varepsilon\rho\sigma\tau}.$$

Tous les groupes réels de caractère $\delta = -133$ sont isomorphes entre eux. Il n'en existe aucun qui soit linéaire et homogène à 56 variables réelles. Mais il en existe un à 112 variables réelles; c'est celui qui laisse invariante les formes (12) et (13) à 56 variables complexes, et en même temps la forme d'Hermite

$$\Sigma(x_{\alpha\beta}\bar{x}_{\alpha\beta} + y_{\alpha\beta}\bar{y}_{\alpha\beta}).$$

IX. — Groupes G du type (E) ($l = 8$).

Ces groupes sont de rang 8 et d'ordre 248. Les transformations peuvent être mises sous la forme (1)

$$X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma}, \quad X'_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 9),$$

où, dans les transformations $X_{\alpha\beta\gamma}, X'_{\alpha\beta\gamma}$, on peut faire subir une permutation quelconque aux indices α, β, γ , à condition de changer le signe si cette permutation est impaire.

Les formules de structure sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha\gamma}) = (X_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma}) = X_{\alpha\gamma}, & (X_{\alpha\beta} X_{\beta\alpha}) = X_{\alpha\alpha} - X_{\beta\beta}, \\ (X_{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{2}{3} X_{\alpha\beta\gamma}, & (X_{\alpha\alpha} X_{\beta\gamma\delta}) = -\frac{1}{3} X_{\beta\gamma\delta}, \\ (X_{\alpha\alpha} X'_{\alpha\beta\gamma}) = -\frac{2}{3} X'_{\alpha\beta\gamma}, & (X_{\alpha\alpha} X'_{\beta\gamma\delta}) = \frac{1}{3} X'_{\beta\gamma\delta}, \\ (X_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma\delta}) = X_{\alpha\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta} X'_{\alpha\gamma\delta}) = -X'_{\beta\gamma\delta}, \\ (X_{\alpha\beta\gamma} X_{\alpha\beta\gamma}) = X_{\alpha\alpha} + X_{\beta\beta} + X_{\gamma\gamma}, & \\ (X_{\alpha\beta\gamma} X'_{\delta\beta\gamma}) = X_{\alpha\delta}, & \\ (X_{\alpha\beta\gamma} X_{\delta\varepsilon\rho}) = -(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau\xi) X'_{\sigma\tau\xi}, & \\ (X'_{\alpha\beta\gamma} X'_{\delta\varepsilon\rho}) = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\rho\sigma\tau\xi) X_{\sigma\tau\xi}. & \end{array} \right.$$

(1) C., p. 92.

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$\omega_\alpha - \omega_\beta, \quad \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma, \quad -\omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma,$$

où les neuf quantités ω_α sont liées par la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_9 = 0.$$

A ces racines appartiennent respectivement les transformations

$$X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma}, \quad X'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Le sous-groupe γ est formé des neuf transformations $X_{\alpha\alpha}$ liées par la relation

$$X_{11} + X_{22} + \dots + X_{99} = 0.$$

Pour la transformation $\Sigma e_{\alpha\alpha} X_{\alpha\alpha}$, où la somme des $e_{\alpha\alpha}$ est supposée nulle, on a

$$\omega_\alpha = e_{\alpha\alpha}.$$

La forme quadratique $\psi(e)$, égale à la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique, est

$$(2) \quad \psi(e) = 2 \Sigma (e_{\alpha\alpha} - e_{\beta\beta})^2 + 2 \Sigma (e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{\gamma\gamma})^2 \\ + 112 \Sigma e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} + 112 \Sigma e_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Si l'on part d'une transformation réelle \mathfrak{F} , les 240 racines de l'équation caractéristique sont réelles ou complexes conjuguées. Si on leur fait correspondre des lettres

$$a_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\beta\gamma}, \quad a'_{\alpha\beta\gamma},$$

le problème se pose de déterminer toutes les substitutions d'ordre 2 du groupe de Galois de ces lettres (1).

Nous conviendrons de dire que deux lettres sont *opposées* si elles correspondent à deux racines égales et de signes contraires, qu'elles sont *alliées* si elles correspondent à deux racines dont la différence est encore une racine. Les couples de lettres alliées sont de la

(1) Sur ce groupe, voir *Amer. J. of Math.*, t. XVIII, p. 50-57.

forme

$$(a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\gamma}), (a_{\alpha\beta}, a_{\gamma\beta}), (a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\gamma\delta}), (a_{\alpha\beta}, a'_{\beta\gamma\delta}), (a_{\alpha\beta\gamma}, a_{\delta\epsilon\rho}), \\ (a_{\alpha\beta\gamma}, a'_{\alpha\beta\epsilon}), (a'_{\alpha\beta\gamma}, a'_{\delta\epsilon\rho}).$$

Montrons d'abord que toute substitution S d'ordre 2 laisse au moins une lettre invariante ou du moins contient un cycle formé de deux lettres opposées.

Supposons d'abord que S contienne un cycle formé de deux lettres alliées; soit $a_{1,2}$ l'une des lettres du cycle; les lettres alliées de $a_{1,2}$ sont au nombre de 56 et admettent un groupe isomorphe de celui étudié dans le Chapitre précédent. On peut donc toujours supposer que la seconde lettre du cycle est $a_{1,3}$:

$$S = (a_{1,2} a_{1,3}) \dots$$

La lettre $a_{2,3}$ qui est alliée de $a_{2,1}$ et $a_{1,3}$ sera alors remplacée par une lettre alliée de $a_{3,1}$ et $a_{1,2}$. Or, $a_{3,2}$ est la seule lettre qui jouisse de cette propriété. Par conséquent S contient le cycle $(a_{2,3} a_{3,2})$ formé de deux lettres opposées.

Si S contient un cycle formé de deux lettres dont l'une est alliée de l'opposée de l'autre, l'analyse précédente montre qu'elle laissera au moins une lettre invariante.

Supposons donc que S ne contienne que des cycles ne jouissant pas des propriétés précédentes. On peut toujours supposer que l'un de ces cycles est $(a_{1,2} a_{3,4})$. La lettre $a_{1,3}$ qui est alliée de $a_{1,2}$ et $a_{4,3}$ sera donc remplacée par une lettre alliée de $a_{3,4}$ et $a_{2,1}$, mais qui ne sera, par hypothèse, alliée ni de $a_{1,3}$ ni de $a_{3,1}$. Or $a_{2,4}$ est la seule lettre qui satisfasse à ces conditions. On a donc

$$S = (a_{1,2} a_{3,4}) (a_{1,3} a_{2,4}) \dots$$

La lettre $a_{1,4}$, qui est alliée de $a_{1,2}$, $a_{3,4}$, $a_{1,3}$, $a_{2,4}$, sera alors remplacée par une lettre alliée de $a_{3,4}$, $a_{1,2}$, $a_{2,4}$, $a_{1,3}$; or $a_{1,4}$ est la seule lettre qui satisfasse à ces conditions. Donc la substitution S laisse au moins la lettre $a_{1,4}$ invariante.

Cela étant, supposons d'abord que la substitution S laisse une lettre invariante, soit $a_{3,0}$. Alors elle échangera entre elles les 56 lettres alliées

de a_{89} , à savoir

$$a_{8\alpha}, \quad a_{\alpha 9}, \quad a_{8\alpha\beta}, \quad a'_{9\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 7).$$

Ces lettres sont soumises à un groupe isomorphe au groupe de Galois qui nous a occupés dans le Chapitre précédent. On retrouve d'ailleurs les notations de ce Chapitre en posant

$$a_{\alpha 9} = A_{\alpha 8}, \quad a_{8\alpha} = B_{\alpha 8}, \quad a_{8\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}, \quad a'_{9\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}.$$

Grâce à ces notations, deux lettres a alliées sont notées par deux lettres A ou B alliées au sens du Chapitre précédent.

