ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. H. GRONWALL

Sur les zéros des fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ associées à la fonction gamma

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 381-393
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__381_0>

SUR LES

ZÉROS DES FONCTIONS P(z) ET Q(z)

ASSOCIÉES

A LA FONCTION GAMMA,

PAR M. F.-H. GRONWALL.

1. Soit $z = x + iy$ une variable complexe, et écrivons

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

où

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{z+\nu} \tag{1}$$

possède les mêmes pôles et les mêmes résidus pour ceux-ci que $\Gamma(z)$, tandis que $Q(z)$ est une fonction entière.

Au regard des zéros réels de $P(z)$, Bourguet (1) a démontré qu'ils se trouvent tous dans les intervalles

$$\left.\begin{array}{l} -2m - \frac{3}{2} < z < -2m - 1 \\ -2m - 2 < z < -2m - \frac{3}{2} \end{array}\right\} \quad (m = 2, 3, 4, \ldots),$$

chacun de ces intervalles contenant un nombre impair de zéros. Que chacun des intervalles en question contient exactement *un* zéro de $P(z)$,

(1) L. BOURGUET, *Sur la fonction eulérienne* (*Comptes rendus*, t. XCVI, 30 avril 1883, p. 1307-1310, réimprimé dans *Acta math.*, t. II, 1883, p. 296-298).

c'est ce qu'a fait voir tout récemment M. Haskins [1] par une application ingénieuse du théorème de Budan-Fourier. Je me propose de retrouver le résultat de M. Haskins par une méthode plus simple et possédant en outre deux avantages sur la sienne : d'abord elle donne, pour les zéros réels, des bornes beaucoup plus resserrées, et, d'autre part, elle permet de démontrer que $P(z)$ possède exactement quatre zéros complexes, proposition déjà énoncée par Bourguet [2], mais avec une démonstration insuffisante.

Tout ce qu'on sait jusqu'ici sur les zéros de $Q(z)$, c'est que, s'il en existe, leur partie réelle est supérieure à un [3]. Dans un travail qui paraîtra sous peu dans les *Annals of Mathematics*, M. Jensen a établi l'existence d'une infinité de zéros et déterminé leur expression asymptotique. En attendant la publication de ces résultats, je donnerai aux nos 7 et 8, pour l'existence d'une infinité de zéros de $Q(z)$, deux démonstrations très courtes, fondées l'une sur la notion de genre d'une fonction entière et l'autre sur un théorème aujourd'hui classique de M. Picard.

2. Dans la recherche des zéros, nous substituerons d'abord à la fonction $P(z)$ la fonction rationnelle

$$P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{z+\nu} \quad (n > z), \tag{2}$$

laquelle converge vers $P(z)$ lorsque n croît indéfiniment, la convergence étant uniforme dans tout domaine fini auquel sont extérieurs tous les points $0, -1, -2, -3, \ldots$.

Supposons d'abord que $z = x + yi$ soit un zéro complexe de $P(z)$; en séparant les parties réelle et imaginaire nous aurons

$$\sum_0^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{x+\nu}{(x+\nu)^2+y^2} = 0, \qquad \sum_0^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{y}{(x+\nu)^2+y^2} = 0,$$

---

(1) C.-N. Haskins, *On the zeros of the function* $P(x)$, *complementary to the incomplete gamma function* (*Trans. Am. math. Soc.*, t. XVI, 1915, p. 405-412).

(2) L. Bourguet, *Sur la théorie des intégrales eulériennes* (*Comptes rendus*, t. XCVI, 21 mai 1883, p. 1487-1490).

(3) A. Lindhagen, *Thèse pour le Doctorat*, Upsal, 1887.

ou bien, comme $y \neq 0$,

$$\sum_0^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{(x+\nu)^2+y^2} = 0, \qquad \sum_0^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{\nu}{(x+\nu)^2+y^2} = 0.$$

La dernière de ces équations s'écrit aussi

$$(3) \quad \frac{1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{1}{(x+2)^2+y^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(x+3)^2+y^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(x+4)^2+y^2} + \dots + \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(x+2n+1)^2+y^2} = 0.$$

Les termes du membre de gauche sont de signes alternés et pour $x > -2$, ils décroissent en valeur absolue à partir du troisième, en sorte que l'équation (3) donne lieu à l'inégalité

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{1}{(x+2)^2+y^2} < 0,$$

c'est-à-dire $x < -\frac{3}{2}$.

