

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Représentation conforme avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux. Surfaces de révolution ; Surfaces minima. Surfaces isothermiques, hélicoïdales et spirales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 39 (1922), p. 217-271

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__217_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION CONFORME

AVEC CONSERVATION DES LIGNES DE COURBURE

ET DE LA VALEUR ABSOLUE

DU RAPPORT DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX

SURFACES DE RÉVOLUTION; SURFACES MINIMA
SURFACES ISOTHERMIQUES, HÉLICOÏDALES ET SPIRALES

PAR M. BERTRAND GAMBIER

INTRODUCTION.

1. Deux surfaces S et S_1 , ayant même ds^2 , la correspondance ponctuelle résultant de leur applicabilité ne conserve les asymptotiques que si les deux surfaces sont égales ou symétriques, solution banale de l'applicabilité.

Bornons-nous à une correspondance ponctuelle entre deux surfaces S et S_1 , conservant les *angles*, mais non les *longueurs* : *en général*, cette correspondance ne conserve les asymptotiques que si S et S_1 sont semblables, relation banale que nous écarterons.

J'appellerai P , le problème suivant : *trouver une surface S_1 , susceptible d'être transformée ponctuellement en une autre surface S , avec conservation des angles et des lignes asymptotiques*. L'énoncé peut être transformé ainsi : *trouver une surface S susceptible d'être transformée ponctuellement en une autre surface S_1 , avec conservation des angles, des lignes de courbure et du rapport $\frac{R}{R'}$ des rayons de courbure en chaque point*.

On constate que les images sphériques de S et S_1 sont aussi en représentation conforme l'une sur l'autre. L'examen de la réciproque conduit à appeler P_2 le problème suivant : *trouver une surface S susceptible d'être transformée ponctuellement en une autre surface S_1 , avec conservation des angles et des lignes de courbure, les rapports $\frac{R}{R'}$ et $\frac{R_1}{R'_1}$ des rayons de courbure principaux aux points correspondants étant égaux et de signe contraire.*

On obtient le résultat élégant suivant : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple S, S_1 soit solution de P_1 ou P_2 (à l'exclusion de l'autre bien entendu), c'est que S et S_1 étant en représentation conforme, leurs images sphériques soient aussi en représentation conforme.*

2. On sait que la sphère ou une surface minima quelconque donne une solution aussi bien de P_1 que de P_2 . Ces deux cas écartés, la surface S doit, pour donner une solution de P_1 ou P_2 , satisfaire à un ensemble d'équations aux dérivées partielles assez difficile à étudier complètement : en tout cas, on démontre assez aisément que si la surface S_1 , qui doit correspondre à S , existe, cette surface S_1 ne peut dépendre que de deux paramètres au plus en négligeant, bien entendu, une similitude.

La méthode consiste à supposer S donnée et rapportée à ses lignes de courbure. La détermination de S_1 revient à trouver une certaine fonction auxiliaire $K(u, v)$ satisfaisant à deux équations aux dérivées partielles du second ordre dont les coefficients dépendent de la surface S . C'est l'ensemble des conditions de compatibilité de ces équations en K que l'on doit former pour trouver toutes les surfaces S solutions de P_1 ou P_2 . Une surface S peut, sans contradiction, être solution simultanément de P_1 ou P_2 .

On pourrait modifier légèrement cette méthode et faire intervenir du premier coup la fonction K et les fonctions caractéristiques de la surface S (représentation sphérique de S et rayons de courbure de S) : on a alors un système de cinq équations aux dérivées partielles à cinq inconnues.

Sans résoudre complètement la question, on peut néanmoins mettre en évidence des solutions intéressantes ; je ne rappelle la sphère et les surfaces minima, que pour mémoire.

Une *surface de révolution quelconque* donne ∞^2 solutions de P_1 , ∞^2 solutions de P_2 . Les surfaces S_1 associées à S par P_1 sont aussi de révolution; les parallèles et méridiens de S se transforment respectivement en parallèles et méridiens sur S_1 ; on peut remarquer qu'en faisant varier par continuité les deux paramètres dont dépend la surface S_1 on peut réduire cette surface S_1 à la surface S , le point M_1 homologue sur S_1 de M sur S venant se confondre avec M . Si l'on prend maintenant la surface Σ de révolution et isothermique associée à S , toutes les surfaces Σ_1 déduites de Σ par le problème P_1 forment une famille continue à deux paramètres associés à S par P_2 et cette famille Σ_1 résout entièrement le problème P_2 pour la surface de révolution S donnée.

Si la *surface de révolution* S a ses deux rayons de courbure principaux R , R' liés par la relation $\frac{R}{R'} = m$, où m est une constante, la surface S est déterminée à une homothétie près : les surfaces S_1 ou Σ_1 précédemment déterminées subsistent, avec cette particularité que la surface S_1 coïncide avec S dans son ensemble, mais non point pour point : S admet donc ∞^2 auto-transformations ponctuelles du type P_1 (une de ces transformations étant d'ailleurs la transformation identique); Σ est la surface de révolution définie par l'équation $\frac{R}{R'} = -m$, et toutes les surfaces Σ_1 coïncident avec Σ , chacune dans son ensemble. *Mais de plus, dans ce cas particulier, la surface de révolution* T *définie par* $\frac{R}{R'} = \frac{1}{m}$ *correspond elle aussi par* P_1 *à* S , *les méridiens de* T *correspondant cette fois aux parallèles de* S *et inversement*; il y a évidemment ∞^2 correspondances P_1 différentes pour S et T ; la surface de révolution Θ définie par $\frac{R}{R'} = -\frac{1}{m}$ correspond par P_2 , elle aussi à S (avec ∞^2 modes). S et T épuisent complètement P_1 pour la surface S actuelle, Σ et Θ épuisant complètement P_2 .

Une surface *isothermique* S quelconque fournit avec sa surface isothermique associée Σ un couple solution de P_2 ; essayer de résoudre P_2 pour S revient alors, si l'on écarte la solution Σ , à résoudre P_1 pour cette surface S : donc pour les surfaces isothermiques, on peut, à un certain point de vue, dire que P_1 et P_2 se fondent en un seul problème.

3. La longueur des calculs ne m'a pas permis d'élucider complète-

ment P_1 ou P_2 et de donner une classification complète de toutes les surfaces solutions de P_1 ou P_2 . D'ailleurs on sait que la recherche des surfaces isothermiques est un problème difficile; or ces surfaces ne constituent qu'une partie de la solution de P_2 .

Il était assez naturel de passer en revue les surfaces classiques : je montre donc que *certaines hélicoïdes* ou *certaines surfaces spirales* donnent des solutions de P_1 et que certains hélicoïdes ou surfaces spirales donnent des solutions de P_2 . Je change alors légèrement de méthode et construis directement *un* hélicoïde ou *une* surface spirale correspondant à la première surface donnée : mais je n'ai pas élucidé si *toute* surface hélicoïdale ou surface spirale est solution de P_1 ou P_2 , je n'ai pas non plus élucidé si à l'hélicoïde ou à la surface spirale que j'ai déterminés, correspondent d'autres surfaces que la surface unique obtenue dans le texte.

J'ajoute une dernière remarque : Si S est solution de P_2 avec, non pas une seule, mais plusieurs surfaces associées S_1, S_2, \dots en nombre fini ou infini, ces diverses surfaces S_1, S_2, \dots se correspondent entre elles par P_1 . Cette remarque a été utilisée pour les surfaces de révolution; elle montre le lien intime qui existe entre P_1 et P_2 . Le calcul ultérieur montrera une parenté encore plus intime entre P_1 et P_2 , car P_1 se ramène à l'étude de deux équations du second ordre E et E' ; P_2 se ramène à l'étude du système E, E'' où E est l'équation déjà trouvée, tandis que E' et E'' qui sont des équations de Laplace ne diffèrent que par le terme constant.

Le problème P_1 a été étudié, ou du moins amorcé, par le mathématicien allemand Stäckel, en trois Mémoires: d'abord sous le titre *Ueber Abbildungen* (*Mathematische Annalen*, t. XLIV, 1894, puis sous le titre *Beiträge zur Flächentheorie* (*Leipziger Berichte*, t. XLVIII, 1896, et t. L, 1898). Divers résultats intéressants avaient été obtenus par Stäckel; l'auteur, rapportant les surfaces à leurs asymptotiques, n'avait pas aperçu ce fait intéressant que les représentations sphériques sont elles aussi en correspondance conforme, de sorte que la réciproque de cette propriété et, par suite P_2 , lui échappent totalement. La solution fournie par une surface de révolution *quelconque* ne lui apparaît pas; en 1894 il trouve, avec une faute de calcul rectifiée en 1896, une surface particulière dont il n'aperçoit qu'en 1898, sur une

remarque de M. Bianchi, que c'est une surface de révolution : c'est celle que j'étudie spécialement, dont le rapport $\frac{R}{R'}$ est constant. D'ailleurs Stäckel n'aperçoit que les correspondances qui transforment cette surface en elle-même et laisse échapper celles qui donnent la surface de révolution caractérisée par la valeur constante, inverse de la précédente, du rapport $\frac{R}{R'}$. Les hélicoïdes et surfaces spirales lui échappent totalement. Je puis donc considérer que je fais ici œuvre complètement originale⁽¹⁾.

4. Dans le premier Chapitre, je délimiterai les conditions analytiques du problème et je traiterai complètement les surfaces de révolution. J'y traiterai ensuite les surfaces isothermiques, hélicoïdales et spirales.

Dans le second Chapitre, je m'occuperai exclusivement des surfaces minima, et j'aurai ainsi l'occasion de rappeler des résultats que M. Goursat a obtenus aux *Acta mathematica*, t. XI, 1888, et d'autres que j'ai obtenus à propos des courbes à torsion constante (*Annales de l'École Normale*, 1919), du parabolôïde (*Bulletin de la Société mathématique*, 1921 et 1922), et des couples de surfaces minima qui se cor-

(1) Je dois formuler une critique beaucoup plus grave. En 1893, M. Kœnigs a signalé ce beau théorème que deux surfaces S et S_1 applicables étant rapportées à leur système conjugué commun, les six coordonnées x, y, z , et x_1, y_1, z_1 des points homologues M, M_1 satisfont à la même équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + A(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

D'ailleurs $x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$ est une septième solution. Or Stäckel, dans le Mémoire de 1894, page 563, énonce cette proposition fautive que dans toute correspondance ponctuelle de deux surfaces S et S_1 , le système conjugué commun fournit la même équation de Laplace sur chaque surface. On sait qu'en général on a deux équations distinctes : cela résulte de ce fait évident que je peux choisir la première équation de Laplace arbitrairement et prendre pour x, y, z trois solutions de cette équation ; je choisis ensuite une seconde équation de Laplace arbitraire, distincte de la précédente et je prends trois solutions x_1, y_1, z_1 de cette équation. Les deux surfaces S et S_1 sont ainsi rapportées à un système conjugué commun et comme l'équation de Laplace relative à un système conjugué donné sur une surface est unique, la proportion de l'auteur allemand se trouve inexacte.

respondent comme focales d'une même congruence rectiligne, avec conservation des angles, des lignes asymptotiques et des lignes de courbure (*Comptes rendus*, 2 novembre 1920).