Or les substitutions d'ordre 2 portant sur les lettres A et B appartiennent à deux catégories : dans la première les lettres A sont échangées entre elles ainsi que les lettres B; l'échange est réglé par une substitution d'ordre 2 effectuée sur les indices 1, 2, ..., 8 des lettres A et B. Deux cas peuvent se présenter : ou bien les indices ne sont pas tous échangés, et l'on peut supposer que l'indice 8 ne l'est pas; ou bien les indices sont tous échangés et l'on peut supposer que l'indice 8 est échangé avec l'indice 7. On obtient alors les quatre espèces de substitutions suivantes sur les lettres $a_{\alpha 9}$, $a_{8\alpha}$, $a_{8\alpha\beta}$, $a'_{9\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} & (a_{\alpha 9} a_{\bar{\alpha} 9}) (a_{8\alpha} a_{8\bar{\alpha}}) (a_{9\alpha\beta} a_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a'_{9\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 7); \\ & (a_{\alpha 9} a_{8\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 7); \\ & (a_{\alpha 9} a_{78\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha} a'_{79\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha\beta} a_{8\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a'_{9\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6; \bar{\alpha} \neq \alpha); \\ & (a_{\alpha 9} a'_{79\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha} a_{78\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a_{79} a_{87}) & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6; \bar{\alpha} \neq \alpha). \end{aligned}$$

On peut maintenant considérer une substitution contenant les deux lettres opposées a_{89} et a_{98} . Elle sera de l'une des quatre formes suivantes, où l'on n'a marqué que les cycles contenant les lettres $a_{\alpha 8}$, $a_{8\alpha}$, $a_{\alpha 9}$, $a_{9\alpha}$, $a_{8\alpha\beta}$, $a_{9\alpha\beta}$, $a'_{8\alpha\beta}$, $a'_{9\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} & (a_{89} a_{98}) (a_{\alpha 9} a_{9\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha} a_{\bar{\alpha} 8}) (a_{8\alpha\beta} a'_{8\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a_{9\alpha\beta} a_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 7); \\ & (a_{89} a_{98}) (a_{\alpha 9} a_{\bar{\alpha} 8}) (a_{9\alpha} a_{8\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha\beta} a_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a'_{8\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 7); \\ & (a_{89} a_{98}) (a_{79} a_{97}) (a_{78} a_{87}) (a_{8\alpha} a_{79\bar{\alpha}}) (a_{9\alpha} a'_{78\bar{\alpha}}) (a_{\alpha 8} a'_{79\bar{\alpha}}) \\ & \quad \times (a_{\alpha 9} a_{78\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha\beta} a'_{8\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a_{9\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}); \\ & (a_{89} a_{98}) (a_{78} a_{79}) (a_{87} a_{97}) (a_{8\alpha} a'_{78\bar{\alpha}}) (a_{9\alpha} a'_{79\bar{\alpha}}) (a_{\alpha 8} a_{78\bar{\alpha}}) \\ & \quad \times (a_{\alpha 9} a_{79\bar{\alpha}}) (a_{8\alpha\beta} a_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a'_{8\alpha\beta} a'_{9\bar{\alpha}\bar{\beta}}). \end{aligned}$$

Il est facile de compléter ces substitutions et l'on obtient ainsi, sans difficulté, les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= (a_{\alpha\beta} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a_{\alpha\beta\gamma} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}) (a'_{\alpha\beta\gamma} a'_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 9); \\ S_2 &= (a_{\alpha\beta} a_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) (a_{\alpha\beta\gamma} a'_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 9); \\ S_3 &= (a_{\alpha\beta} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) (a_{\alpha\rho} a_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}\bar{\tau}}) (a_{\rho\alpha} a'_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}\bar{\tau}}) (a_{\rho\sigma} a_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}) (a_{\alpha\beta\gamma} a'_{\bar{\delta}\bar{\varepsilon}\bar{\eta}}) \\ &\quad \times (a_{\alpha\beta\rho} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\rho}}) (a'_{\alpha\beta\rho} a'_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\rho}}) (a_{779} a'_{789}); \\ S_4 &= (a_{\alpha\beta} a_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) (a_{\alpha\rho} a'_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}\bar{\tau}}) (a_{\rho\alpha} a_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}\bar{\tau}}) (a_{\rho\sigma} a_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}) (a_{\alpha\beta\gamma} a_{\bar{\delta}\bar{\varepsilon}\bar{\eta}}) (a'_{\alpha\beta\gamma} a'_{\bar{\delta}\bar{\varepsilon}\bar{\eta}}) (a_{\alpha\beta\rho} a'_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\rho}}). \end{aligned}$$

On suppose, dans S_3 et S_4 , que les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ représentent les indices 1, 2, ..., 6; les lettres ρ, σ, τ les indices 7, 8, 9; de plus $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \dots$ désignent les indices échangés de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par une substitution d'ordre 2 portant sur les indices 1, 2, ..., 6 et ne laissant aucun indice invariant; enfin $\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}$ sont les indices échangés de ρ, σ, τ par une substitution d'ordre 2 portant sur les indices 7, 8, 9.

I. Dans le cas de la substitution S_1 , on a les formules

$$(3) \quad \begin{cases} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \\ X'_{\alpha\beta\gamma} = \lambda'_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}'_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}. \end{cases}$$

On trouve facilement

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_9 = (\bar{1} \bar{2} \bar{3} \dots \bar{9}),$$

puis

$$\bar{\lambda}_\alpha \lambda_{\bar{\alpha}} = k \quad (k=1).$$

Supposons que, dans la substitution effectuée sur les indices 1, 2, ..., 9, il y ait q cycles de deux indices et soit $p + 2q = 9$. On trouve facilement

$$(4) \quad \delta_0 = 8 - 2q.$$

Pour calculer δ il faut considérer dans $\psi(e)$ les rectangles $e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}$ pour lesquels $\beta = \bar{\alpha}$; il y a q de ces rectangles, et comme l'on a

$$X_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \bar{X}_{\beta\alpha} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \bar{X}_{\beta\alpha},$$

chacun d'eux donne naissance à deux carrés positifs. On a donc

$$(5) \quad \delta = \delta_0 + 2q = 8.$$

II. Dans le cas de la substitution S_2 , on a les formules

$$(6) \quad \begin{cases} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}'_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \\ X'_{\alpha\beta\gamma} = \lambda'_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}. \end{cases}$$

On trouve facilement

$$(7) \quad \lambda_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_9 = -(\bar{1} \bar{2} \dots \bar{9}),$$

puis

$$(8) \quad \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_{\bar{1}}} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_{\bar{2}}} = \dots = \frac{\bar{\lambda}_9}{\lambda_{\bar{9}}} = k \quad (k^3 = 1).$$

Comme k n'est défini qu'à une racine cubique près de l'unité, on peut le supposer égal à 1, de sorte que les formules (8) deviennent

$$\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_{\bar{\alpha}}.$$

On trouve ici facilement

$$(9) \quad \delta_0 = 2q - 8.$$

Pour calculer δ , il faut considérer dans $\psi(e)$ les rectangles

$$\begin{array}{l} e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} \quad (\bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \beta), \\ e_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma} \quad (\bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \beta, \bar{\gamma} = \gamma \text{ ou } \bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \gamma, \bar{\gamma} = \beta). \end{array}$$

S'il y a q cycles de deux indices dans la substitution effectuée sur les indices 1, 2, ..., 9 et donnant naissance à S_2 , et si l'on pose $p + 2q = 9$, il y aura $\frac{p(p-1)}{2}$ rectangles $e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha}$ et $\frac{p(p-1)(p-2)}{6} + pq$ rectangles $e_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma}$. Si $\bar{\alpha} = \alpha$, λ_α est réel; soit ε_α le nombre égal à ± 1 qui est du même signe que λ_α .

Les rectangles $e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha}$ donnent alors deux carrés du signe de $-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta$.

On a ensuite $\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$ rectangles $e_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}$, dont chacun donne deux carrés du signe de $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma$.

On a enfin pq rectangles $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}$, dont chacun donne deux carrés du signe de $-\varepsilon_\alpha$, à cause de la formule

$$X_{\alpha\beta\gamma} = -\lambda_\alpha\lambda_\beta\bar{\lambda}_\beta\bar{X}'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Par suite, on a pour δ l'expression suivante :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = 2q - 8 - 2\Sigma\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 2\Sigma\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma - 2q\Sigma\varepsilon_\alpha \\ [\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, p; \varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p = (-1)^{q+1}]. \end{array} \right.$$

S'il y a h quantités ε_α positives et k négatives (k de parité contraire à q), on trouve

$$\delta = 1 - (h-k)^2 - \frac{4}{3}hk(h-k) + \frac{(p-1)(p-2)}{3}(h-k) - 2q(h-k).$$

Cette formule donne, en passant en revue tous les cas possibles, les valeurs suivantes de δ :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} q=0, & p=9; & h=8, & k=1; & \delta=8; \\ q=0, & p=9; & h=6, & k=3; & \delta=-24; \\ q=0, & p=9; & h=4, & k=5; & \delta=8; \\ q=0, & p=9; & h=2, & k=7; & \delta=-24; \\ q=0, & p=9; & h=0, & k=9; & \delta=-248; \\ q=1, & p=7; & h=7, & k=0; & \delta=8; \\ q=1, & p=7; & h=5, & k=2; & \delta=-24; \\ q=1, & p=7; & h=3, & k=4; & \delta=8; \\ q=1, & p=7; & h=1, & k=6; & \delta=-24; \\ q=2, & p=5; & h=4, & k=1; & \delta=-24; \\ q=2, & p=5; & h=2, & k=3; & \delta=8; \\ q=2, & p=5; & h=0, & k=5; & \delta=-24; \\ q=3, & p=3; & h=3, & k=0; & \delta=-24; \\ q=3, & p=3; & h=1, & k=2; & \delta=8; \\ q=4, & p=1; & h=0, & k=1; & \delta=8. \end{array} \right.$$