Supposons en second lieu que z soit réel. Pour $z > 0$, les termes dans (2) sont de signes alternés et décroissent en valeur absolue à partir de $\nu = 0$, et, par conséquent, $P_n(z) > 0$. Lorsque $-1 < z < 0$, la même remarque s'applique à partir de $\nu = 1$, d'où

$$P_n(z) < \frac{1}{z} < 0.$$

Pour $-2 < z < -1$, la condition indiquée a lieu à partir de $\nu = 2$, et

$$P_n(z) > \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)} > 0.$$

Nous trouvons de la même manière pour $-3 < z < -2$

$$P_n(z) < \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z+2} = \frac{z^2+3z+4}{2z(z+1)(z+2)} < 0,$$

le numérateur étant toujours positif et le dénominateur contenant trois facteurs négatifs. De même, pour $-4 < z < -3$,

$$P_n(z) > \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z+3} = \frac{(z+4)(2z^2+7z+9)}{6z(z+1)(z+2)(z+3)} > 0,$$

et pour $-5 < z < -4$,

$$\begin{aligned} P_n(z) &< \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z+4} \\ &= \frac{(z+4)(2z^2+7z+9)}{6z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z+4} < 0, \end{aligned}$$

chacune des deux dernières expressions étant négative.

Toutes les inégalités précédentes s'appliquent aussi bien à $P(z)$, nous pouvons donc énoncer ce résultat préliminaire :

Tout zéro réel de $P_n(z)$ ou de $P(z)$ est nécessairement inférieur à -5, et tout zéro complexe a une partie réelle inférieure à $-\frac{3}{2}$.

3. Afin de démontrer l'existence de $2n-3$ zéros réels de $P_n(z)$, faisons dans (2) $z = -2m-1-\xi$, où $m = 2, 3, \ldots, n$ et $0 < \xi < 1$; il vient

$$(4)\quad \begin{aligned} &P_n(-2m-1-\xi) \\ &= -\frac{1}{2m+1+\xi} + \left[\frac{1}{2m+\xi} - \frac{1}{2!}\frac{1}{2m-1+\xi} + \ldots - \frac{1}{(2m)!}\frac{1}{1+\xi}\right] \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{\xi} + \left[\frac{1}{(2m+2)!}\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{(2m+3)!}\frac{1}{2-\xi} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{2n-2m-1-\xi} - \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{2n-2m-\xi}\right]. \end{aligned}$$

Les termes dans chacune des deux parenthèses sont de signes alternés et décroissent en valeur absolue (pour $m = n$, la deuxième parenthèse manque). La décroissance est évidente pour les termes de la deuxième parenthèse, et pour ceux de la première, il suffit d'observer que l'inégalité

$$\frac{1}{\nu!}\frac{1}{2m+1-\nu+\xi} > \frac{1}{(\nu+1)!}\frac{1}{2m-\nu+\xi} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2m-1)$$

est équivalente à la suivante :

$$\nu(2m-\nu+\xi)>1 \qquad (\nu=1,2,\ldots,2m-1),$$

laquelle est évidente. Il suit maintenant de (4) que

$$P_n(-2m-1-\xi)>-\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{\xi},$$

pour $0<\xi<1$, d'où

$$(5) \qquad P_n\left[-2m-1-\frac{1}{(2m)!}\right]>0 \qquad (m=2,3,\ldots,n).$$

D'autre part, (4) donne, pour $m=2,3,\ldots,n-1$,

$$\begin{aligned} &P_n(-2m-1-\xi)\\ &\quad>-\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{\xi}+\frac{1}{(2m+2)!}\frac{1}{1-\xi}-\frac{1}{(2m+3)!}\frac{1}{2-\xi},\end{aligned}$$