Un géomètre japonais de valeur, M. Ogura, a traité des questions apparentées à P_1 ou P_2 au *Tohoku Mathematical Journal* (1917) et aux *Proceedings of Tokyo Mathematical Physical Society* (1918).

CHAPITRE I.

CONDITIONS ANALYTIQUES DE P_1 ET P_2 . SURFACES DE RÉVOLUTION.
SURFACES ISOTHERMIQUES. SURFACES SPIRALES OU HÉLICOÏDALES.

1. Si une représentation conforme conserve les asymptotiques l'angle de ces dernières est le même aux points homologues, donc $\frac{R}{R'}$ conserve sa valeur; les bissectrices des directions asymptotiques se conservent; comme elles enveloppent les lignes de courbure, ces dernières se conservent.

Si, dans une représentation conforme, les lignes de courbure se conservent, cela ne suffit pas pour conserver les lignes asymptotiques; par exemple, la déformation d'une surface de révolution en une autre surface de révolution. Il faut de plus que le rapport $\frac{R}{R'}$ se conserve avec son signe. De là les deux énoncés équivalents donnés dans l'Introduction pour P_1 .

2. Soit un couple (S, S_1) lié par la correspondance (M, M_1) du type P_1 : je prends les images sphériques m et m_1 de M et M_1 . Il est clair que la figure plane formée dans le plan tangent à S en M par les deux directions asymptotiques, deux tangentes MT et MT' , les tangentes $M\theta$ et $M\theta'$ respectivement conjuguées, est superposable à la figure plane homologue relative à S_1 et M_1 ; or l'angle des tangentes sphériques mt , mt' correspondant à MT et MT' , est égal à l'angle $M\theta$, $M\theta'$; donc l'angle correspondant $m_1 t_1$, $m_1 t'_1$ est égal à l'angle mt , mt' ; les images sphériques de S et S_1 sont donc en correspondance conforme.

L'étude de la réciproque: S et S_1 étant en correspondance conforme,

leurs images sphériques sont aussi en correspondance conforme, est intéressante et conduit à envisager les deux énoncés P_1 et P_2 distincts, s'excluant mutuellement, qui ont déjà été donnés dans l'Introduction.

Un arc infiniment petit MN issu de M sur S , de longueur ds , a pour homologue un arc $M_1 N_1$ sur S_1 de longueur αds , où α dépend uniquement de la position de M , mais non de l'orientation de MN ; l'arc mn de la représentation sphérique de S a pour longueur $d\sigma$ et m, n , pour longueur $\beta d\sigma$ où β ne dépend aussi que de M . Appliquons ceci aux lignes de courbure de S ; le cas presque évident, où S est soit sphère soit surface minima, étant exclu, ces lignes sont caractérisées par ce fait qu'elles sont orthogonales et ont pour image sphérique un réseau orthogonal; cette double propriété se conserve par représentation conforme, donc ces lignes restent lignes de courbure. Si MN est ligne de courbure, le rayon principal correspondant est $\frac{MN}{mn}$ ou $\frac{ds}{d\sigma}$; pour S_1 nous trouvons $\frac{\alpha ds}{\beta d\sigma}$, autrement dit

$$R_1 = \pm \frac{\alpha}{\beta} R,$$

car ce raisonnement n'a pas tenu compte des signes de R et R_1 .

On a de même

$$R'_1 = \pm \frac{\alpha}{\beta} R',$$

donc

$$\frac{R_1}{R'_1} = \pm \frac{R}{R'}.$$

La réciproque est donc établie. On sait d'ailleurs depuis longtemps que deux surfaces minima forment un couple S, S_1 solution de P_1 , que deux surfaces isothermiques associées, qui ont même représentation sphérique, sont solutions de P_2 .

Les problèmes P_1 et P_2 ont une liaison remarquable l'un avec l'autre que nous constaterons à diverses reprises.

3: Je me débarrasse du cas où S est une sphère ou une surface minima.

Pour le problème P_1 supposons que S soit une sphère; la surface S_1 ayant en chaque point ses rayons de courbure principaux égaux est

aussi une sphère que nous pouvons supposer coïncidant avec S et il suffit de mettre S en correspondance conforme sur elle-même, ce qui revient à déterminer la fonction analytique de variable complexe la plus générale, ou, si l'on se borne au domaine réel, à trouver deux solutions adjointes de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Pour le problème P_1 , supposons que S soit une surface minima, il en est de même de S_1 ; je reviendrai au Chapitre II sur ces surfaces, mais nous savons déjà par les propriétés classiques qu'elles possèdent deux ∞^3 représentations P_1 , l'une sur l'autre.

Pour le problème P_2 , supposons que l'une des surfaces soit une sphère, l'autre est surface minima et inversement. On sait déjà qu'une sphère S et une surface minima quelconque S_1 sont, par plans tangents parallèles, en correspondance P_2 ; il suffit pour avoir la correspondance P_2 la plus générale entre ces deux surfaces, de déterminer la correspondance conforme la plus générale de la sphère sur elle-même, question traitée à l'instant.

Nous pourrions donc écarter désormais ces cas; en mettant en équation les données du problème, nous verrons d'ailleurs comment ils se manifesteraient automatiquement comme cas exceptionnels.

4. Je m'occupe d'abord spécialement de P_1 et je peux écrire, en changeant légèrement les notations habituelles et en rapportant S et S_1 à leurs lignes de courbure :

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2, & ds_1^2 = A_1^2 du^2 + C_1^2 dv^2, \\ d\sigma^2 = a^2 du^2 + c^2 dv^2, & d\sigma_1^2 = a_1^2 du^2 + c_1^2 dv^2; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} A_1^2 du^2 + C_1^2 dv^2 \equiv \lambda^2 (A^2 du^2 + C^2 dv^2), \\ D_1 du^2 + D_1' dv^2 \equiv \mu^2 (D du^2 + D'' dv^2), \end{cases}$$

λ, μ étant certaines fonctions de u, v . On a donc

$$(3) \quad \begin{cases} R = \frac{A^3 C}{D}, & R' = \frac{A C^3}{D''}, \\ R_1 = \frac{\lambda^3 R}{\mu^2}, & R_1' = \frac{\lambda^3 R'}{\mu'^2}. \end{cases}$$

Les formules d'Olinde Rodrigues,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} + R \frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} + R_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} + R' \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} + R_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

donnent

$$(5) \quad a = \frac{A}{R} = \frac{D}{A^2 C}, \quad c = \frac{C}{R'} = \frac{D''}{AC^2},$$

d'où

$$(6) \quad a_1 = \frac{\mu^2}{\lambda^3} a, \quad c_1 = \frac{\mu^2}{\lambda^3} c.$$

Si l'on pose

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{\lambda^2}{\mu}, \quad hk = \frac{\mu}{\lambda}, \\ k = \frac{\mu^2}{\lambda^3}, \quad h^2 k = \lambda, \end{array} \right.$$

on aura

$$(8) \quad d\sigma_1^2 = k^2 d\sigma^2, \quad R_1 = h^2 R, \quad R'_1 = h^2 R',$$

on a bien obtenu une correspondance conforme sur la sphère. On déduit de (4) par dérivation

$$(9) \quad \left\{ (R - R') \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u \partial v} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial R'}{\partial u} \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0, \right.$$

et formules analogues en remplaçant γ par γ' puis γ'' et l'on en déduit aisément

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (R - R') \frac{\partial a}{\partial v} + a \frac{\partial R}{\partial v} = 0, \\ (R' - R) \frac{\partial c}{\partial u} + c \frac{\partial R'}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

Les relations (10) s'appliquent à S_1 , ce qui revient à remplacer a, c par ka, kc et R, R' par $h^2 R, h^2 R'$; en tenant compte de (10) on a ainsi

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial v} (R - R') + \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial v} R = 0, \\ \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial u} (R' - R) + \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial u} R' = 0, \end{array} \right.$$

ce qui revient à écrire

$$(12) \quad \begin{cases} R \frac{\partial}{\partial u} (\log k) = R' \frac{\partial}{\partial u} (\log \lambda), \\ R' \frac{\partial}{\partial v} (\log k) = R \frac{\partial}{\partial v} (\log \lambda). \end{cases}$$

Les équations (12) donnent la clé du problème; elles entraînent une relation de forme élégante qui ne nous servira pas :

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial u} (\log k) \frac{\partial}{\partial v} (\log k) = \frac{\partial}{\partial u} (\log \gamma) \frac{\partial}{\partial v} (\log \lambda).$$

5. Une solution banale se met en évidence : si l'une des quantités k ou λ est constante, l'autre l'est aussi. Une homothétie ramène le ds^2 de S_1 à coïncider avec celui de S , et alors, puisque les asymptotiques se correspondent, S et S_1 sont égales ou symétriques, donc $k^2 = 1$. Nous avons écarté ce cas banal.

Si $R = R'$ on a $\lambda = k$, c'est le cas de la sphère; si $R = -R'$ on a $\lambda k = 1$, c'est le cas de deux surfaces minima. Nous écartons ces cas; on doit alors éliminer λ entre les deux équations (12); je pose

$$(14) \quad k = e^k,$$

et j'ai

$$(E') \quad (15) \quad \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'} \right) \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R}{R'} \right) \frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R'}{R} \right) \frac{\partial K}{\partial v} = 0.$$

Cette équation (15) n'est une identité que si $R = \pm R'$.