III. Dans le cas de la substitution S_3 on a les formules

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \bar{X}_{\alpha\bar{\beta}}, \\ X_{\alpha\rho} = (\rho\sigma\tau) \lambda_{\alpha\rho} \bar{X}_{\alpha\bar{\sigma}\bar{\tau}}, \\ X_{\rho\alpha} = (\rho\sigma\tau) \lambda_{\rho\alpha} \bar{X}'_{\alpha\bar{\sigma}\bar{\tau}}, \\ X_{\rho\sigma} = \lambda_{\rho\sigma} \bar{X}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta) \lambda_{\alpha\beta\gamma} \bar{X}'_{\delta\bar{\varepsilon}\bar{\eta}}, \\ X_{\alpha\beta\rho} = \lambda_{\alpha\beta\rho} \bar{X}_{\alpha\bar{\beta}\bar{\rho}}, \\ X'_{\alpha\beta\rho} = \lambda'_{\alpha\beta\rho} \bar{X}'_{\alpha\bar{\beta}\bar{\rho}}, \\ X_{\alpha\rho\sigma} = (\rho\sigma\tau) \lambda_{\alpha\rho\sigma} \bar{X}_{\alpha\bar{\rho}\bar{\sigma}}, \\ X'_{\alpha\rho\sigma} = (\rho\sigma\tau) \lambda'_{\alpha\rho\sigma} \bar{X}'_{\alpha\bar{\rho}\bar{\sigma}}, \\ X_{\rho\sigma\tau} = \lambda_{\rho\sigma\tau} \bar{X}'_{\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\tau}}. \end{array} \right.$$

On trouve facilement

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, \quad \lambda_{\alpha\rho} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\rho}, \quad \lambda_{\rho\alpha} = \frac{\lambda_\rho}{\lambda_\alpha}, \quad \lambda_{\rho\sigma} = \frac{\lambda_\rho}{\lambda_\sigma}, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma, \\ \lambda_{\alpha\beta\rho} = -(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\varepsilon}) \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\rho, \quad \lambda_{\alpha\rho\sigma} = +(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\varepsilon}) \lambda_\alpha \lambda_\rho \lambda_\sigma, \quad \lambda_{\rho\sigma\tau} = +(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\varepsilon}) \lambda_\rho \lambda_\sigma \lambda_\tau \\ (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_8 \lambda_9 = 1). \end{array} \right.$$

On a ensuite

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 \lambda_{\bar{1}} = \bar{\lambda}_2 \lambda_{\bar{2}} = \dots = \bar{\lambda}_6 \lambda_{\bar{6}} = k, \quad \bar{\lambda}_7 \lambda_{\bar{7}} = \bar{\lambda}_8 \lambda_{\bar{8}} = \bar{\lambda}_9 \lambda_{\bar{9}} = \frac{1}{k^2}, \\ \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9 = + \frac{1}{k^3}. \end{array} \right.$$

On a enfin

$$\begin{aligned} X_{\alpha\alpha} &= \bar{X}_{\alpha\bar{\alpha}} + \frac{1}{3} (\bar{X}_{77} + \bar{X}_{88} + \bar{X}_{99}), \\ X_{\rho\rho} &= \bar{X}_{\bar{\rho}\bar{\rho}} + \frac{2}{3} (\bar{X}_{77} + \bar{X}_{88} + \bar{X}_{99}). \end{aligned}$$

Si donc l'on pose $e_{\alpha\alpha} = e_\alpha + i\eta_\alpha$, on trouve

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_\alpha = e_{\bar{\alpha}}, \quad e_\rho = e_{\bar{\rho}}, \quad e_7 + e_8 + e_9 = 0, \quad \Sigma e_\alpha = 0, \\ \eta_\alpha + \eta_{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{3} (\eta_7 + \eta_8 + \eta_9), \quad \eta_\rho + \eta_{\bar{\rho}} = \frac{2}{3} (\eta_7 + \eta_8 + \eta_9). \end{array} \right.$$

Soit q' (égal à 0 ou 1) le nombre des cycles d'ordre 2 qui échangent

les indices 7, 8, 9; on trouve facilement

$$\partial_0 = -2q'.$$

Pour calculer δ , supposons qu'on ait

$$\bar{1} = 2, \quad \bar{3} = 4, \quad \bar{5} = 6.$$

Nous avons à considérer les rectangles

$$\begin{aligned} & e_{12}e_{21}, \quad e_{34}e_{43}, \quad e_{56}e_{65}, \\ & e_{\rho\sigma}e_{\sigma\rho} \quad (\bar{\rho} = \sigma), \\ & e_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha = 1, 2; \beta = 3, 4; \gamma = 5, 6), \\ & e_{789}e'_{789}. \end{aligned}$$

Les trois premiers rectangles donnent chacun deux carrés du signe de $+k$, en vertu de la formule

$$X_{12} = + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{X}_{21} = + \frac{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}{k} \bar{X}_{21}.$$

Le rectangle $e_{\rho\sigma}e_{\sigma\rho}$, s'il existe ($q' = 1$), donne deux carrés positifs, en vertu de la formule

$$X_{\rho\sigma} = + \frac{\lambda_\rho}{\lambda_\sigma} \bar{X}_{\sigma\rho} = + k^2 \lambda_\rho \bar{\lambda}_\rho \bar{X}_{\sigma\rho}.$$

Supposons maintenant que dans le rectangle $e_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}$, il y ait k des indices α, β, γ qui soient pairs; on aura

$$X_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^{k+1} k^k \frac{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_5}{m^2} \bar{X}'_{\alpha\beta\gamma};$$

le rectangle $e_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}$ donnera donc deux carrés du signe de

$$(-1)^{k+1} k^k \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5.$$

Enfin le rectangle $e_{789}e'_{789}$ donne deux carrés du signe de $+\lambda_7 \lambda_8 \lambda_9$, c'est-à-dire du signe de k .

Si donc on désigne par ε et ε' deux nombres égaux à ± 1 et respectivement du signe de k et de $\lambda_1 \lambda_3 \lambda_5$, on obtient

$$\delta = -2q' + 6\varepsilon + 2q' - 8\varepsilon' + 8\varepsilon\varepsilon' + 2\varepsilon = 8\varepsilon - 8\varepsilon' + 8\varepsilon\varepsilon'.$$

On a donc les formules suivantes :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = 1; & \delta = 8; \\ \varepsilon' = -1; & \delta = 8; \\ \varepsilon = -1, \quad \varepsilon' = 1; & \delta = -24. \end{array} \right.$$

IV. Dans le cas de la substitution S_4 , on a les formules

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} \overline{X}_{\beta\bar{\alpha}}, \\ X_{\alpha\rho} = (\rho\sigma\tau) \lambda_{\alpha\rho} \overline{X}'_{\bar{\alpha}\sigma\bar{\tau}}, \\ X_{\rho\alpha} = (\rho\sigma\tau) \lambda_{\rho\alpha} \overline{X}_{\bar{\alpha}\sigma\bar{\tau}}, \\ X_{\rho\sigma} = \lambda_{\rho\sigma} \overline{X}_{\sigma\bar{\rho}}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta) \lambda_{\alpha\beta\gamma} \overline{X}_{\delta\varepsilon\bar{\eta}}, \\ X'_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta) \lambda'_{\alpha\beta\gamma} \overline{X}'_{\delta\varepsilon\bar{\eta}}, \\ X_{\alpha\beta\rho} = \lambda_{\alpha\beta\rho} \overline{X}'_{\bar{\alpha}\beta\bar{\rho}}, \\ X'_{\alpha\beta\rho} = \lambda'_{\alpha\beta\rho} \overline{X}_{\bar{\alpha}\beta\bar{\rho}}, \\ X_{\alpha\rho\sigma} = (\rho\sigma\tau) \lambda_{\alpha\rho\sigma} \overline{X}_{\tau\bar{\alpha}}, \\ X'_{\alpha\rho\sigma} = (\rho\sigma\tau) \lambda'_{\alpha\rho\sigma} \overline{X}_{\tau\bar{\alpha}}, \\ X_{\rho\sigma\tau} = \lambda_{\rho\sigma\tau} \overline{X}_{\rho\sigma\bar{\tau}}, \\ X'_{\rho\sigma\tau} = \lambda'_{\rho\sigma\tau} \overline{X}'_{\rho\sigma\bar{\tau}}. \end{array} \right.$$