et en y faisant $\xi=1-\frac{1}{(2m+1)!}$,

$$\begin{aligned} &P_n\left[-2m-2+\frac{1}{(2m+1)!}\right]\\ &>\left[\frac{1}{2m+2}-\frac{1}{2m+2-\frac{1}{(2m+1)!}}\right]+\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{(2m+1)!}}-\frac{1}{(2m+3)!}\frac{1}{1+\frac{1}{(2m+1)!}}\\ &=-\frac{1}{(2m+2)[(2m+2)!-1]}+\frac{1}{(2m+1)!-1}-\frac{1}{(2m+2)(2m+3)[(2m+1)!+1]}\\ &>\frac{1}{(2m+1)!-1}\left[-\frac{1}{2m+2}+1-\frac{1}{(2m+2)(2m+3)}\right],\end{aligned}$$

ou enfin

$$(6) \qquad P_n\left[-2m-2+\frac{1}{(2m+1)!}\right]>0 \qquad (m=2,3,\ldots,n-1).$$

En assignant des valeurs à ξ pour lesquelles P_n sera négatif, il convient de traiter à part le cas de $m=2$. Soit d'abord $m=2$ et $\xi=\frac{1}{4}$;

nous obtenons de (3)

$$P_n\left(-5+\frac{1}{4}\right)<-\frac{1}{5+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2!}\frac{1}{3+\frac{1}{4}}+\frac{1}{3!}\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$$
$$-\frac{1}{4!}\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+\frac{1}{5!}\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{6!}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=-0,03310\ldots.$$

Pour $m=2$ et $\xi=1-\frac{1}{20}$, nous obtenons de même

$$P_n\left(-6+\frac{1}{20}\right)$$
$$<-\frac{1}{6-\frac{1}{20}}+\frac{1}{5-\frac{1}{20}}-\frac{1}{2!}\frac{1}{4-\frac{1}{20}}+\frac{1}{3!}\frac{1}{3-\frac{1}{20}}$$
$$-\frac{1}{4!}\frac{1}{2-\frac{1}{20}}+\frac{1}{5!}\frac{1}{1-\frac{1}{20}}+\frac{1}{6!}\frac{1}{\frac{1}{20}}=-0,02095\ldots.$$

Soit maintenant $m>2$ et $0<\xi<1$; de (4) nous tirons l'inégalité

$$P_n(-2m-1-\xi)<-\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}-\frac{1}{2!}\frac{1}{2m-1+\xi}$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{1}{2m-2+\xi}+\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{\xi}+\frac{1}{(2m+2)!}\cdot\frac{1}{1-\xi}.$$

Il est facile de voir que $-\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}$ décroît et que $-\frac{1}{2!}\frac{1}{2m-1+\xi}+\frac{1}{3!}\frac{1}{2m-2+\xi}$ croît pour ξ croissant de 0 à 1, et par conséquent

$$P_n(-2m-1-\xi)<-\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m}-\frac{1}{2!}\frac{1}{2m}$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{\xi}+\frac{1}{(2m+2)!}\frac{1}{1-\xi},$$

ou bien

$$(7)\qquad P_n(-2m-1-\xi)<-\frac{8m^2-14m+3}{6(2m+1)2m(2m-1)}$$
$$+\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{\xi}+\frac{1}{(2m+2)!}\frac{1}{1-\xi}.$$

En faisant $\xi = \frac{6}{(2m)!}$, d'où $\xi < \frac{1}{4}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_n\left[-2m-1-\frac{6}{(2m)!}\right] \\ &\quad < -\frac{8m^2-14m+3}{6(2m+1)2m(2m-1)} + \frac{1}{6(2m+1)} + \frac{1}{(2m+2)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &\quad = -\frac{1}{6(2m+1)2m(2m-1)}\left[4m(m-3)+3-\frac{4}{3}\,\frac{1}{(2m-2)!(2m+2)}\right] < 0 \\ &\qquad\qquad (m>2). \end{aligned}$$

En rapprochant ceci du premier résultat numérique relatif à $m=2$, nous voyons que

$$(8) \qquad \mathrm{P}_n\left[-2m-1-\frac{6}{(2m)!}\right] < 0 \quad (m=2, 3, \ldots, n).$$

D'autre part, en faisant dans (7) $\xi = 1 - \frac{6}{(2m+1)!}$, d'où $\xi > \frac{3}{4}$, nous aurons