Nous supposons que nous partons d'une surface S donnée; la surface S_1 est l'inconnue; il faut considérer les fonctions A, C, a, c, R, R' comme des fonctions connues de u, v et chercher les fonctions h, k ou λ, μ . La fonction k ou K satisfait déjà à l'équation (15). Or l'élément $d\sigma^2 = a^2 du^2 + c^2 dv^2$ se rapporte à une sphère unité, de sorte que a et c satisfont *identiquement* à la relation bien connue

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial c}{\partial u} \right) + ac = 0.$$

L'élément $d\sigma_1^2 = k^2 (a^2 du^2 + c^2 dv^2)$ se rapportant à la même sphère, on devra écrire que (16) continue à être vérifiée si l'on remplace a, c

par ka, kc ce qui donne, en tenant compte de (16),

$$(E) \quad (17) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a}{c} \frac{\partial K}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{c}{a} \frac{\partial K}{\partial u} \right) + (e^{2K} - 1) ac = 0.$$

Si les deux équations simultanées (15) et (17) n'ont pas d'intégrale commune en K (autre que $K = 0, k = 1$), il n'existe pas de surface S_1 associée à S par P_1 . Ce sera le cas général. Si la surface S est choisie convenablement, il peut arriver que (15) et (17) aient une solution commune en K ($K \neq 0$); nous vérifions sans peine qu'à cette intégrale K correspond (sauf similitude négligeable) une surface S_1 et une seule et que la correspondance P_1 entre S et S_1 est unique. En effet, l'élément linéaire $k^2(a^2 du^2 + c^2 dv^2)$ se rapporte à la sphère unité et l'on peut, par l'intégration d'une certaine opération de Riccati, déterminer les fonctions $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma''_1$ de u, v telles que

$$(18) \quad \begin{cases} \gamma_1^2 + \gamma'_1{}^2 + \gamma''_1{}^2 = 1, \\ d\gamma_1^2 + d\gamma'_1{}^2 + d\gamma''_1{}^2 = k^2(a^2 du^2 + c^2 dv^2). \end{cases}$$

Les diverses intégrales de l'équation de Riccati donnent toutes le même réseau $(\gamma_1, \gamma'_1, \gamma''_1)$ à un déplacement d'ensemble près sur la sphère, ce qui ne peut que produire un déplacement ou similitude sur S_1 . Le réseau $(\gamma_1, \gamma'_1, \gamma''_1)$ est orthogonal, donc conjugué et par suite $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma''_1$ sont solutions de l'équation

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{c_1} \frac{\partial c_1}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Les formules (12) permettent d'obtenir λ par une intégrale de différentielle totale, à un facteur numérique près, qui ne peut que produire une similitude sur S_1 . On calcule h par la formule $h^2 = \frac{\lambda}{k}$ et alors les relations (11) ou (12) expriment que les équations (10) sont vérifiées si l'on y remplace a, c par ka, kc et R, R' par $R_1 = h^2 R, R'_1 = h^2 R'$. L'équation (19) peut donc s'écrire

$$(20) \quad (R_1 - R'_1) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial R'_1}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

ce qui exprime que

$$(21) \quad - \int h^2 R \frac{\partial \theta}{\partial u} du + h^2 R' \frac{\partial \theta}{\partial v} dv$$

est une intégrale de différentielle totale si l'on remplace θ par γ_1 ou γ'_1 ou γ''_2 : les quantités x_1, γ_1, z_1 , ainsi calculées donnent manifestement une surface S_1 rapportée à ses lignes de courbure et l'on a

$$ds_1^2 = h^4 (R^2 a_1^2 du^2 + R'^2 c_1^2 dv^2) = h^4 k^2 (R^2 a^2 du^2 + R'^2 c^2 dv^2),$$

et tenant compte de

$$(22) \quad \begin{aligned} h^2 k &= \lambda, & aR &= A, & cR' &= C, \\ ds_1^2 &= \lambda^2 ds^2, & d\sigma_1^2 &= k^2 d\sigma^2, & \frac{R}{R'} &= + \frac{R_1}{R'_1}. \end{aligned}$$

Pour chaque intégrale commune k on a eu, moyennant une intégration d'équation de Riccati et le calcul de quatre intégrales de différentielle totale, une surface S_1 et une seule (sauf similitude), et une seule correspondance entre S et S_1 . La seule difficulté est de reconnaître quand les deux équations (E) et (E') ont une solution commune et de combien de paramètres arbitraires peut dépendre cette solution commune.

6. Je vais maintenant traiter la question analogue pour le problème P_2 . On remarquera que, si l'on prend pour point de départ

$$(23) \quad \begin{cases} ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2, & ds_1^2 = \lambda^2 (A^2 du^2 + C^2 dv^2), \\ d\sigma^2 = a^2 du^2 + c^2 dv^2, & d\sigma_1^2 = k^2 (a^2 du^2 + c^2 dv^2), \end{cases}$$

on a deux surfaces S, S_1 rapportées à leurs lignes de courbure, en représentation conforme l'une sur l'autre en même temps que leurs images sphériques, on a, d'après Olinde Rodrigues,

$$(24) \quad R^2 = \frac{A^2}{a^2}, \quad R'^2 = \frac{C^2}{c^2}, \quad R_1^2 = \frac{\lambda^2}{k^2} R^2, \quad R'_1{}^2 = \frac{\lambda^2}{k^2} R'^2,$$

mais en réalité, quand on extrait les racines, il n'y a aucune raison d'écrire $R = \frac{A}{a}$ plutôt que $R = \frac{-A}{a}$; si la surface S est seule étudiée, on peut, en changeant a et c de signe si c'est nécessaire, écrire $R = \frac{A}{a}$ et $R' = \frac{C}{c}$, mais si la surface S_1 est étudiée en même temps, on aura soit

$$R_1 = \frac{\lambda}{k} \frac{A}{a} \quad \text{et} \quad R'_1 = \frac{\lambda}{k} \frac{C}{c},$$

soit

$$R_1 = \frac{\lambda}{k} \frac{A}{a} \quad \text{et} \quad R'_1 = \frac{-\lambda}{k} \frac{C}{c},$$

sans qu'un changement de signe sur λ ou k puisse faire autre chose que changer de signe *simultanément* R_1 et R'_1 . Cela montre bien que la réciproque étudiée au paragraphe 2 doit se décomposer en deux cas et distinguer P_1 et P_2 . On peut encore remarquer que *toutes* les relations entre a, c, R, R', A et C se traduisent par les équations (16) et (10) déjà écrites au nombre de trois entre a, c, R, R' , puis par $A^2 = a^2 R^2, C^2 = c^2 R'^2$. Donc, pour le problème P_2 , nous supposons encore S donnée, donc a, c, R, R', A, C connues en u et v et nous avons uniquement pour inconnues les fonctions k et h telles que $k^2(a^2 du^2 + c^2 dv^2)$ donne encore l'élément linéaire d'une sphère unité et que les rayons de courbure R_1, R'_1 soient donnés par

$$(25) \quad R_1 = h^2 R, \quad R'_1 = -h^2 R'.$$

La première condition donne pour k l'équation (17) ou (E) déjà écrite. Les deux conditions (25) donnent entre a, c, R et R' les relations analogues à (10) : autrement dit, on remplace dans (10) a, c par ka, kc, R par $h^2 R$ et R' par $-h^2 R'$; en faisant cette opération et tenant compte de (10), on a aisément

$$(26) \quad \begin{cases} R' \frac{\partial}{\partial v} \log(a^2 k) + R \frac{\partial}{\partial v} \log(h^2 k) = 0, \\ R \frac{\partial}{\partial u} \log(c^2 k) + R' \frac{\partial}{\partial u} \log(h^2 k) = 0. \end{cases}$$

Ces équations, si l'une des surfaces est une sphère et, par suite, l'autre une surface minima, donnent immédiatement cette propriété connue que les lignes de courbure d'une surface minima et leurs images sphériques constituent séparément un réseau isotherme; en effet, si $R = R', S$ est une sphère et l'on a immédiatement

$$ahk = U, \quad chk = V,$$

où U, V sont fonctions de u seul ou v seul; si $R = -R', S$ est une surface minima et l'on a

$$\frac{a}{h} = U, \quad \frac{c}{h} = V.$$

Nous écartons ces cas classiques et l'élimination de h^2k entre les équations (26) donne

$$(E'') \quad (27) \quad \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'} \right) \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R}{R'} \right) \frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R'}{R} \right) \frac{\partial K}{\partial v} \\ + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2R'}{aR} \frac{\partial a}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2R}{cR'} \frac{\partial c}{\partial u} \right) = 0.$$

On démontre, comme plus haut, que la condition nécessaire et suffisante pour que P_2 puisse associer une surface S_1 à la surface donnée S , est que (E) et (E'') aient une solution commune en k ou K , *cette fois constante ou non*. A une solution commune, s'il y en a, correspond, par l'intégration d'une équation de Riccati et le calcul de quatre intégrales de différentielle totale, une seule surface S_1 (à une similitude près) et une seule correspondance P_2 de S à S_1 . L'équation (E'') ne peut, comme (E'), disparaître identiquement que dans le cas réservé de S sphère ou surface minima.

Toute la difficulté pour P_2 , aussi bien que P_1 , revient donc à voir si deux équations aux dérivées partielles simultanées attachées à S ont une solution commune et de combien de paramètres arbitraires dépend cette solution commune.