On trouve facilement

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} &= -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}, & \lambda_{\alpha\rho} &= -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\rho}, & \lambda_{\rho\alpha} &= -\frac{\lambda_\rho}{\lambda_\alpha}, & \lambda_{\rho\sigma} &= - \\ \lambda_{\alpha\beta\gamma} &= \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma, & \lambda'_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma}, \\ \lambda_{\alpha\beta\rho} &= -(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}) \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\rho, & \lambda'_{\alpha\beta\rho} &= -\frac{(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta})}{\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\rho}, \\ \lambda_{\alpha\rho\sigma} &= (\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}) \lambda_\alpha \lambda_\rho \lambda_\sigma, & \lambda'_{\alpha\rho\sigma} &= \frac{(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta})}{\lambda_\alpha \lambda_\rho \lambda_\sigma}, \\ \lambda_{\rho\sigma\tau} &= (\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}) \lambda_\rho \lambda_\sigma \lambda_\tau, & \lambda'_{\rho\sigma\tau} &= \frac{(\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta})}{\lambda_\rho \lambda_\sigma \lambda_\tau}, \\ & & \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_8 \lambda_9 &= -1. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\bar{\lambda}_6}{\lambda_6} = k = \pm 1, \quad \frac{\bar{\lambda}_7}{\lambda_7} = \frac{\bar{\lambda}_8}{\lambda_8} = \frac{\bar{\lambda}_9}{\lambda_9} = \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9 = 1; \quad \lambda_7$$

On trouve alors sans difficulté

$$\delta_0 = 2q'.$$

Pour calculer δ , il faut considérer les rectangles

$$\begin{aligned} e_{\rho\sigma}e_{\sigma\rho} & \quad (\bar{\rho} = \rho, \bar{\sigma} = \sigma), \\ e_{\alpha\beta\rho}e'_{\alpha\beta\rho} & \quad (\bar{\beta} = \alpha, \bar{\rho} = \rho). \end{aligned}$$

Le premier rectangle n'existe que si q' est nul. Alors $\lambda_7, \lambda_8, \lambda_9$ sont des nombres réels; soit λ_ρ du signe de $\varepsilon_\rho = \pm 1$. On a d'ailleurs

$$\varepsilon_7\varepsilon_8\varepsilon_9 = -k.$$

Le rectangle $e_{\rho\sigma}e_{\sigma\rho}$ donne alors deux carrés du signe $-\varepsilon_\rho\varepsilon_\sigma$, c'est-à-dire du signe de $k\varepsilon_\tau$.

Quant à chaque rectangle $e_{\alpha\beta\rho}e'_{\alpha\beta\rho}$, il donne deux carrés du signe de

$$k\varepsilon_\rho(\bar{7}\bar{8}\bar{9}) = k\varepsilon_\rho,$$

si q' est nul, et positifs si $q' = 1$.

On a donc :

$$\begin{aligned} q' = 0 : \quad \delta &= 2k \sum \varepsilon_\rho + 6k \sum \varepsilon_\rho & \begin{cases} \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = \varepsilon_9 = -k; & \delta = -24; \\ \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = k, \varepsilon_9 = -k; & \delta = 8; \end{cases} \\ q' = -1 : \quad \delta &= 2 + 6 = 8. \end{aligned}$$

En résumé, nous avons obtenu pour le caractère δ trois valeurs distinctes,

$$\delta = 8, \quad -24, \quad -248.$$

Le Tableau suivant indique les cas dans lesquels chacune de ces valeurs δ se présente :

$\delta = 8$	{	I.		$\delta_0 = 8;$
		II.	$q = 0, 1; \quad h - k = 7, -1;$	$\delta_0 = -8, -6;$
		II.	$q = 2, 3, 4; \quad h - k = -1;$	$\delta_0 = -4, -2, 0;$
		III.	$\varepsilon = 1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon' = -1;$	$\delta_0 = -2q';$
$\delta = -24$	{	IV.	$q' = 0, \quad \lambda_7\lambda_9 < 0, \quad \lambda_8\lambda_9 < 0;$	$\delta_0 = 0;$
		IV.	$q' = 1;$	$\delta_0 = +2.$
		II.	$q = 0, 1, 2; \quad h - k = 3, -5;$	$\delta_0 = -8, -6, -4;$
		II.	$q = 3; \quad h - k = 3;$	$\delta_0 = -2;$
$\delta = -248$	{	III.	$\varepsilon = -1; \quad \varepsilon' = 1;$	$\delta_0 = -2q';$
		IV.	$q' = 0; \quad \lambda_7\lambda_9 > 0, \quad \lambda_8\lambda_9 > 0;$	$\delta_0 = 0;$
		II.	$q = 0; \quad h - k = -9;$	$\delta_0 = -8.$

Étude du cas $\delta = 8$. — Nous allons montrer qu'on peut toujours choisir le sous-groupe réel γ de manière à avoir $\delta_0 = 8$. Le Tableau suivant indique dans chaque cas quelles sont les transformations réelles qu'il suffit de prendre pour définir γ .

I. On prendra

$$X_{\alpha\alpha}(\bar{\alpha} = \alpha), \quad X_{\alpha\beta} + \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} X_{\beta\alpha} \quad (\bar{\alpha} = \beta), \quad X_{\alpha\alpha} + X_{\beta\beta} \quad (\bar{\alpha} = \beta).$$

II. $q = 0$. On prendra

$$\begin{aligned} & X_{49} - \frac{\lambda_4}{\lambda_9} X_{94}, \quad X_{123} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 X'_{123}, \\ X_{156} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 X'_{156}, \quad X_{178} + \lambda_1 \lambda_7 \lambda_8 X'_{178}, \quad X_{257} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_7 X'_{257}, \\ X_{268} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_8 X'_{268}, \quad X_{358} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_8 X'_{358}, \quad X_{367} + \lambda_3 \lambda_6 \lambda_7 X'_{367}. \end{aligned}$$

II. $q = 1$. On prendra

$$\begin{aligned} & X_{88} - X_{99}, \quad X_{123} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 X'_{123}, \\ X_{145} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 X'_{145}, \quad X_{167} + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_7 X'_{167}, \quad X_{246} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_6 X'_{246}, \\ X_{257} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_7 X'_{257}, \quad X_{347} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_7 X'_{347}, \quad X_{356} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 X'_{356}. \end{aligned}$$

II. $q = 2$. On prendra

$$\begin{aligned} & X_{66} - X_{77}, \quad X_{88} - X_{99}, \quad X_{14} - \frac{\lambda_1}{\lambda_4} X_{41}, \quad X_{23} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} X_{32}, \\ X_{145} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 X'_{145}, \quad X_{235} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 X'_{235}, \quad X_{567} - \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 X'_{567}, \quad X_{589} - \lambda_5 \lambda_8 \lambda_9 X'_{589}. \end{aligned}$$

II. $q = 3$. On prendra

$$\begin{aligned} & X_{44} - X_{55}, \quad X_{66} - X_{77}, \quad X_{88} - X_{99}, \quad X_{13} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} X_{31}, \\ X_{123} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 X'_{123}, \quad X_{245} - \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 X'_{245}, \quad X_{267} - \lambda_2 \lambda_6 \lambda_7 X'_{267}, \quad X_{289} - \lambda_2 \lambda_8 \lambda_9 X'_{289}. \end{aligned}$$

II. $q = 4$. On prendra

$$\begin{aligned} & X_{22} - X_{33}, \quad X_{44} - X_{55}, \quad X_{66} - X_{77}, \quad X_{88} - X_{99}, \\ X_{123} - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 X'_{123}, \quad X_{145} - \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 X'_{145}, \quad X_{167} - \lambda_1 \lambda_6 \lambda_7 X'_{167}, \quad X_{189} - \lambda_1 \lambda_8 \lambda_9 X'_{189}. \end{aligned}$$

III. $\varepsilon = 1$. On prendra

$$\begin{aligned} & X_{11} + X_{22} - X_{55} - X_{66}, \quad X_{33} + X_{44} - X_{55} - X_{66}, \quad 2X_{77} - X_{88} - X_{99}, \\ X_{12} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{21}, \quad X_{34} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X_{43}, \quad X_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} X_{65}, \quad X_{789} + \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9 X'_{789}, \end{aligned}$$

et, en outre,

$$\begin{array}{ll} X_{88} - X_{99} & \text{si } q' = 0, \\ X_{89} + \frac{\lambda_8}{\lambda_9} X_{98} & \text{si } q' = 1 \quad (\bar{8} = 9). \end{array}$$

III. $\varepsilon' = -1$. On prend les mêmes combinaisons des $X_{\alpha\alpha}$ et, en outre,

$$X_{135} - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 X'_{135}, \quad X_{146} - \lambda_1 \lambda_4 \lambda_6 X'_{146}, \quad X_{236} - \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 X'_{236}, \quad X_{245} - \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 X'_{245}.$$

IV. $q' = 0$; $\varepsilon_7 = \varepsilon_8 = +k$; $\varepsilon_9 = -k$. On prendra

$$\begin{array}{l} X_{11} - X_{22}, \quad X_{33} - X_{44}, \quad X_{55} - X_{66}, \quad X_{77} + X_{88} + X_{99}, \quad X_{79} - \frac{\lambda_7}{\lambda_9} X_{97}, \\ X_{128} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_8 X'_{128}, \quad X_{348} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_8 X'_{348}, \quad X_{568} + \lambda_5 \lambda_6 \lambda_8 X'_{568}. \end{array}$$

IV. $q' = 1$. On prendra

$$\begin{array}{l} X_{11} - X_{22}, \quad X_{33} - X_{44}, \quad X_{55} - X_{66}, \quad X_{88} - X_{99}, \quad X_{77} + X_{88} + X_{99}, \\ X_{127} - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 X'_{127}, \quad X_{347} - \lambda_3 \lambda_4 \lambda_7 X'_{347}, \quad X_{567} - \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 X'_{567}. \end{array}$$

On est donc ainsi ramené au cas $\delta_0 = 8$. Dans ce cas on démontre sans difficulté qu'on peut disposer des coefficients ρ_α de manière à obtenir

$$\begin{array}{l} X_{\alpha\beta} = \bar{X}_{\alpha\beta}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = \bar{X}_{\alpha\beta\gamma}, \\ X'_{\alpha\beta\gamma} = \bar{X}'_{\alpha\beta\gamma}. \end{array}$$

Autrement dit, tous les groupes réels du caractère $\delta = 0$ sont isomorphes. Leur structure s'obtient en supposant dans les formules (1) les transformations X réelles.