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_n\left[-2m-2+\frac{6}{(2m+1)!}\right] \\ &\quad < -\frac{8m^2-14m+3}{6(2m+1)2m(2m-1)} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{(2m+1)!} + \frac{1}{6(2m+1)} \\ &\quad = -\frac{1}{6(2m+1)2m(2m-1)}\left[4m(m-3)+3-\frac{4}{3}\,\frac{1}{(2m-2)!}\right] < 0 \\ &\qquad\qquad (m>2), \end{aligned}$$

et en rapprochant cette inégalité du deuxième résultat numérique relatif à $m=2$, il vient

$$(9) \qquad \mathrm{P}_n\left[-2m-2+\frac{6}{(2m+1)!}\right] < 0 \quad (m=2, 3, \ldots, n).$$

Il suit maintenant des inégalités (5) et (8), ainsi que de (6) et (9), que chacun des $2n-3$ intervalles

$$(10)\quad \begin{cases} -2m-1-\dfrac{6}{(2m)!} \leqq z \leqq -2m-1-\dfrac{1}{(2m)!} & (m=2,3,\ldots,n), \\ -2m-2+\dfrac{1}{(2m+1)!} \leqq z \leqq -2m-2+\dfrac{6}{(2m+1)!} & (m=2,3,\ldots,n-1) \end{cases}$$

contient un nombre impair de zéros de $P_n(z)$. Si l'un de ces intervalles contient plusieurs zéros, choisissons l'un quelconque de ceux-ci; nous aurons ainsi $2n-3$ zéros réels que nous désignerons par z_5, z_6, ..., z_{2n+1}.

4. Que $P_n(z)$ possède exactement $2n+1$ zéros, c'est ce que nous voyons immédiatement en écrivant

$$(11)\quad P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{2n+1}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\,\frac{1}{z+\nu}=\frac{a_0 z^{2n+1}+a_1 z^{2n}+\ldots+a_{2n+1}}{(2n+1)!\,z(z+1)\ldots(z+2n+1)}.$$

Il reste donc à étudier les quatre zéros z_1, z_2, z_3 et z_4; je dis qu'ils sont tous complexes.

En développant (11) suivant les puissances de $\frac{1}{z}$, nous obtenons facilement

$$a_0=(2n+1)!\sum_0^{2n+1}\frac{(-1)^\nu}{\nu!},$$

$$a_1=(n+1)(2n+1)a_0+(2n+1)!\sum_0^{2n}\frac{(-1)^\nu}{\nu!},$$

et en multipliant (11) par z, puis faisant $z=0$,

$$a_{2n+1}=(2n+1)!\,(2n+1)!$$

Par conséquent,

$$\sum_{\lambda=1}^{2n+1}-z_\lambda=\frac{a_1}{a_0}=(n+1)(2n+1)+1+\frac{1}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\displaystyle\sum_0^{2n+1}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}},$$

et puisque $\sum_{0}^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} > \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$, il vient

$$\sum_{\lambda=1}^{2n+1} -z_\lambda < (n+1)(2n+1) + 1 + \frac{3}{(2n+1)!}.$$

D'autre part, les inégalités (10) font voir que

$$\sum_{\lambda=1}^{2n+1} -z_\lambda > \sum_{m=5}^{n} \left[2m+1+\frac{1}{(2m)!}\right] + \sum_{m=2}^{n-1} \left[2m+2-\frac{6}{(2m+1)!}\right],$$

et puisque

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots + \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n)!} - \left[\frac{6}{5!} + \frac{6}{7!} + \ldots + \frac{6}{(2n-1)!}\right]$$
$$> \frac{1}{4!} - \frac{6}{5!} + \frac{1}{(2n)!} > -\frac{1}{2} + \frac{3}{(2n+1)!},$$

nous aurons

$$\sum_{\lambda=5}^{2n+1} -z_\lambda > (n-1)(n+3) + (n+2)(n+3) - \frac{1}{2} + \frac{3}{(2n+1)!},$$

et la comparaison avec l'inégalité précédente donne

$$(12) \qquad -z_1 - z_2 - z_3 - z_4 < \frac{23}{2}.$$

Les coefficients de $P_n(z)$ étant réels, les zéros complexes sont en nombre pair et conjugués deux à deux. Supposons d'abord que z_1, z_2, z_3 et z_4 soient tous réels; en vertu du n° 2, chacun d'eux serait inférieur à -5, et le membre gauche de (12) plus grand que 20. Supposons ensuite que z_1 et z_2 soient réels, z_3 et z_4 complexes; alors $-z_1 - z_2 > 10$, et $-z_3 - z_4$, ou le double de la partie réelle de $-z_3$, serait, d'après le n° 2, plus grand que 3, ce qui contredit encore l'égalité (12).