On peut, si l'on veut considérer comme inconnues d'abord K , puis a, c, R, R' de sorte qu'on obtient un système simultané de cinq équations aux dérivées partielles : (E, E') ou (E, E'') suivant qu'il s'agit de P_1 ou P_2 et les trois équations déjà écrites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial c}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial v} \right) + ac = 0, \\ (R - R') \frac{\partial a}{\partial v} + a \frac{\partial R}{\partial v} = 0, \\ (R' - R) \frac{\partial c}{\partial u} + c \frac{\partial R'}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

7. On aperçoit immédiatement les liens qui existent entre P_1 et P_2 : l'équation (E) est commune ; les deux équations (E') et (E''), qui sont de la forme célèbre de Laplace, ne diffèrent que par le terme constant ; cette dernière particularité ne pouvait être prévue *a priori* : elle est précieuse, parce qu'elle permet de traiter d'un seul coup les deux

problèmes. Je vais écrire, pour abrégé,

$$(29) \quad \begin{cases} m = \frac{RR'}{R'^2 - R^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R}{R'} \right), & n = \frac{RR'}{R^2 - R'^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R'}{R} \right), \\ l = 0 & \text{pour } E', \\ l = \frac{2RR'}{R^2 - R'^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R'}{aR} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R}{cR'} \frac{\partial c}{\partial u} \right) \right] & \text{pour } E'', \end{cases}$$

de sorte que les équations à étudier sont

$$\begin{cases} (E) & \frac{c}{a} r + \frac{a}{c} t + p \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{c}{a} \right) + q \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a}{c} \right) + (e^{2K} - 1) ac = 0, \\ (E_1) & s - mp - nq - l = 0, \end{cases}$$

E_1 condense E' et E'' ; p, q, r, s, t , suivant l'usage, sont $\frac{\partial K}{\partial u}, \frac{\partial K}{\partial v}, \dots$

Il y a un cas particulièrement intéressant : celui où l'on a

$$(30) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R'}{aR} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R}{cR'} \frac{\partial c}{\partial u} \right) = 0.$$

On a alors la solution commune $K = 0$ à E et E'' : S et S_1 sont alors deux surfaces isothermiques associées : leurs représentations sphériques coïncident; l'équation (30) est l'une des nombreuses formes que l'on peut donner à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre définissant la surface isothermique la plus générale. L'ensemble des surfaces isothermiques constitue donc une solution particulière de P_2 : la recherche de la surface isothermique générale S s'obtient en ajoutant aux conditions P_2 (conservation des angles, des lignes de courbure, $\frac{R}{R'} = -\frac{R_1}{R'_1}$) la condition complémentaire qu'aux points correspondants, les plans tangents à S et S_1 soient parallèles. On sait que l'intégration de cette équation aux dérivées partielles a déjà donné lieu à d'importants travaux.

En général, si l'on a pris pour surface S une surface isothermique quelconque, les équations $(E), (E'')$ n'ont pas d'autre solution commune que $K = 0, k = 1$; on a un couple S, S_1 unique composé de deux surfaces isothermiques associées (ici on n'a que trois quadratures de différentielle totale).

Mais supposons que nous posions le problème P_1 pour une surface isothermique S donnée : nous remarquons qu'alors E' ou E'' *coïncident* : la solution $K = 0$ qui a été utilisée avec fruit pour P_2 ne donne rien pour P_1 , puisqu'elle conduit à une simple similitude. Si $K = 0$ est la seule solution commune à \dot{E} et E' , S n'est pas solution de P_1 , elle est solution de P_2 avec une seule surface associée, isothermique aussi. Si en dehors de $K = 0$ il y a d'autres solutions, à une telle solution choisie correspond à S par P_1 une surface S_1 et par P_2 une surface Σ_1 ; on voit immédiatement que S_1 et Σ_1 sont isothermiques, puisque les lignes de courbure se conservent et que la représentation conforme transforme un carré infiniment petit en un autre carré ; d'ailleurs S_1 et Σ_1 sont entre elles dans la relation P_2 et, de plus, ont même représentation sphérique, puisque k étant connue en u et v on en a déduit $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma''_1$ aussi bien pour S_1 que Σ_1 : donc S_1 et Σ_1 sont deux surfaces isothermiques associées. Donc, dans ce cas, la surface isothermique S a donné par P_1 un certain nombre de surfaces associées S_1 isothermiques aussi ; si Σ, Σ_1 désignent les surfaces isothermiques associées de S et S_1 , on voit que S est solution de P_2 à divers titres : d'abord à cause de Σ , puis à cause des surfaces Σ_1 correspondant une à une aux surfaces S_1 . On remarquera qu'un couple (S, Σ_1) est une solution de P_2 *nouvelle* par rapport à un couple isothermique associé : si dans le couple (S, Σ_1) chaque surface est séparément isothermique, chacune diffère de la surface isothermique associée de l'autre. Dans le diagramme

$$\begin{array}{cc} S & S_1 \\ \Sigma & \Sigma_1 \end{array}$$

chaque couple $(S, S_1), (\Sigma, \Sigma_1)$ est solution de P_1 et chaque couple (S, Σ_1) et (S_1, Σ) est solution de P_2 .

Nous appliquerons ce résultat plus tard en remarquant qu'une surface de révolution quelconque est solution de P_1 (la surface S_1 dépendant de deux paramètres) et, de plus, est isothermique.

Pour finir ces généralités, anticipant un peu sur les résultats à venir, si (E) et (E') sont compatibles, la solution commune k dépend de 2, 1 ou 0 paramètres : soit S_1 une surface associée à S par P_1 ; cette surface S_1 est aussi solution de P_1 et de la même catégorie que S

au point de vue du nombre des paramètres d'une surface associée : cela est évident si l'on songe que deux surfaces S' et S'' , en correspondance P_1 avec une même troisième S , sont par là même en correspondance P_1 entre elles.

Si (E) et (E'') sont compatibles, supposons d'abord que la solution commune ne dépende d'aucun paramètre; à S correspond par P_2 une surface Σ ; Σ est elle-même solution de P_2 et, si S n'est pas solution de P_1 en même temps, à Σ ne correspondra par P_2 que la surface S ; si S est solution de P_1 , Σ aura pour surfaces associées par P_2 toutes les surfaces que P_1 associe à S ; d'autre part, Σ ne sera pas solution de P_1 si la solution commune à (E) et (E'') est unique, car toute surface associée à Σ par P_1 serait associée à S par P_2 ; si (E) et (E'') ont plusieurs solutions communes, chaque surface Σ est solution de P_1 .

Supposons (E) et (E'') compatibles avec une solution commune dépendant soit de un, soit de deux paramètres : deux est le maximum, comme nous le verrons. A S correspondent par P_2 des surfaces en nombre infini $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots$ toutes solutions de P_2 , à cause de S , se correspondant toutes entre elles par P_1 . Si S n'est pas solution de P_1 , chaque surface Σ, Σ', \dots n'aura comme associée par P_2 que la surface S .

On voit donc les liens nombreux qui existent entre les deux problèmes P_1 et P_2 . Remarquons encore que les trois équations $(E), (E'), (E'')$ prises toutes trois ne peuvent avoir une solution commune que si le terme constant de E'' disparaît; autrement dit, que si la surface S est isothermique. En dehors de ce cas particulier, il y aurait lieu de chercher spécialement le cas où $(E), (E')$ ont une solution commune k et où, en même temps, $(E), (E'')$ ont une solution commune $k' \neq k$. Les surfaces de révolution nous donneront cette propriété.

8. Étudions maintenant les conditions de compatibilité de (E) et de l'équation (E_1) qui condense E' ou E'' . Je les écris de nouveau

$$(E) \quad \frac{c}{a}r + \frac{a}{c}t + p \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{c}{a} \right) + q \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a}{c} \right) + (e^{2k} - 1)ac = 0,$$

$$(E_1) \quad s - mp - nq - l = 0.$$

Les coefficients m, n, l ne dépendent que de la surface S et ne renferment ni K ni ses dérivées. (E_1) dérivée par rapport à u ou v donne $\frac{\partial^3 K}{\partial u^2 \partial v}$ ou $\frac{\partial^3 K}{\partial u \partial v^2}$; en dérivant (E) par rapport à u ou v on a ensuite $\frac{\partial^3 K}{\partial u^3}, \frac{\partial^3 K}{\partial v^3}$; donc le système $(E), (E_1)$ n'est jamais en involution. Toute intégrale de ce système, qui est de forme classique, dépend au plus de quatre constantes arbitraires; on va voir que ce nombre se réduit, en réalité, à deux au plus.

En formant les six équations obtenues en dérivant deux fois en u et v , (E) et (E_1) , on a six équations linéaires entre les cinq dérivées

$$\frac{\partial^4 K}{\partial u^4}, \quad \frac{\partial^4 K}{\partial u^3 \partial v}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^4 K}{\partial v^4}$$

qui doivent se réduire à cinq; si cela a lieu en dérivant $(n - 2)$ fois chaque équation $(E), (E_1)$ les équations obtenues se réduisent à $n + 1$ qui déterminent sans ambiguïté toutes les dérivées

$$\frac{\partial^n K}{\partial u^n}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n K}{\partial v^n};$$

(E_1) , par exemple, donnera

$$\frac{\partial^n K}{\partial u^{n-1} \partial v}, \quad \frac{\partial^n K}{\partial u^{n-2} \partial v^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n K}{\partial u \partial v^{n-1}}$$

et (E) donnera les deux dérivées restantes $\frac{\partial^n K}{\partial u^n}, \frac{\partial^n K}{\partial v^n}$. Donc, tout revient bien à écrire que les six équations que je peux appeler

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} &= 0, & \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_1}{\partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^2 E_1}{\partial u \partial v} &= 0, & \frac{\partial^2 E_1}{\partial v^2} &= 0 \end{aligned}$$

se réduisent à cinq; or, on voit immédiatement que la combinaison

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} - \frac{c}{a} \frac{\partial^2 E_1}{\partial u^2} - \frac{a}{c} \frac{\partial^2 E_1}{\partial v^2}$$

ne contient plus de dérivées du quatrième ordre; donc, en l'égalant à zéro et en remplaçant les dérivées du troisième ordre par les expres-

sions déjà calculées, nous formons une nouvelle équation du second ordre E_2 que doit vérifier la fonction K . Tout reviendra donc à étudier le système E, E_1, E_2 . Nous pouvons former E_2 par tel procédé que nous voudrions; pour cela, je dérive E et E_1 chacune une fois, soit en u , soit en v ; l'équation E_1 donne donc $\frac{\partial^3 K}{\partial u^2 \partial v}, \frac{\partial^3 K}{\partial u \partial v^2}$; si je prends l'équation E sous la forme écrite dans ce travail, en dérivant en u et remplaçant $\frac{\partial^3 K}{\partial u \partial v^2}$ par la valeur déjà obtenue et s par $mp + nq + l$, nous obtenons les expressions suivantes :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 K}{\partial u^2 \partial v} = mr + \left(mn + \frac{\partial m}{\partial u} \right) p + \left(n^2 + \frac{\partial n}{\partial u} \right) q + nl + \frac{\partial l}{\partial u}, \\ \frac{\partial^3 K}{\partial u \partial v^2} = nt + \left(m^2 + \frac{\partial m}{\partial v} \right) p + \left(mn + \frac{\partial n}{\partial v} \right) q + ml + \frac{\partial l}{\partial v}, \\ \frac{\partial^3 K}{\partial u^3} = A_1 r + A_2 t + A_3 p + A_4 q + A_5 - 2e^{2K} p a^2 - e^{2K} \frac{a}{c} \frac{\partial}{\partial u} (ac), \\ \frac{\partial^3 K}{\partial v^3} = B_1 t + B_2 r + B_3 q + B_4 p + B_5 - 2e^{2K} q c^2 - e^{2K} \frac{c}{a} \frac{\partial}{\partial v} (ac), \end{array} \right.$$

où l'on a

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -2 \frac{a}{c} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{c}{a} \right), \\ A_2 = -\frac{a^2}{c^2} n - \frac{a}{c} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a}{c} \right), \\ A_3 = -\frac{a^2}{c^2} \left(m^2 + \frac{\partial m}{\partial v} \right) - \frac{a}{c} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{c}{a} \right) - \frac{am}{c} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a}{c} \right), \\ A_4 = -\frac{a^2}{c^2} \left(mn + \frac{\partial n}{\partial v} \right) - \frac{an}{c} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a}{c} \right) - \frac{a}{c} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{a}{c} \right), \\ A_5 = -\frac{a^2}{c^2} \left(ml + \frac{\partial l}{\partial v} \right) - \frac{a}{c} l \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a}{c} \right) + \frac{a}{c} \frac{\partial}{\partial u} (ac). \end{array} \right.$$

Les A_i ne dépendent ni de K ni des dérivées de K .