Étude du cas $\delta = -24$. — Nous allons montrer qu'on peut toujours choisir le sous-groupe réel γ de manière à avoir $\delta_0 = -8$. Le Tableau suivant indique, dans chaque cas, quelles sont les transformations réelles qu'on peut choisir pour définir γ .

II. $q = 1$. On prendra

$$\begin{array}{l} i(X_{22} - X_{33}), \quad i(X_{22} - X_{44}), \quad i(X_{22} - X_{55}), \quad i(X_{22} - X_{66}), \quad i(X_{22} - X_{77}), \\ i(X_{88} + X_{99} - 2X_{11}), \quad X_{189} - \lambda_1 \lambda_8 \lambda_9 X'_{189}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_9}{\lambda_8}} X_{89} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_9}{\lambda_8}}} X_{98}. \end{array}$$

II. $q = 2$. On prendra

$$\begin{aligned}
 & i(\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} + \mathbf{X}_{33} + \mathbf{X}_{44} - 2\mathbf{X}_{55} - \mathbf{X}_{66} - \mathbf{X}_{77}), \quad i(\mathbf{X}_{66} + \mathbf{X}_{77} - \mathbf{X}_{88} - \mathbf{X}_{99}), \\
 & \mathbf{X}_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathbf{X}_{21}, \quad \mathbf{X}_{34} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \mathbf{X}_{43}, \quad \mathbf{X}_{125} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mathbf{X}'_{125}, \quad \mathbf{X}_{345} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathbf{X}'_{345}, \\
 & \sqrt{-\frac{\lambda_7}{\lambda_6}} \mathbf{X}_{67} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_7}{\lambda_6}}} \mathbf{X}_{76}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_9}{\lambda_8}} \mathbf{X}_{89} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_9}{\lambda_8}}} \mathbf{X}_{98}.
 \end{aligned}$$

II. $q = 3$. On prendra

$$\begin{aligned}
 & i(-2\mathbf{X}_{11} - 2\mathbf{X}_{22} - 2\mathbf{X}_{33} + \mathbf{X}_{44} + \mathbf{X}_{55} + \mathbf{X}_{66} + \mathbf{X}_{77} + \mathbf{X}_{88} + \mathbf{X}_{99}), \\
 & \mathbf{X}_{12} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathbf{X}_{21}, \quad \mathbf{X}_{345} - \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathbf{X}'_{345}, \quad \mathbf{X}_{367} - \lambda_3 \lambda_6 \lambda_7 \mathbf{X}'_{367}, \quad \mathbf{X}_{389} - \lambda_3 \lambda_8 \lambda_9 \mathbf{X}'_{389}, \\
 & \sqrt{-\frac{\lambda_5}{\lambda_4}} \mathbf{X}_{45} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_5}{\lambda_4}}} \mathbf{X}_{54}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_7}{\lambda_6}} \mathbf{X}_{67} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_7}{\lambda_6}}} \mathbf{X}_{76}, \\
 & \sqrt{-\frac{\lambda_9}{\lambda_8}} \mathbf{X}_{89} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_9}{\lambda_8}}} \mathbf{X}_{98}.
 \end{aligned}$$

III. $\varepsilon = -1, \varepsilon' = 1$. On prendra

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{X}_{12} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathbf{X}_{21}, \quad \mathbf{X}_{34} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \mathbf{X}_{43}, \quad \mathbf{X}_{56} + \frac{\lambda_5}{\lambda_6} \mathbf{X}_{65}, \\
 & \mathbf{X}_{127} - \lambda_{127} \mathbf{X}'_{127}, \quad \mathbf{X}_{347} - \lambda_{347} \mathbf{X}'_{347}, \quad \mathbf{X}_{567} - \lambda_{567} \mathbf{X}'_{567}, \quad \mathbf{X}_{789} + \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9 \mathbf{X}'_{789}
 \end{aligned}$$

et, en outre,

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{\lambda_9}{\lambda_8}} \mathbf{X}_{89} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_9}{\lambda_8}}} \mathbf{X}_{98}, \quad \text{si } q' = 0; \\
 & i(\mathbf{X}_{88} - \mathbf{X}_{99}), \quad \text{si } q' = 1.
 \end{aligned}$$

IV. $q' = 0; \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = -k$. On prendra

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \mathbf{X}_{12} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \mathbf{X}_{21}, \quad \sqrt{-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \mathbf{X}_{34} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}}} \mathbf{X}_{43}, \\
 & \sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}} \mathbf{X}_{56} - \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda_6}{\lambda_5}}} \mathbf{X}_{65}, \quad \mathbf{X}_{89} - \frac{\lambda_8}{\lambda_9} \mathbf{X}_{98}, \quad \mathbf{X}_{127} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_7 \mathbf{X}'_{127}, \\
 & \mathbf{X}_{347} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_7 \mathbf{X}'_{347}, \quad \mathbf{X}_{567} + \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \mathbf{X}'_{567}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_7 \lambda_8 \lambda_9}} \mathbf{X}_{789} - \sqrt{\lambda_7 \lambda_8 \lambda_9} \mathbf{X}'_{789}.
 \end{aligned}$$

En résumé, on peut toujours se ramener aux cas $\delta_0 = -8$. Ces cas sont au nombre de deux :

1° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 > 0, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9 < 0$. On peut disposer des coefficients ρ_α de manière à réduire les λ_x aux valeurs ± 1 . On aura donc

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\beta} = -\bar{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\rho} = +\bar{X}_{\rho\alpha}, \quad X_{\rho\sigma} = -\bar{X}_{\sigma\rho}, \\ X_{\alpha\beta\gamma} = \bar{X}'_{\alpha\beta\gamma}, \quad X_{\alpha\beta\rho} = -\bar{X}'_{\alpha\beta\rho}, \quad X_{\alpha\rho\sigma} = \bar{X}'_{\alpha\rho\sigma}, \quad X_{789} = -\bar{X}'_{789} \\ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \rho, \sigma = 7, 8, 9). \end{array} \right.$$

2° $\lambda_1, \lambda_2 > 0; \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9 < 0$. On arrive aux formules

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{12} = -\bar{X}_{21}, \quad X_{1\alpha} = \bar{X}_{\alpha 1}, \quad X_{2\alpha} = \bar{X}_{\alpha 2}, \quad X_{\alpha\beta} = -\bar{X}_{\beta\alpha}, \\ X_{12\alpha} = -\bar{X}'_{12\alpha}, \quad X_{1\alpha\beta} = \bar{X}'_{1\alpha\beta}, \quad X_{2\alpha\beta} = \bar{X}'_{2\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = -\bar{X}'_{\alpha\beta\gamma} \\ (\alpha, \beta, \gamma = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). \end{array} \right.$$

Ces deux cas se ramènent d'ailleurs l'un à l'autre. Il y a en effet dans les deux cas le même nombre de coefficients λ égaux à $+1$, à savoir :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & \lambda_{\alpha\rho}, \lambda_{\alpha\beta\gamma}, \lambda_{\alpha\rho\sigma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 6; \rho, \sigma = 7, 8, 9); \\ 2^\circ & \lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\alpha}, \lambda_{1\alpha\beta}, \lambda_{2\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 3, 4, \dots, 9). \end{array}$$

A chaque λ égal à 1 correspond un couple de deux racines opposées de l'équation caractéristique. On obtient les 56 couples du premier cas en prenant toutes les racines alliées à $\pm(\omega_7 + \omega_8 + \omega_9)$. On obtient les 56 couples du second cas en prenant toutes les racines alliées à $\pm(\omega_1 - \omega_2)$. Il est facile de reconnaître qu'une substitution échangeant les deux racines $\omega_1 - \omega_2, \omega_8 + \omega_9 + \omega_9$ ramènerait les deux cas l'un à l'autre.

Tous les groupes réels de caractère $\delta = -24$ sont donc isomorphes; leur structure peut être définie par les formules (19).