Il s'ensuit donc que z_1, z_2, z_3 et z_4 sont tous complexes, et avec les zéros $z_5, z_6, \ldots, z_{2n+1}$ obtenus au n° 3, ils constituent la totalité des zéros de $P_n(z)$. Par conséquent, chacun des $2n-3$ intervalles (10) contient *exactement* un zéro, et il n'y a pas d'autres zéros réels.

5. Avant de passer aux zéros de $P(z)$, il faut démontrer que, pour n croissant indéfiniment, les zéros complexes de $P_n(z)$ ne tendent ni vers l'infini, ni vers un pôle de $P(z)$. Pour cela, nous écrivons

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_1 - y_1 i, \qquad z_3 = x_2 + y_2 i, \qquad z_4 = x_2 - y_2 i,$$

où nous supposerons $x_1 > x_2$; l'inégalité (12) devient $-2x_1 - 2x_2 < \frac{23}{2}$, et comme $-x_1 > \frac{3}{2}$, nous aurons $-x_2 < \frac{17}{4}$. Si l'un des z_1, z_2, z_3 et z_4 tend vers un pôle de $P(z)$, ce pôle sera donc -2, -3 ou -4. Considérons par exemple le pôle -2; lorsque x est compris entre -1 et -3, l'équation (3) donne

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{1}{(x+2)^2+y^2} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{(x+3)^2+y^2} > 0.$$

En posant dans cette inégalité $x = -2$, nous aurons

$$1 + \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{1+y^2} > \frac{1}{y^2},$$

d'où $y^2 > \frac{2}{3}$, et, par conséquent, nous pouvons fixer un ε *indépendant de n* tel que l'équation (3) donne $y^2 > \frac{1}{3}$ pour $|x-2| < \varepsilon$. Donc un zéro complexe de P_n ne peut pas tendre vers -2 pour n infini, et une démonstration analogue s'applique aux pôles -3 et -4.

Pour voir qu'un zéro complexe de $P_n(z)$ ne tendra non plus vers l'infini, nous observons que

$$\prod_{\lambda=1}^{2n+1} |z_\lambda| = \frac{a_{2n+1}}{a_0} = \frac{(2n+1)!}{\displaystyle\sum^{2n+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu}} < 3(2n+1)!$$

D'autre part, les inégalités (10) donnent

$$\prod_{\lambda=5}^{2n+1} |z_\lambda| > \prod_{m=2}^{n}\left[2m+1+\frac{1}{(2m)!}\right]\prod_{m=2}^{n-1}\left[2m+2-\frac{6}{(2m+1)!}\right]$$
$$=\frac{(2n+1)!}{4!}\prod_{m=2}^{n}\left[1+\frac{1}{(2m+1)!}\right]\prod_{m=2}^{n-1}\left[1-\frac{6}{(2m+2)!}\right],$$

et puisque

$$\left[1+\frac{1}{(2m+1)!}\right]\left[1+\frac{1}{(2m+2)!}\right]=1+\frac{1}{(2m+1)!}\left[1-\frac{6}{2m+2}-\frac{6}{(2m+2)!}\right]>1,$$

pour $m>2$, nous aurons

$$\prod_{\lambda=5}^{3n+1}|z_\lambda|>\frac{(2n+1)!}{4!}\left(1-\frac{1}{5!\,5!}\right).$$

La comparaison à l'inégalité précédente donne

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)<\frac{3.4!}{1-\frac{1}{5!\,5!}}<7^3,$$

d'où, pour $y=y_1$ ou y_2,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2\right]<7^3,$$

ou enfin

$$|y|<\frac{11}{2}.$$

6. Pour passer aux zéros de $P(z)$, considérons un domaine fini quelconque dans le plan des z, auquel sont extérieurs tous les points $0, -1, -2, \ldots$. Dans ce domaine, les $P_n(z)$ convergent uniformément vers $P(z)$, et, d'après un théorème connu de Rouché [1], les points limites des zéros de $P_3(z)$, $P_4(z)$, ... seront tous des zéros