En permutant $u, v; r$ et $t; p$ et $q; m$ et n , on déduit de chaque expression A_i l'expression B_i de même indice. Bien entendu, en vertu de E, r et t ne sont pas indépendantes et les expressions (31) pourraient être modifiées de forme : on les obtient sous la forme du texte en suivant servilement le procédé. On voit aisément que E_2 est équivalente à ce que l'on obtient en égalant $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^3 K}{\partial u^3} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^3 K}{\partial u^2 \partial v} \right)$. On obtient donc

une équation un peu longue :

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & m \frac{\partial^3 \mathbf{K}}{\partial u^3} + \left(2 \frac{\partial m}{\partial u} + mn \right) r + p \frac{\partial}{\partial u} \left(mn + \frac{\partial m}{\partial u} \right) \\
 & + \left(n^2 + \frac{\partial n}{\partial u} \right) (mp + nq + l) + q \frac{\partial}{\partial u} \left(n^2 + \frac{\partial n}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(nl + \frac{\partial l}{\partial u} \right) \\
 & = \Lambda_1 \frac{\partial^3 \mathbf{K}}{\partial u^2 \partial v} + r \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v} + \Lambda_2 \frac{\partial^3 \mathbf{K}}{\partial v^3} + t \frac{\partial \Lambda_2}{\partial v} + \Lambda_3 (mp + nq + l) \\
 & + p \frac{\partial \Lambda_3}{\partial v} + \Lambda_4 t + q \frac{\partial \Lambda_4}{\partial v} + \frac{\partial \Lambda_5}{\partial v} - 4 e^{2\mathbf{K}} pq a^2 - 2 e^{2\mathbf{K}} a^2 (mp + nq + l) \\
 & - 4 e^{2\mathbf{K}} pa \frac{\partial a}{\partial v} - 4 e^{2\mathbf{K}} q \frac{a}{c} \frac{\partial}{\partial u} (ac) - e^{2\mathbf{K}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{a}{c} \frac{\partial}{\partial u} (ac) \right].
 \end{aligned}$$

Enfin dans (33), si l'on remplace les dérivées troisièmes de \mathbf{K} par les expressions (31), on obtient une équation linéaire en r, t . C'est cette équation définitive que j'appelle E_2 . J'appelle Δ le déterminant par rapport à r et t de E et E_2 ; ce déterminant est le même soit pour P_1 , soit pour P_2 .

Premier cas. — La surface S ne satisfait pas à l'équation $\Delta = 0$.

Alors le système E, E_1, E_2 peut être remplacé par

$$(34) \quad \begin{cases} r = f_1(u, v, \mathbf{K}, p, q), \\ s = mp + nq + l, \\ t = f_2(u, v, \mathbf{K}, p, q). \end{cases}$$

Nous devons former les équations

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial t}{\partial u} = 0.$$

La première est

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{K}} q + \frac{\partial f_1}{\partial p} (mp + nq + l) \\
 & + \frac{\partial f_1}{\partial q} f_2 - m f_1 - n (mp + nq + l) - p \frac{\partial m}{\partial u} - q \frac{\partial n}{\partial u} - \frac{\partial l}{\partial u} = 0.
 \end{aligned}$$

Or f_1 contient le terme $\frac{4}{\Delta} e^{2\mathbf{K}} \frac{a^3}{c} pq$ unique de son espèce; de même f_2 contient le terme $\frac{4}{\Delta} e^{2\mathbf{K}} \frac{c^3}{a} pq$; il en résulte que le terme $\frac{\partial f_1}{\partial q} f_2$ contient un terme en $e^{4\mathbf{K}} p^2 q$ qui ne se réduit pas.

Donc l'équation (35) est une équation du premier ordre, non identiquement satisfaite. De même $\frac{ds}{dv} - \frac{dt}{du} = 0$ contient un terme en $e^{2k}pq^2$ qui ne se réduit pas. Si ces deux équations du premier ordre sont distinctes, la fonction K , *en cas de compatibilité*, ne dépendra que de 1 ou 0 paramètre arbitraire. Les deux équations du premier ordre peuvent se réduire à une seule : ainsi chacune pourrait se réduire à $p^2q = 0$, $pq^2 = 0$ respectivement, de sorte qu'elles se réduiraient dans leur ensemble à une seule équation, $p = 0$, par exemple. Dans ce cas, la fonction K satisfaisant à une équation du second ordre et une équation du premier ordre ne pourrait dépendre que de deux constantes au plus.

Deuxième cas. — La surface S satisfait à l'équation $\Delta = 0$.

L'élimination simultanée de r, t entre E et E_2 étant faite, le terme en $e^{2k}pq$ ne peut disparaître, on obtient donc une équation du premier ordre en K ; K vérifie de plus E_1 , donc comme précédemment, en cas de compatibilité, K ne peut dépendre que de deux constantes au plus.

Donc, de toutes façons, s'il y a compatibilité, K ne peut contenir que deux paramètres au plus, Les équations de compatibilité sont autant d'équations aux dérivées partielles que doivent vérifier a, c, R, R' , équations que l'on pourrait ensuite former en supposant l'équation de S mise sous la forme $z = f(x, y)$ et prenant x et y comme variables indépendantes. Nous allons voir immédiatement que les surfaces de révolution satisfont soit à P_1 , soit à P_2 ; nous verrons que certains hélicoïdes ou surfaces spirales donnent une solution soit de P_1 , soit de P_2 . Le fait intéressant est précisément que les surfaces de révolution donnent le maximum de paramètres.

9. Faisons la discussion complète dans le cas d'une surface de révolution (1). Je prends alors

$$(36) \quad d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2;$$

(1) Il suffit de discuter P_1 , car Σ étant la surface de révolution isothermique associée à S , le problème P_2 posé pour S est identique au problème P_1 posé pour Σ .

autrement dit, $a = 1$, $c = \sin u$. Les fonctions R et R' ne dépendent que de u , donc m est nul, et n est une fonction de u seul, qui est nulle si le rapport $\frac{R}{R'}$ est constant, qui n'est pas nulle si ce rapport n'est pas constant.

Supposons d'abord que $\frac{R}{R'}$ soit effectivement fonction de u , variable avec u . L'équation (E₁) est

$$(37) \quad s - \frac{U_1'}{U_1} q = 0,$$

où U_1 désigne une fonction connue de u , telle que U_1' soit non identiquement nulle. En prenant pour K une fonction U de u seulement, E_1 se trouve satisfaite et l'équation (E) devient une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$(38) \quad \frac{d}{du}(U' \sin u) + (e^{2U} - 1) \sin u = 0,$$

qui s'intègre aisément, avec deux constantes arbitraires ; nous l'intégrerons plus bas par des considérations géométriques et nous trouverons les surfaces de révolution S_1 annoncées dans l'introduction. Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas d'autre solution. En effet, l'intégrale générale de (37) est, avec deux fonctions arbitraires U de u , V de φ ,

$$(39) \quad K = U_1 V + U,$$

$V' = 0$ donne la solution indiquée déjà ; on va voir que $V' \neq 0$ conduit à une impossibilité. On a, en effet, si $V' \neq 0$,

$$(40) \quad \begin{cases} p = U_1' V + U', & q = U_1 V', & r = U_1'' V + U'', \\ s = U_1' V', & t = U_1 V'', \end{cases}$$

et l'équation (E) devient

$$(41) \quad (U_1'' V + U'') \sin u + \frac{U_1' V''}{\sin u} + (U_1' V + U') \cos u + (e^{2K} - 1) \sin u = 0.$$

Dérivons par rapport à φ et supposons $V' \neq 0$, on a

$$(42) \quad (U_1'' \sin u + U_1' \cos u) \frac{\sin u}{U_1'} + 2e^{2K} \sin^2 u + \frac{V'''}{V'} = 0.$$

Dérivons une seconde fois par rapport à ϱ : il vient

$$(43) \quad e^{2K} U_1 \sin^2 u + \frac{1}{4V'} \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{V'''}{V'} \right) = 0.$$

Dérivons par rapport à u : il vient

$$(44) \quad V + \frac{U'}{U_1} + \frac{1}{2U_1} + \frac{\cos u}{\sin u} \frac{1}{U_1} = 0,$$

égalité impossible puisque V est une fonction de ϱ non constante.

Si l'on suppose maintenant $\frac{R}{R'}$ constant, on trouve, naturellement, que K fonction de u seul convient encore, l'équation (38) résout toujours la question. Mais nous allons trouver une autre solution. En effet, l'équation (E₁) est alors

$$(45) \quad s = 0,$$

d'où l'on déduit $K = U + V$, U fonction de u seul et ϱ de V seul. L'équation (E) s'écrit

$$(46) \quad \sin u \frac{\partial}{\partial u} (U' \sin u + \cos u) + e^{2K} \sin^2 u + V'' = 0.$$

Dérivons en ϱ : on a

$$(47) \quad V''' + e^{2V} e^{2U_2} V' \sin^2 u = 0.$$

Dérivons en u : on obtient

$$(48) \quad V' \frac{d}{du} (e^U \sin u) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux : $V' = 0$ donne la solution déjà rencontrée ; puis on a à essayer

$$(49) \quad e^U \sin u = C,$$

où C est une constante, et cela entraîne

$$(50) \quad U' \sin u + \cos u = 0.$$

L'équation (46) se réduit alors à

$$(51) \quad V'' + e^{2V} C^2 = 0,$$

qui ne contient plus que V ; donc nous avons trouvé une nouvelle solution K et par suite une autre série de surfaces correspondant à la surface de révolution donnée. Nous allons développer complètement les calculs.