Étude du cas $\delta = -248$. — On démontre facilement que tous les groupes réels du caractère $\delta = -248$ sont isomorphes et que leur structure peut être définie par les formules

$$(20) \quad X_{\alpha\beta} = -\bar{X}_{\beta\alpha}, \quad X_{\alpha\beta\gamma} = -\bar{X}'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Il existe, pour chaque valeur de δ , des groupes linéaires et homogènes à 248 variables; ce sont les groupes adjoints.

X. — Groupes G du type (F).

Ces groupes sont de rang 4 et d'ordre 52. Les transformations peuvent se mettre sous la forme (1)

$$Y_i, X_i, X_{ik} = -X_{ki}, X_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$(i, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4; \alpha = \pm 1, \beta = \pm 2, \gamma = \pm 3, \delta = \pm 4).$$

La structure est donnée par les formules

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} (Y_i X_i) = -X_i, & (Y_i X_{i'}) = X_{i'}, \quad (Y_i X_{ik}) = -X_{ik}, \quad (Y_i X_{i'k}) = X_{i'k}, \\ (Y_i X_{ijkl}) = -\frac{1}{2} X_{ijkl}, & (Y_i X_{i'jkh}) = \frac{1}{2} X_{i'jkh}, \\ (X_i X_{i'}) = 2 Y_i, & (X_{ik} X_{i'k'}) = Y_i + Y_{k'}, \quad (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = Y_\alpha + Y_\beta + Y_\gamma + Y_\delta, \\ (X_i X_k) = 2 X_{ik}, & (X_i X_{i'k}) = -X_k, \quad (X_{ij} X_{k'j'}) = X_{ik}, \\ (X_\alpha X_{\alpha'\beta'\gamma\delta}) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_\alpha, \\ (X_\beta X_{\alpha\beta'\gamma\delta}) = \varepsilon_\beta \varepsilon_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -\varepsilon_\beta \varepsilon_\delta X_\beta, \\ (X_\gamma X_{\alpha\beta\gamma'\delta}) = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma X_\gamma, \\ (X_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta'}) = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -\varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_\delta; \\ (X_{\alpha\beta} X_{\alpha'\beta'\gamma\delta}) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma X_{\alpha\beta}, \\ (X_{\alpha\gamma} X_{\alpha'\beta'\gamma\delta}) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\delta X_{\alpha\gamma}, \\ (X_{\alpha\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma\delta}) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta X_{\alpha\delta}, \\ (X_{\gamma\beta} X_{\alpha\beta'\gamma\delta}) = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -2 \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_{\gamma\beta}, \\ (X_{\beta\delta} X_{\alpha\beta'\gamma\delta'}) = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -2 \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma X_{\beta\delta}, \\ (X_{\delta\gamma} X_{\alpha\beta\gamma\delta'}) = \varepsilon_\beta \varepsilon_\delta X_{\alpha\beta\gamma\delta}, & (X_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = -2 \varepsilon_\beta \varepsilon_\delta X_{\delta\gamma}, \end{array} \right.$$

où l'on désigne par ε_α le nombre ± 1 suivant que α est positif ou négatif.

Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme

$$(2) \quad \pm \omega_i, \quad \pm \omega_i \pm \omega_k, \quad \frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2}.$$

(1) G., p. 92.

La transformation X_i appartient à la racine ω_i , la transformation X_{ik} à la racine $\omega_i + \omega_k$, la transformation $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ à la racine $\frac{\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta}{2}$. Enfin le sous-groupe γ est formé des transformations Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

Si la transformation générale du groupe est

$$\sum g_i Y_i + e_i X_i + e_{ij} X_{ij} + e_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

la forme quadratique $\psi(e)$ est de la forme

$$(3) \quad \psi(e) = m^2 \sum g_i^2 - n^2 \sum e_i e_{i'} - n^2 \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} - p^2 \sum e_{ij} e_{i'j'},$$

où m^2, n^2, p^2 sont des coefficients numériques positifs.

Au système des racines de l'équation caractéristique sont associés trois systèmes invariants de 8 quantités ⁽¹⁾, à savoir :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \pm \omega_i, \\ (b) \quad & \frac{\varepsilon_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \omega_2 + \varepsilon_3 \omega_3 + \varepsilon_4 \omega_4}{2} \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1), \\ (c) \quad & \frac{\varepsilon_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \omega_2 + \varepsilon_3 \omega_3 + \varepsilon_4 \omega_4}{2} \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1). \end{aligned}$$

Si l'on est parti d'une transformation réelle \mathfrak{Y} , l'un des trois systèmes est formé de quantités réelles ou deux à deux imaginaires conjuguées. On peut toujours supposer qu'il en est ainsi pour le système (a).

Soit alors $\omega_{\bar{i}}$ la quantité complexe conjuguée de ω_i . On aura en particulier des formules

$$X_i = \lambda_i \bar{X}_{\bar{i}}, \quad X_{ij} = \lambda_{ij} \bar{X}_{\bar{i}\bar{j}},$$

et l'on démontre facilement que λ_{ij} est égal à $\lambda_i \lambda_j$. On a de plus

$$(4) \quad \bar{\lambda}_i \lambda_{\bar{i}} = 1, \quad \lambda_i \lambda_{i'} = 1$$

et enfin

$$Y_i = \bar{Y}_{\bar{i}}.$$

Passons alors en revue les différents cas qui peuvent se présenter.

⁽¹⁾ C., p. 93.

I. On a $\bar{i} = i$. Dans ce cas, on a

$$(5) \quad \delta_0 = 4, \quad \delta = 4.$$

I'. On a, sur les 8 indices $\pm 1, \dots, \pm 4$, la substitution

$$\Sigma = (1, 2).$$

Dans ce cas on a

$$\delta_0 = 2.$$

Quant à δ , il faut considérer le rectangle $e_{12}e_{21}$, qui donne deux carrés positifs en vertu de la formule

$$X_{12'} = \lambda_1 \lambda_2 \bar{X}_{21'} = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \bar{X}_{21'}.$$

On a donc

$$(6) \quad \delta_0 = 2, \quad \delta = 4.$$

I''. On a la substitution $\Sigma = (1, 2)(3, 4)$. On trouve facilement

$$(7) \quad \delta_0 = 0, \quad \delta = 4.$$

II. On a la substitution

$$\Sigma = (1, -1).$$

Dans ce cas λ_1 est réel, soit $\eta_1 = \pm 1$ un nombre du signe de λ_1 . On a d'abord

$$\delta_0 = 2.$$

Pour calculer δ , il faut considérer le rectangle $-e_1 e_{1'}$, qui donne deux carrés du signe de $-\eta_1$. On a donc

$$(8) \quad \begin{cases} \eta_1 = 1: & \delta_0 = 2, & \delta = 0; \\ \eta_1 = -1: & \delta_0 = 2, & \delta = 4. \end{cases}$$

II'. On a la substitution

$$\Sigma = (1, -1)(2, 3).$$

On a d'abord

$$\delta_0 = 0.$$

Pour calculer δ , il faut considérer les rectangles $-e_1 e_1$ et $e_{23} e_{32}$, qui

donnent, le premier deux carrés du signe de $-\lambda_1$, le second deux carrés positifs. On a donc

$$(9) \quad \begin{cases} \eta_1 = 1: & \delta_0 = 0, & \delta = 0; \\ \eta_1 = -1: & \delta_0 = 0, & \delta = 4. \end{cases}$$

III. On a la substitution

$$\Sigma = (1, -1)(2, -2).$$

On trouve tout de suite

$$\delta_0 = 0.$$

Pour calculer δ , il faut considérer les rectangles $-e_1 e_{1'}$, $-e_2 e_{2'}$, $-e_{12} e_{1'2'}$, $e_{12'} e_{21'}$. Soient η_1 et η_2 deux nombres respectivement de même signe que λ_1 et λ_2 et égaux à ± 1 . On trouve sans difficulté

$$\delta = -2\eta_1 - 2\eta_2 - 4\eta_1\eta_2;$$

par suite

$$(10) \quad \begin{cases} \eta_1 = \eta_2 = +1: & \delta_0 = 0, & \delta = -8; \\ \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = -1: & \delta_0 = 0, & \delta = 4; \\ \eta_1 = \eta_2 = -1: & \delta_0 = 0, & \delta = 0. \end{cases}$$

III'. On a la substitution

$$\Sigma = (1, -1)(2, -2)(3, 4).$$

On arrive à des conclusions analogues

$$(11) \quad \begin{cases} \eta_1 = \eta_2 = 1: & \delta_0 = -2, & \delta = -8; \\ \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = -1: & \delta_0 = -2, & \delta = 4; \\ \eta_1 = \eta_2 = -1: & \delta_0 = -2, & \delta = 0. \end{cases}$$

IV. On a la substitution

$$\Sigma = (1, -1)(2, -2)(3, -3).$$

On trouve tout de suite

$$\delta_0 = -2.$$

La considération des rectangles $-e_i e_{i'}$, $-e_{ij} e_{i'j'}$ ($ij = \pm 1, \pm 2, \pm 3$)

donne

$$\delta = \delta_0 - 2\eta_1 - 2\eta_2 - 2\eta_3 - 4\eta_2\eta_3 - 4\eta_3\eta_1 - 4\eta_1\eta_2.$$