[1] E. ROUCHÉ, *Mémoires sur la série de Lagrange* (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier XXXIX, 1862, p. 193-224). *Voir* le théorème III, p. 217. Ce théorème fut redécouvert, par M. A. HURWITZ, *Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function* (*Math. Ann.*, t. XXXIII, 1889, p. 246-266). *Voir* le § I de ce travail.

de $P(z)$ et inversement, un voisinage arbitrairement petit d'un zéro d'ordre k de $P(z)$ contiendra k zéros de $P_n(z)$ pour n suffisamment grand.

Les zéros complexes de $P_3(z)$, $P_4(z)$, ... n'auront pas de point limite réel, car, d'après le numéro précédent, son affixe serait $\geqq -\frac{17}{4}$ mais distinct de -2, -3 et -4, et par le théorème de Rouché, le point limite en question serait donc un zéro de $P(z)$. Cela amène une contradiction, car nous avons vu au n° 2 que tous les zéros réels de $P(z)$ sont inférieurs à -5.

Le théorème de Rouché donne maintenant le résultat définitif que voici :

Chacun des intervalles

$$-2m-1-\frac{6}{(2m)!} \leqq z \leqq -2m-1-\frac{1}{(2m)!}$$

et

$$-2m-2+\frac{1}{(2m+1)!} \leqq z \leqq -2m-2+\frac{6}{(2m+1)!}$$

contient, pour $m=2, 3, 4, \ldots$, *un seul zéro simple de* $P(z)$, *et cette fonction n'a pas d'autre zéro réel. Les zéros complexes sont au nombre de quatre; leurs parties réelles sont comprises entre* $-\frac{17}{4}$ *et* $-\frac{3}{2}$, *leurs parties imaginaires entre* $-\frac{11}{2}$ *et* $+\frac{11}{2}$.

7. On sait que la fonction entière $Q(z)$ peut être représentée par l'intégrale, convergente pour toute valeur complexe de z,

$$Q(z)=\int_1^\infty e^{-u}u^{z-1}\,du.$$

Il s'ensuit que, pour n entier et $n<|z|\leqq n+1$,

$$|Q(z)|\leqq \int_1^\infty e^{-u}u^n\,du < \int_0^\infty e^{-u}u^n\,du = n! < n^n < e^{|z|\log|z|} < e|z|^{1+\varepsilon},$$

lorsque $\varepsilon > 0$ et $|z|$ est suffisamment grand. Par conséquent, le genre de la fonction entière $Q(z)$ ne dépasse pas l'unité. Or supposons que $Q(z)$ n'ait qu'un nombre fini de zéros; cette fonction sera alors de la forme

$$Q(z) = e^{az} R(z),$$

où a est une constante (qui peut s'annuler) et $R(z)$ un polynome. D'autre part, nous savons que $Q(z)$ vérifie l'équation aux différences finies

$$Q(z+1) = zQ(z) + \frac{1}{e}, \tag{13}$$

et en y substituant l'expression précédente, nous aurons

$$1 = e^a \frac{R(z+1)}{zR(z)} - \frac{e^{-(az+1)}}{zR(z)}.$$

En faisant tendre z vers l'infini de manière que la partie réelle de az soit positive ou nulle, le membre droit tend vers zéro, d'où contradiction. La fonction $Q(z)$ a donc bien une infinité de zéros.

8. Ce résultat peut être démontré d'une façon encore plus simple. Supposons que l'équation $Q(z) = 0$ n'ait qu'un nombre fini de racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (ou aucune); il s'ensuit immédiatement de (13) que les seules racines de l'équation $Q(z) = \frac{1}{e}$ sont $1, z_1 + 1, z_2 + 1, \ldots, z_n + 1$. Or, d'après un théorème bien connu de M. Picard, toute fonction entière qui ne prend qu'un nombre fini de fois chacune de deux valeurs différentes $\left(\text{ici } 0 \text{ et } \frac{1}{e}\right)$ est nécessairement un polynome, et si nous substituons pour $Q(z)$ un polynome de degré m dans (13), le degré du membre gauche sera m et celui du membre droit $m+1$, d'où contradiction.