10. Soit d'abord le cas d'une surface de révolution S *quelconque*, c'est-à-dire dont le rapport des rayons de courbure principaux n'est pas nécessairement constant. On a trouvé pour les images sphériques de S et S_1 ,

$$(52) \quad \begin{cases} d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2, \\ d\sigma_1^2 = k^2 (du^2 + \sin^2 u dv^2), \end{cases}$$

k ne dépendant que de u , la seconde forme du $d\sigma^2$ montre que les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, forment encore un système de parallèles et méridiens. On peut donc écrire aussi

$$(53) \quad d\sigma_1^2 = du_1^2 + \sin^2 u_1 dv_1^2,$$

où u_1 est fonction de u seul, v_1 de v seul et l'on retrouve un résultat classique où la sphère est en représentation conforme sur elle-même avec conservation des méridiens parallèles. On a

$$(54) \quad \begin{cases} k = \frac{du_1}{du}, \\ \frac{\sin u_1 du}{\sin u du_1} = \frac{dv}{dv_1}. \end{cases}$$

Chacun des rapports de la seconde équation (54) est donc une constante; on aura donc, C et C_1 , étant des constantes (1) :

$$(55) \quad \begin{cases} v_1 = Cv, \\ \text{tang} \frac{u_1}{2} = C_1 \text{tang} \frac{u}{2}, \\ k = \frac{CC_1 \text{tang}^{C-1} \frac{u}{2} \left(1 + \text{tang}^2 \frac{u}{2}\right)}{1 + C_1^2 \text{tang}^{2C} \frac{u}{2}}. \end{cases}$$

(1) Pour $C = C_1 = 1$, la surface S_1 coïncide avec S . Pour $C = 1$, $C_1 \neq 1$, la sphère est soumise à une inversion dont le pôle est sur Oz .

L'intégrale générale de l'équation (38) est $U = \log k$. Les formules (12) donnent ensuite pour λ une fonction de u seul par la quadrature

$$(56) \quad \log \lambda = \int \frac{R}{R'} d(\log k).$$

On a ensuite

$$(57) \quad R_1 = R \frac{\lambda}{k}, \quad R'_1 = R' \frac{\lambda}{k}.$$

Ces formules montrent que la surface S_1 , dont la représentation sphérique se compose de méridiens et parallèles, est, par suite, soit surface de révolution, soit surface moulure; elle est en réalité surface de révolution puisque R_1 et R'_1 sont fonctions de u seul. Pour achever aisément les calculs qui doivent donner S_1 , prenons pour Oz l'axe de révolution de S et définissons la méridienne de S comme enveloppe de la droite

$$(58) \quad x \sin u + z \cos u = p,$$

où p est une fonction de U . On a

$$(59) \quad \begin{cases} R' = p + p' \cot u, \\ R = p + p'', \\ R = R' + \frac{dR'}{du} \operatorname{tang} u. \end{cases}$$

Or on vient de calculer u_1 , R_1 , R'_1 en fonction de u . La méridienne de S_1 est donc enveloppe de la droite

$$(60) \quad x \sin u_1 + z \cos u_1 = p_1,$$

où p_1 se calcule par la formule

$$(61) \quad p_1 = \cos u_1 \int \frac{R'_1 \sin u_1 du_1}{\cos^2 u_1},$$

la constante introduite par la quadrature (61) ne faisant que glisser S_1 le long de Oz . Donc ici la surface S , supposée de révolution, étant donnée, il a suffi de deux quadratures pour obtenir une surface S_1 , également de révolution correspondant à S par P_1 et dépendant de deux paramètres de forme.

Une quadrature fait connaître la surface de révolution Σ isother-

mique associée de S; en effet, la méridienne de Σ est enveloppe de la droite

$$(62) \quad x \sin u + z \cos u = \pi,$$

et l'on doit avoir

$$(63) \quad \frac{\pi + \pi''}{\pi + \pi' \cot u} + \frac{\rho + \rho''}{\rho + \rho' \cot u} = 0.$$

Si l'on pose $\pi = \rho \cos u$, cette équation devient

$$(64) \quad \frac{\rho''}{\rho'} + \frac{R}{R'} \cot u - 2 \operatorname{tang} u = 0.$$

En tenant compte de la dernière formule (59) on a

$$\frac{R}{R'} \cot u = \cot u + \frac{1}{R'} \frac{dR'}{du},$$

donc on peut prendre

$$(65) \quad \pi = \cos u \int \frac{du}{R' \sin u \cos^2 u}.$$

Par suite, la surface Σ_1 isothermique associée de S_1 a pour méridienne l'enveloppe de la droite

$$(66) \quad x \sin u_1 + y \cos u_1 = \cos u_1 \int \frac{du_1}{R'_1 \sin u_1 \cos^2 u_1}.$$

Cette surface Σ_1 s'obtient à partir de S par deux quadratures, dont l'une est celle qui a déjà servi pour S_1 , à savoir la quadrature (56) qui donne λ . On remarquera que les rayons de courbure principaux de Σ , homologues respectivement de R et R', sont

$$(67) \quad -\frac{R}{R'} \times \frac{1}{R' \sin^2 u} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R' \sin^2 u}.$$

11. Supposons maintenant la surface S non seulement de révolution, mais encore telle que $\frac{R}{R'}$ soit une constante numérique α . La valeur de α détermine, à une homothétie près, indifférente ici, la surface S : la méridienne s'obtient en résolvant le problème classique : une droite Oz étant donnée dans le plan, trouver une courbe de ce plan telle que la normale en M coupant Oz en N et touchant son enve-

loppe en C, le rapport $\frac{MC}{MN}$ soit constant en grandeur et signe. La surface S_1 , déterminée précédemment est de révolution et est caractérisée par la même valeur constante du rapport $\frac{R}{R'}$, donc elle coïncide avec S, mais non point pour point : la surface S admet donc ∞^2 auto-représentations conformes du type P_1 . La surface Σ correspond à une valeur constante également du rapport $\frac{R}{R'}$ égale à $(-\alpha)$ au lieu de α .

Une valeur entière positive impaire ou négative paire donne une surface S algébrique; dans ce cas, chaque valeur commensurable de C donne une transformation algébrique de la surface S. Les résultats du paragraphe 4 permettent, sans calculer le ds^2 , de former aisément les équations des lignes de longueur nulle et des asymptotiques; en effet, on a

$$A = \alpha R, \quad C = cR', \quad \alpha = 1, \quad c = \sin u.$$

On en déduit

$$(68) \quad \frac{A}{C} = \frac{\alpha}{\sin u},$$

puis

$$(69) \quad \begin{aligned} D &= A^2 C \alpha, & D'' &= A C^2 c, \\ \frac{D}{D''} &= \frac{\alpha}{\sin^2 u}. \end{aligned}$$

Les lignes de longueur nulle ont pour équation

$$(70) \quad \frac{\alpha^2 du^2}{\sin^2 u} + dv^2 = 0$$

Pour α entier positif impair ou négatif pair elles sont donc algébriques. Les lignes asymptotiques ont pour équation

$$(71) \quad \frac{\alpha du^2}{\sin^2 u} + dv^2 = 0.$$

Quand α est négatif, elles sont réelles et toujours transcendentes; quand α est positif et carré d'un nombre impair, elles sont algébriques.

Il reste maintenant à voir pour ces surfaces ce que l'on trouve avec la solution $K = e^{u+v}$ spéciale à ce cas où $\frac{R}{R'}$ est constant. Ce qui précède rend intuitif le résultat : en effet, nous avons vu que pour la surface

de révolution définie par $\frac{R}{R'} = \alpha$ (R rayon de courbure du méridien, R' de la section normale tangente ou parallèle), un choix convenable de paramètre ramène l'équation des lignes de longueur nulle à la forme

$$(72) \quad \alpha^2 d\xi^2 + d\eta^2 = 0,$$

tandis que l'équation des asymptotiques est ramenée à la forme

$$(73) \quad \begin{aligned} & \alpha d\xi^2 + d\eta^2 = 0, \\ & \left(\text{on a } \xi = \log \operatorname{tang} \frac{u}{2}, \quad \eta = v \right). \end{aligned}$$

Mais alors, pour la surface de révolution correspondant à la valeur $\frac{1}{\alpha}$ du rapport $\frac{R}{R'}$, on aurait les équations semblables

$$(74) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1^2}{\alpha^2} + d\eta_1^2 = 0, \\ \frac{d\xi_1^2}{\alpha} + d\eta_1^2 = 0, \end{cases}$$

et une correspondance

$$(75) \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta, \\ \eta_1 = \xi \end{cases}$$

conserve à la fois les lignes de longueur nulle et les asymptotiques. Les parallèles de l'une des surfaces ont alors pour homologue les méridiens de l'autre et inversement.

Les formules (72), (73) suffisaient encore pour mettre en évidence les ∞^2 auto-correspondances P_1 de la surface S , définies par

$$(76) \quad \begin{cases} \xi = \rho \xi' + \sigma, \\ \eta = \rho \eta' + \sigma', \end{cases}$$

où ρ, σ, σ' sont trois constantes arbitraires, dont σ' est négligeable puisqu'elle ne fait que faire tourner la surface autour de son axe d'un angle constant pour chaque point et que nous négligeons une similitude ou un déplacement : ceci est conforme aux résultats du texte. Et alors pour la surface $\frac{R}{R'} = \alpha$ et la surface $\frac{R}{R'} = \frac{1}{\alpha}$ la composition des formules (75) et (76) donnent les ∞^2 correspondances P_1 qui les

relient; la surface $\frac{R}{R'} = -\frac{1}{\alpha}$ est donc aussi susceptible d'être mise en correspondance P_2 avec la surface $\frac{R}{R'} = \alpha$ et cela de ∞^2 façons.