Par suite, on a les valeurs suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1: & \delta_0 = -2, & \delta = -20; \\ \eta_1 = \eta_2 = 1, \quad \eta_3 = -1: & \delta_0 = -2, & \delta = 0; \\ \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta_3 = -1: & \delta_0 = -2, & \delta = 4; \\ \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1: & \delta_0 = -2, & \delta = -8. \end{array} \right.$$

V. On a la substitution

$$\Sigma = (1, -1)(2, -2)(3, -3)(4, -4).$$

Ici la considération des transformations $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ montre que le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ est positif. On a

$$\delta_0 = -4.$$

Pour avoir δ , il faut considérer, outre les rectangles $-e_i e_{i'}$, $-e_{ij} e_{i'j'}$, les rectangles $-e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$. Or ici on peut poser

$$\lambda_\alpha = \mu_\alpha^2, \quad \mu_\alpha \mu_{\alpha'} = 1$$

et

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mu_\alpha \mu_\beta \mu_\gamma \mu_\delta$$

avec

$$\mu_i \mu_{i'} = \eta_i \quad (\eta_i = \pm 1),$$

les η_i étant liés par la relation

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 = 1.$$

Il résulte de là que μ_i est réel ou purement imaginaire suivant que η_i est égal à $+1$ ou à -1 . La quantité η_i définit donc le signe de λ_i^2 . Le produit $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$ est réel; soit $\eta = \pm 1$ le nombre qui indique son signe. On trouve facilement le signe des deux carrés fournis par le rectangle $-e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$, et l'on a

$$\begin{aligned} \delta = \delta_0 - 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) - 4(\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_4) \\ - 2\eta(1 + \eta_2\eta_3 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_4 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$(13) \left\{ \begin{array}{ll} \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1 : & \delta_0 = -4, \quad \delta = \begin{cases} -52 & (\eta = 1), \\ -20 & (\eta = -1); \end{cases} \\ \eta_1 = \eta_2 = 1, \quad \eta_3 = \eta_4 = -1 : & \delta_0 = -4, \quad \delta = 4; \\ \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1 : & \delta_0 = -4, \quad \delta = -20. \end{array} \right.$$

En résumé, on obtient pour δ les cinq valeurs

$$\delta = 4, 0, -8, -20, -52.$$

Le Tableau suivant indique dans quels cas ces différentes valeurs se présentent

$\delta = 4$	{	I.	$\delta_0 = 4;$
		I'.	$\delta_0 = 2;$
		I''.	$\delta_0 = 0;$
		II. $\lambda_1 < 0;$	$\delta_0 = 2;$
		II'. $\lambda_1 < 0;$	$\delta_0 = 0;$
$\delta = 0$	{	III. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0;$	$\delta_0 = 0;$
		III'. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0;$	$\delta_0 = -2;$
		IV. $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0;$	$\delta_0 = -2;$
		V. $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0;$	$\delta_0 = -4.$
		II. $\lambda_1 > 0;$	$\delta_0 = 2;$
$\delta = -8$	{	II'. $\lambda_1 > 0;$	$\delta_0 = 0;$
		III. $\lambda_1, \lambda_2 < 0;$	$\delta_0 = 0;$
		III'. $\lambda_1, \lambda_2 < 0;$	$\delta_0 = -2;$
		IV. $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0;$	$\delta_0 = -2.$
$\delta = -20$	{	III. $\lambda_1, \lambda_2 > 0;$	$\delta_0 = 0;$
		III'. $\lambda_1, \lambda_2 > 0;$	$\delta_0 = -2;$
		IV. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0;$	$\delta_0 = -2.$
$\delta = -52$	{	IV. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0;$	$\delta_0 = -2;$
		V. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0, \quad \eta = -1;$	$\delta_0 = -4;$
	}	V. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0;$	$\delta_0 = -4.$
$\delta = -52$: V.	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0, \quad \eta = 1;$	$\delta_0 = -4.$

Étude du cas $\delta = 4$. — Nous allons montrer qu'on peut toujours choisir le sous-groupe réel γ de manière à avoir $\delta_0 = 4$.

Le Tableau suivant indique, dans chaque cas, quelles transformations il suffit de prendre.

- I'. $Y_1 + Y_2, Y_3, Y_4, X_{12'} - \lambda_1 \lambda_2' X_{21'}$;
- I''. $Y_1 + Y_2, Y_3 + Y_4, X_{12'} - \lambda_1 \lambda_2' X_{21'}, X_{34'} - \lambda_3 \lambda_4' X_{43'}$;
- II. ($\lambda_1 < 0$): $Y_2, Y_3, Y_4, X_1 + \lambda_1 X_{1'}$;
- II'. ($\lambda_1 < 0$): $Y_2 + Y_3, Y_4, X_1 + \lambda_1 X_{1'}, X_{23'} - \lambda_2 \lambda_3' X_{32'}$;
- III. ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$): $Y_3, Y_4, X_{12} + \lambda_1 \lambda_2 X_{1'2'}, X_{12'} + \lambda_1 \lambda_2' X_{1'2}$;
- III'. ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$) $\left\{ \begin{array}{l} Y_3 + Y_4, X_{12} + \lambda_1 \lambda_2 X_{1'2'}, X_{12'} + \lambda_1 \lambda_2' X_{1'2}, \\ X_{34'} - \lambda_3 \lambda_4' X_{43'}; \end{array} \right.$
- IV. ($\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0$): $Y_4, X_3 + \lambda_3 X_{3'}, X_{12} + \lambda_1 \lambda_2 X_{1'2'}, X_{12'} + \lambda_1 \lambda_2' X_{1'2}$;
- V. ($\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0$): $\left\{ \begin{array}{l} X_{13} + \lambda_1 \lambda_3 X_{1'3'}, X_{13'} + \lambda_1 \lambda_3' X_{1'3}, \\ X_{24} + \lambda_2 \lambda_4 X_{2'4'}, X_{24'} + \lambda_2 \lambda_4' X_{2'4}. \end{array} \right.$

On peut donc toujours se ramener au cas I. On montre facilement alors que tous les X peuvent être supposés réels (1).

Étude du cas $\delta = 0$. — Nous allons montrer qu'on peut toujours choisir le sous-groupe réel γ de manière à avoir $\delta_0 = 2$. Le Tableau suivant indique, dans chaque cas, quelles transformations il suffit de prendre.

- II'. ($\lambda_1 > 0$): $Y_4, X_1 + \lambda_1 X_{1'}, X_{23'} - \lambda_2 \lambda_3' X_{32'}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} X_{23} - \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} X_{2'3'}$;
- III. ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$): $iY_2, Y_3, Y_4, X_1 + \lambda_1 X_{1'}$;
- III'. ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$): $Y_3 + Y_4, i(Y_3 - Y_4), X_1 + \lambda_1 X_{1'}, X_2 + \lambda_2 X_{2'}$;
- IV. ($\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$): $iY_1, Y_4, X_{23} + \lambda_2 \lambda_3 X_{2'3'}, X_{23'} - \lambda_2 \lambda_3' X_{2'3}$.

On n'a donc qu'à étudier le cas où $\delta_0 = 2$, c'est-à-dire le cas II. Nous avons dans ce cas

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{X}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

Pour calculer $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$, posons

$$\lambda_i = \mu_i^2 \quad (i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4),$$

(1) Voir un représentant dans C., p. 145.

où μ_i et $\mu_{i'}$ sont supposés choisis de manière à avoir

$$\mu_i \mu_{i'} = 1.$$

De la formule

$$(X_\alpha X_{\alpha' \beta \gamma \delta}) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_{\alpha \beta \gamma \delta}$$

on tire

$$\mu_\alpha^2 \lambda_{\alpha' \beta \gamma \delta} = -\lambda_{\alpha \beta \gamma \delta};$$

on a de même

$$\mu_\beta^2 \lambda_{\alpha \beta' \gamma \delta} = \lambda_{\alpha \beta \gamma \delta};$$

$$\mu_\gamma^2 \lambda_{\alpha \beta \gamma' \delta} = \lambda_{\alpha \beta \gamma \delta};$$

$$\mu_\delta^2 \lambda_{\alpha \beta \gamma \delta'} = \lambda_{\alpha \beta \gamma \delta}.$$

Ces formules permettent d'écrire

$$\lambda_{\alpha \beta \gamma \delta} = \varepsilon_\alpha k \mu_\alpha \mu_\beta \mu_\gamma \mu_\delta.$$

On tire enfin de la relation

$$(X_{\alpha \beta \gamma \delta} X_{\alpha \beta' \gamma' \delta'}) = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta X_\alpha$$

la condition

$$k^2 = -1,$$

et, comme μ_i , par exemple, n'est défini qu'au signe près, on peut supposer $k = i$.