Les résultats analytiques du paragraphe 9 conduisent au même résultat; d'abord pour la surface $\frac{R}{R'} = \alpha$ la méridienne est l'enveloppe de la droite

$$(77) \quad x \sin u + z \cos u = \int \frac{\sin^\alpha u}{\cos^2 u} du$$

et l'on a

$$(78) \quad R = \alpha \sin^{\alpha-1} u, \quad R' = \sin^{\alpha-1} u.$$

Au paragraphe 9 on a obtenu

$$(79) \quad \begin{cases} \log k = U + V, \\ e^U \sin u = C, \quad V'' + e^{2V} C^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation $V'' + e^{2V} C^2 = 0$ donne en multipliant par $2V'$ et intégrant

$$V'^2 + e^{2V} C^2 = C_1^2,$$

où C_1 désigne une nouvelle constante, de sorte qu'il suffit d'intégrer le système

$$(80) \quad \begin{cases} V'' = V'^2 - C_1^2, \\ e^{2V} = -\frac{V''}{C^2} \end{cases}$$

dont la première équation fournit par une équation du premier ordre la fonction V' tandis que la dernière donne ensuite V sans nouvelle intégration. On trouve ainsi

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \frac{C_1}{C \operatorname{ch} C_1(\varphi - \varphi_0)}, \\ k = \frac{C_1}{\sin u \operatorname{ch} C_1(\varphi - \varphi_0)}, \\ d\sigma_1^2 = \frac{C_1^2 du^2}{\sin^2 u \operatorname{ch}^2 C_1(\varphi - \varphi_0)} + \frac{C_1^2 d\varphi^2}{\operatorname{ch}^2 C_1(\varphi - \varphi_0)}, \\ \lambda = \frac{C_1}{\sin^\alpha u \operatorname{ch}^{\frac{1}{\alpha}} C_1(\varphi - \varphi_0)}, \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{1}{\sin^{\alpha-1} u \operatorname{ch}^{\frac{1}{\alpha}-1} C_1(\varphi - \varphi_0)}, \\ R_1 = \frac{\alpha}{\operatorname{ch}^{\frac{1}{\alpha}-1} C_1(\varphi - \varphi_0)}, \quad R'_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{1}{\alpha}-1} C_1(\varphi - \varphi_0)}. \end{array} \right.$$

Si nous posons

$$(82) \quad \begin{cases} u_1 = C_1 \log \operatorname{tang} \frac{u}{2}, \\ \sin v_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} C_1 (v - v_0)}, \\ \cos v_1 = \frac{\operatorname{sh} C_1 (v - v_0)}{\operatorname{ch} C_1 (v - v_0)}, \end{cases}$$

les formules se modifient et deviennent

$$(83) \quad \begin{cases} d\sigma_1^2 = du_1^2 \sin^2 v_1 + dv_1^2, \\ R_1 = \alpha \sin^{\frac{1}{\alpha}-1} v_1, \quad R'_1 = \sin^{\frac{1}{\alpha}-1} v_1, \end{cases}$$

ce qui caractérise bien une surface de révolution dont le rapport des rayons principaux $\frac{R'_1}{R_1}$, en divisant le rayon du méridien par le rayon de la section normale tangente ou parallèle, est égal à $\frac{1}{\alpha}$. Dans la correspondance de cette surface avec la première, il y a bien transformation de parallèles en méridiens et inversement.

12. Le cas le plus simple, après les surfaces de révolution, serait celui des surfaces pour lesquelles le rapport des rayons de courbure $\frac{R}{R'}$ est une constante α . Pour le problème P₁, l'équation E' se réduit à $s = 0$. Pour le problème P₂, l'équation E'' se réduit à

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) s + \frac{2}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log a - 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log c = 0,$$

qui est aussi immédiatement intégrable. Le déterminant Δ se réduit ici à $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left(\frac{a}{c}\right)$; or il ne peut être nul ici, car en dehors des surfaces minima ou des surfaces de révolution il n'y a aucune surface jouissant à la fois de la propriété d'avoir sa représentation sphérique isotherme et le rapport de ses rayons de courbure principaux constants. Il en résulte que l'on ne pourrait avoir, en cas de compatibilité qu'une constante arbitraire pour K; mais les calculs, même dans cette hypothèse très simple, deviennent impraticables. D'ailleurs, en dehors des surfaces minima et des surfaces de révolution, il n'y a aucune surface

jouissant de la double propriété d'être isothermique et d'avoir le rapport de ses rayons de courbure principaux constant; donc ici P_1 et P_2 sont distincts.

13. Il est assez naturel de passer en revue quelques surfaces classiques, et de chercher si P_1 ou P_2 sont possibles avec une de ces surfaces. Il est indiqué de s'adresser aux hélicoïdes et aux surfaces spirales. Avec un choix particulier de courbes coordonnées, autres que leurs lignes de courbure, le ds^2 de ces surfaces a une forme particulièrement simple, en même temps que l'équation des asymptotiques. C'est ce système de coordonnées que nous adopterons.

Soit par exemple une surface spirale S : j'adopte les notations de Darboux, *Théorie des surfaces*, Tome I, seconde édition, page 149; on a pour définir la surface

$$(84) \quad \begin{cases} X = r e^v \cos(\omega + h v), \\ Y = r e^v \sin(\omega + h v), \\ Z = z e^v, \end{cases}$$

h étant une constante; z , r , ω sont des fonctions de u satisfaisant aux équations

$$(85) \quad \begin{cases} U^2 = r^2(1 + h^2) + z^2, \\ 0 = z z' + r r' + h r^2 \omega', \\ U^2 = r^2 \omega'^2 + z'^2 + r'^2, \end{cases}$$

où U est une fonction de u ; le ds^2 de cette surface est

$$(86) \quad ds^2 = U^2 e^{2v} (du^2 + dv^2).$$

On voit aisément que l'on a

$$(87) \quad z^2 + z'^2 = U^2 - \frac{U'^2}{h^2},$$

puis

$$(88) \quad r^2 = \frac{U^2 - z^2}{1 + h^2}, \quad r^2 \omega' = - \frac{h z z' + \frac{1}{h} U U'}{h^2 + 1};$$

de sorte qu'il suffit de calculer z au moyen de U par (87) quand h est donné.

Au moyen de (84), en tenant compte des équations (85), on trouve facilement

$$(89) \left\{ \begin{aligned} \frac{D''}{e^{3\nu}} &= (1-h^2)r^2(z\omega' - hz') - 2hr(r'z - rz') + z(hrr' - r^2\omega') \\ &= hz'U^2, \\ \frac{D'}{e^{3\nu}} &= r(z\omega' - hz')(r' - rh\omega') - (r'z - rz')(r'h + r\omega') + z'(hrr' - r^2\omega') \\ &= -hzU^2, \\ \frac{D}{e^{3\nu}} &= r(z\omega' - hz')(r'' - r\omega'^2) - (2r'\omega' + r\omega'')(r'z - rz') + (hrr' - r^2\omega')z''. \end{aligned} \right.$$

La première forme de D' ou D'' s'obtient d'après (84) et, en ordonnant le résultat comme fonction linéaire de z et z' , on arrive sans effort d'après (85) à la seconde forme de D' ou D'' . Pour D le calcul analogue serait pénible, il suffit d'exprimer $DD'' - D'^2$ au moyen de l'élément linéaire pour avoir aussitôt, si $z' \neq 0$,

$$(90) \left\{ \begin{aligned} \frac{DD'' - D'^2}{e^{6\nu}} &= U^4(U'^2 - UU''), \\ \frac{D}{e^{3\nu}} &= \frac{(U'^2 - UU' + h^2z^2)U^2}{hz'}. \end{aligned} \right.$$

L'équation des lignes asymptotiques est donc finalement

$$(91) \quad [U'^2 - UU'' + h^2z^2] du^2 - 2h^2zz' dudv + h^2z'^2 dv^2 = 0.$$

On écartera toute fonction V satisfaisant à $U'^2 - UU'' = 0$, car on aurait simplement une développable; de plus ici la condition pour obtenir une surface minima est, d'après (91) et la forme du ds^2 ,

$$U'^2 - UU'' + h^2(z^2 + z'^2) = 0$$

ou

$$(92) \quad (h^2U - U'')U = 0.$$

On écartera le cas $U = Ae^{hu} + Be^{-hu}$, qui donnerait une surface minima, pour laquelle on connaît la solution complète.

Le cas $z' = 0$ entraîne $z = a$, puis $a^2 = U^2 - \frac{U'^2}{h^2}$ et par suite $U'' = h^2U$ de sorte que ce cas $z' = 0$ est encore à éliminer et que les

formules (90) et (91) peuvent être conservées. Pour $z' = 0$, la fraction qui donne D a ses deux termes nuls.

Considérons maintenant une seconde surface spirale S_1 définie avec les coordonnées curvilignes u_1, v_1 et les fonctions V_1, r_1, ω_1, z_1 de u_1 , avec une constante arbitraire h_1 : il n'y a donc qu'à recopier toutes les formules qui précèdent, de (84) à (92) en mettant partout l'indice 1, z_1' signifiant $\frac{dz_1}{du_1}$, V_1' signifiant $\frac{dV_1}{du_1}$, etc.

Si l'on établit entre les deux surfaces considérées la correspondance ponctuelle

$$(93) \quad u_1 = mu, \quad v_1 = mv,$$

nous avons déjà conservé les lignes de longueur nulle; si maintenant tenant compte de (93) on écrit que les asymptotiques se correspondent, on a manifestement les deux relations

$$(94) \quad \frac{U'^2 - UU'' + h^2 z^2}{U_1'^2 - U_1 U_1'' + h_1^2 z_1^2} = \frac{h^2 z z'}{h_1^2 z_1 z_1'} = \frac{h^2 z'^2}{h_1^2 z_1'^2}.$$

En joignant à (94) les équations

$$(95) \quad \begin{cases} z^2 + z'^2 = U^2 - \frac{U'^2}{h^2}, \\ z_1^2 + z_1'^2 = U_1^2 - \frac{U_1'^2}{h_1^2}, \end{cases}$$

on a quatre équations différentielles ordinaires qui déterminent complètement U, U_1, z, z_1 au moyen de u, u_1 et de certaines constantes arbitraires nouvelles, quand h, h_1 et m sont données. De (94) on déduit

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z'}{z_1'},$$

ou, en n'employant que la variable u ,

$$(96) \quad m \frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1}, \quad z_1 = C z^m,$$

où C est une constante. Remplaçant z_1 par cette valeur dans (94)

et (95), on a

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1^2 [U'^2 - UU''] C^2 m^2 z^{2m-2} = h^2 \left[\left(\frac{dU_1}{du} \right)^2 - U_1 \frac{d^2 U_1}{du^2} \right], \\ z^2 + z'^2 = U^2 - \frac{U'^2}{h^2}, \\ C^2 z^{2m-2} \left(U^2 - \frac{U'^2}{h^2} \right) = U_1^2 - \frac{1}{m^2 h_1^2} \left(\frac{dU_1}{du} \right)^2. \end{array} \right.$$