On a enfin

$$\lambda_{\alpha \beta \gamma \delta} \bar{\lambda}_{\alpha' \beta' \gamma' \delta} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\mu_\alpha \bar{\mu}_{\alpha'} \mu_\beta \bar{\mu}_{\beta'} \mu_\gamma \bar{\mu}_{\gamma'} \mu_\delta \bar{\mu}_{\delta'} = -1,$$

ce qui exige

$$\mu_\alpha \bar{\mu}_{\alpha'} = -1,$$

d'où

$$\mu_\alpha = -\bar{\mu}_{\alpha'},$$

contrairement à l'hypothèse d'après laquelle μ_α^2 serait positif.

Il n'y a donc pas de groupe réel de caractère $\delta = 0$.

Étude du cas $\delta = -8$. — Nous allons ici nous ramener au cas $\delta_0 = 0$. Le Tableau suivant indique, dans chaque cas, quelles transformations réelles il suffit de prendre pour définir le sous-groupe γ :

$$\text{III. } (\lambda_1, \lambda_2 > 0): \quad iY_1, \quad iY_2, \quad X_{34'} + \lambda_3 \lambda_4' X_{3'4}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_3 \lambda_4}} X_{34} - \sqrt{\lambda_3 \lambda_4} X_{3'4'};$$

$$\text{IV. } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0): \quad iY_2, \quad iY_3, \quad Y_4, \quad X_1 + \lambda_1 X_{1'}.$$

On est donc ramené au cas $\delta_0 = 0$, c'est-à-dire au cas III ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$).

On a dans ce cas

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma k \mu_\alpha \mu_\beta \mu_\gamma \mu_\delta \quad (k^2 = 1).$$

On peut donc supposer

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \mu_\alpha \mu_\beta \mu_\gamma \mu_\delta,$$

et l'on trouve encore

$$\mu_\alpha \bar{\mu}_{\alpha'} \mu_\beta \bar{\mu}_{\beta'} \mu_\gamma \bar{\mu}_{\gamma'} \mu_\delta \bar{\mu}_{\delta'} = -1,$$

ce qui exige que λ_1 et λ_2 soient de signes contraires.

Il n'y a donc aucun groupe réel de caractère $\delta = -8$.

Étude du cas $\delta = -20$. — Les choix suivants du sous-groupe γ ramènent au cas $\delta_0 = -2$.

V. ($\eta = -1$) : $i(Y_1 - Y_4), i(Y_2 - Y_4), i(Y_3 - Y_4), X_{1234} + \lambda_{1234} X_{1'2'3'4'}$;

V. ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$) : $iY_4, X_1 + \lambda_1 X_{1'}, X_2 + \lambda_2 X_{2'}, X_3 + \lambda_3 X_{3'}$.

Dans le cas IV où $\delta_0 = -2$, on trouve sans difficulté la formule

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = i \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\delta \mu_\alpha \mu_\beta \mu_\gamma \mu_\delta$$

avec

$$\mu_\alpha \bar{\mu}_{\alpha'} \mu_\beta \bar{\mu}_{\beta'} \mu_\gamma \bar{\mu}_{\gamma'} = 1.$$

Dans le cas qui nous occupe, on a

$$\mu_\alpha \bar{\mu}_{\alpha'} = \mu_\beta \bar{\mu}_{\beta'} = \mu_\gamma \bar{\mu}_{\gamma'} = 1.$$

On peut disposer des ρ_α de manière à obtenir les valeurs suivantes :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad \mu_4 = -i, \\ \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta.$$

Il n'y a donc qu'un groupe réel de caractère $\delta = -20$. Mais on peut obtenir sa structure sous une autre forme en supposant qu'on est dans le cas V avec tous les $\lambda_i > 0$, $\eta = -1$. *On trouve alors sans difficulté*

$$(14) \quad X_i = \bar{X}_{i'}, \quad X_{IJ} = \bar{X}_{I'J'}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\bar{X}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

Il y a un groupe linéaire et homogène à 26 variables réelles; c'est le

groupe normal (1), mais où les 26 variables sont complexes et liées par les relations

$$x_\alpha = \bar{x}_{\alpha'}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad x_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\bar{x}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'};$$

ce groupe laisse en particulier invariante une forme quadratique à 10 carrés positifs et 16 carrés négatifs.

Étude du cas $\delta = -52$. — Il n'y a qu'un groupe réel dont la structure est donnée par les formules

$$(15) \quad X_i = \bar{X}_{i'}, \quad X_{ij} = \bar{X}_{i'j'}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{X}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

On a un représentant de ce type en liant les 26 variables complexes du groupe normal par les relations

$$x_i = \bar{x}_{i'}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad x_{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{x}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

Il laisse en particulier invariante une forme quadratique à 26 carrés positifs.

En résumé, il y a trois types de groupes simples réels correspondant au type complexe (F); ils correspondent aux trois valeurs distinctes du caractère

$$\delta = 4, -20, -52.$$

XI. — Quelques équivalences remarquables.

Il existe entre les groupes simples complexes des équations bien connues; ce sont les suivantes :

Le groupe du type (A) ($l = 1$) est isomorphe au groupe du type (B) ($l = 1$).

Le groupe semi-simple du type (D) ($l = 2$) est isomorphe au groupe semi-simple formé de deux sous-groupes simples du type (A) ($l = 1$).

Le groupe du type (B) ($l = 2$) est isomorphe au groupe du type (C) ($l = 2$).

(1) C., p. 145.

Le groupe du type (D) ($l=3$) est isomorphe au groupe du type (A) ($l=3$).

1. Les groupes réels du type (A) ($l=1$) sont de caractère $\delta = 1$ ou $\delta = -3$. Il en est de même des groupes réels du type (B).

1° $\delta = 1$. Il y a d'après cela isomorphisme entre :

Le groupe linéaire et homogène spécial à deux variables réelles ;

Le groupe linéaire à deux variables complexes x_1, x_2 , de la forme d'Hermité $x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2$;

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

2° $\delta = -3$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme d'Hermité $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$;

Le groupe $X' = AX$ à une variable et un paramètre quaternioniens ;

Le groupe linéaire de la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

II. Les groupes semi-simples réels qui proviennent d'un groupe complexe formé de sous-groupes simples de rang 1 du type (A) sont de caractère $\delta = 2, 0, -2, -6$. Il en est de même pour les groupes du type (D).

1° $\delta = 2$. Il y a d'après cela isomorphisme entre :

Le groupe linéaire formé du groupe linéaire spécial à deux variables x_1, x_2 et du groupe linéaire spécial à deux variables réelles x_3, x_4 ;

Le groupe linéaire de la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$.

2° $\delta = 0$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire spécial à deux variables complexes x_1, x_2 ;

Le groupe linéaire de la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

3° $\delta = -2$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire formé du groupe linéaire spécial à deux variables réelles x_1, x_2 et du groupe linéaire de la forme d'Hermité $x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$;

Le groupe linéaire de la forme quadratique $x_1x_2 + x_3x_4$ et de la forme d'Hermité $x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 - x_4\bar{x}_4$ à quatre variables complexes.

4° $\delta = -6$. Il y a isomorphisme entre :

*Le groupe linéaire formé du groupe linéaire de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$ et du groupe linéaire de la forme d'Hermite $x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$;
Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.*

III. Les groupes du type (B) ou (C) ($l = 2$) peuvent avoir les caractères 2, -2, -10.

1° $\delta = 2$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2;$$

Le groupe linéaire de la forme bilinéaire alternée réelle $[x_1, x_2] + [x_3, x_4]$.

2° $\delta = -2$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2;$$

Le groupe linéaire de la forme bilinéaire alternée $[x_1, x_2] + [x_3, x_4]$ et de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3 - x_4\bar{x}_4$ aux quatre variables complexes x_1, x_2, x_3, x_4 .

3° $\delta = -6$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2;$$

Le groupe linéaire de la forme bilinéaire alternée $[x_1, x_2] + [x_3, x_4]$ et de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$.

IV. Les groupes réels du type (A) ou du type (D) ($l = 3$) peuvent être de caractère $\delta = 3, 1, -3, -5, -15$.

1° $\delta = 3$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire spécial à quatre variables réelles (groupe projectif de l'espace);

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2;$$

2° $\delta = 1$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3 - x_4\bar{x}_4;$$

Le groupe linéaire de la forme quadratique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2.$$

3° $\delta = -3$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 - x_4\bar{x}_4;$$

Le groupe linéaire de la forme quadratique $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6$ et de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 - x_4\bar{x}_4 + x_5\bar{x}_5 - x_6\bar{x}_6$.

4° $\delta = -5$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe

$$\begin{aligned} X' &= AX + BY, \\ Y' &= CX + DY, \end{aligned}$$

aux variables X, Y et aux paramètres A, B, C, D quaternioniens ;

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2.$$

5° $\delta = -15$. Il y a isomorphisme entre :

Le groupe linéaire de la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4;$$

Le groupe linéaire de la forme quadratique réelle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2.$$