La constante C ne joue aucun rôle : la variation de C ne fait que multiplier par une même constante U_1, r_1, z_1 sans toucher à ω_1 ; on a une homothétie sur S_1 . Supposons donc désormais $C = 1$. Je pose

$$(98) \quad \frac{U'}{U} = \alpha, \quad \frac{1}{U_1} \frac{dU_1}{du} = \beta.$$

Si $m = 1$, on a à intégrer

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1^2 [U'^2 - UU''] = h^2 \left[\left(\frac{dU_1}{du} \right)^2 - U_1 \frac{d^2 U_1}{du^2} \right], \\ h_1^2 [h^2 U^2 - U'^2] = h^2 \left[h_1^2 U_1^2 - \left(\frac{dU_1}{du} \right)^2 \right], \end{array} \right.$$

en divisant membre à membre

$$(100) \quad \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} = \frac{\beta'}{\beta^2 - h_1^2};$$

la dernière équation (99) s'écrit

$$(101) \quad h_1^2 U^2 (\alpha^2 - h^2) = h^2 U_1^2 (\beta^2 - h_1^2),$$

et en prenant la dérivée logarithmique, et tenant compte de (98) et (100)

$$(102) \quad (\alpha - \beta) \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} \right) = 0.$$

La solution $\alpha' + \alpha^2 - h^2 = 0$ revient à $U'' = h^2 U$, $U_1'' = h_1^2 U_1$, ce qui donne des surfaces minima, c'est-à-dire un résultat non nouveau, que nous devons rejeter ; $\alpha = \beta$ entraîne $h = h_1$, $z = z_1$, les deux surfaces coïncident. Nous devons donc rejeter $m = 1$; si nous supposons

$m \neq 1$, on déduit de (97) (toujours avec $C = 1$)

$$\frac{U'^2 - UU''}{h^2 U^2 - U'^2} = \frac{\left(\frac{dU_1}{du}\right)^2 - U_1 \frac{d^2 U_1}{du^2}}{m^2 h_1^2 U_1^2 - \left(\frac{dU_1}{du}\right)^2}$$

ou

$$(103) \quad \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} = \frac{\beta'}{\beta^2 - m^2 h_1^2},$$

ce qui donne, avec une constante k arbitraire,

$$(104) \quad \frac{\beta - mh_1}{\beta + mh_1} = k \left(\frac{h - \alpha}{\alpha + h}\right)^{\frac{mh_1}{h}}.$$

Nous supposons désormais β remplacé toujours par cette expression au moyen de α . La dernière équation (97) donne

$$(97') \quad h_1^2 m^2 z^{2m^2} U^2 (\alpha^2 - h^2) = h^2 U_1^2 (\beta^2 - m^2 h_1^2);$$

en prenant la dérivée logarithmique, on a, grâce à (103),

$$(105) \quad (m-1) \frac{z'}{z} = (\beta - \alpha) \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2}\right).$$

Grâce à cette équation, la seconde équation (97) donne

$$(106) \quad z^2 \left[1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{m-1}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2}\right)^2\right] = \frac{U^2}{h^2} (h^2 - \alpha^2).$$

En prenant la dérivée logarithmique de (106) et remplaçant $\frac{z'}{z}$ par la valeur déduite de (105), on a manifestement une équation différentielle du second ordre entre u et α ; quand α a été obtenu, on a

$U = e^{\int \alpha du}$, cette nouvelle quadrature n'introduit qu'une homothétie négligeable sur S ; on calcule β par (104), z par (106); sans quadrature, l'équation (97') donne U_1 ; tenant compte de $u_1 = mu$, les calculs sont terminés. En dérivant logarithmiquement (106), on voit qu'on a le facteur $1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2}$ dans les deux membres: on doit le rejeter parce qu'il donnerait une surface minima. L'équation à intégrer

est donc

$$(107) \quad \frac{\beta - \alpha}{m-1} + \frac{\frac{(\beta - \alpha)(\beta' - \alpha')}{(m-1)^2} \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2}\right) + \left(\frac{\beta - \alpha}{m-1}\right)^2 \frac{(\alpha^2 - h^2)\alpha'' - 2\alpha\alpha'^2}{(\alpha^2 - h^2)^2}}{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{m-1}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2}\right)^2} = \alpha$$

et cette équation (107) ne peut être vérifiée par une intégrale de $1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} = 0$ que si $\beta = m\alpha$, ce qui, en vertu de (103), exige $h = h_1$; mais de toutes façons (107) a des intégrales qui n'annulent pas $1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2}$; à chacune d'elles correspond un couple bien déterminé.

Pour obtenir une nappe réelle de surface, il faut et il suffit que α , d'après (106), soit compris entre $+h$ et $-h$: en intégrant (107), on prendra la valeur initiale α_0 pour $u = u_0$ comprise dans cet intervalle, et l'on aura une nappe S réelle et, par suite, une nappe S_1 réelle. Les surfaces S , S_1 ainsi obtenues dépendent des constantes arbitraires h , h_1 , m , k , α_0 , α'_0 .

La méthode suivie ne décide pas si la surface spirale la plus générale, qui dépend d'une fonction U complètement arbitraire, est susceptible d'être mise en correspondance P_1 avec une autre surface, spirale ou non.

Elle n'indique pas non plus le nombre exact de paramètres (0, 1 ou 2) dont dépend la surface (spirale ou non), associée par P_1 à la surface spirale trouvée ici. Mais la méthode suivie ici a donné des surfaces, solutions essentiellement nouvelles de P_1 , car elles ne sont ni de révolution ni surfaces minima (¹): elle ne nous a donné que *deux* surfaces spirales associées dépendant de six constantes (auxquelles on doit adjoindre les paramètres de la similitude générale).

14. Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver deux hélicoïdes en correspondance P_1 (ou P_2).

Je rappelle quelques résultats qui me serviront dans cette question et surtout dans celle qui sera traitée au paragraphe suivant. Les ex-

(¹) Elles ne sont pas non plus isothermiques, car en exprimant ce fait on trouve une équation différentielle du second ordre en α qui ne renferme en dehors de h qu'une constante arbitraire et, par suite, ne coïncide pas avec l'équation (107).

pressions U, r, z, ω étant supposées fonctions de u, h et m étant des constantes numériques, je définis un hélicoïde S et son ds^2 par les formules

$$(108) \quad \begin{cases} X = r \cos(v + \omega), \\ Y = r \sin(v + \omega), \\ Z = h v + z; \end{cases}$$

$$(109) \quad ds^2 = U^2(du^2 + m^2 dv^2),$$

pourvu que soient vérifiées les relations

$$(110) \quad \begin{cases} r'^2 + r^2 \omega'^2 + z'^2 = U^2, \\ r^2 + h^2 = U^2 m^2, \\ r^2 \omega' + h z' = 0. \end{cases}$$

Comme au paragraphe précédent, on trouve pour équation des asymptotiques

$$(111) \quad [m^4(U'^2 - UU'') + h^2] du^2 - 2hm^2 z' du dv + m^4 z'^2 dv^2 = 0.$$

On écarte l'hypothèse $U'^2 - UU'' = 0$ qui ne donnerait qu'une développable, et l'hypothèse $U - m^2 U'' = 0$ qui donnerait un hélicoïde minimum, surface pour laquelle le problème a été déjà complètement résolu.

Avec les fonctions U_1, r_1, z_1, ω_1 du paramètre u_1 et les constantes h_1, m_1 , en recopiant les équations (108), (109), (110) nous aurions un hélicoïde S_1 , à condition de mettre partout l'indice 1.

La correspondance ponctuelle

$$u_1 = u, \quad m_1 v_1 = m v$$

conserve les lignes de longueur nulle; en écrivant que les lignes asymptotiques se conservent, nous avons deux équations différentielles nouvelles à écrire, qui, jointes aux équations (110) relatives à S et analogues relatives à S_1 , forment huit équations différentielles par rapport aux huit fonctions inconnues de u que nous considérons ici, à savoir $U, r, z, \omega; U_1, r_1, z_1, \omega_1$. Pour faire le calcul, on remarque d'abord qu'on peut éliminer ω', r entre les trois relations (110) de façon finalement à ne conserver que les quatre fonctions inconnues

U, U_1, z, z_1 , liées par les quatre équations

$$(112) \quad \begin{cases} \frac{m^4(U'^2 - UU'') + h^2}{m_1^4(U_1'^2 - U_1 U_1'') + h_1^2} = \frac{h m z'}{h_1 m_1 z_1'} = \frac{m^2 z'^2}{m_1^2 z_1'^2}, \\ m^2 z'^2 = m^2 U^2 - m^4 U'^2 - h^2, \\ m_1^2 z_1'^2 = m_1^2 U_1^2 - m_1^4 U_1'^2 - h_1^2, \end{cases}$$

z' représente $\frac{dz}{du}$, z_1' représente $\frac{dz_1}{du_1}$ ou $\frac{dz_1}{du}$.

On aperçoit aisément que l'on a

$$m h_1 z = m_1 h z_1,$$

de sorte que les trois rapports égaux d'après la première équation (112) sont égaux à $\frac{h^2}{h_1^2}$; si l'on introduit les quantités

$$\frac{U'}{U} = \alpha, \quad \frac{U_1'}{U_1} = \beta,$$

on sera conduit, en suivant la même marche qu'au paragraphe précédent, aux relations

$$(113) \quad \begin{cases} \frac{m^2 \alpha'}{\alpha^2 m^2 - 1} = \frac{m_1^2 \beta'}{\beta^2 m_1^2 - 1}, \\ (\alpha - \beta) \left(1 + \frac{m^2 \alpha'}{\alpha^2 m^2 - 1} \right) = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'en prenant $\alpha = \beta$ on aurait $m = \pm m_1$ et les deux hélicoïdes seraient simplement en relation de similitude, tandis qu'en prenant

$$(114) \quad m^2 (\alpha' + \alpha^2) - 1 = 0,$$

on a simplement

$$(115) \quad m^2 U'' - U = 0,$$

et l'on retombe sur l'hélicoïde minimum. Donc, sans conduire à un échec, la méthode ne nous donne rien de nouveau, tandis que dans le cas de deux surfaces spirales elle avait donné des couples effectivement nouveaux; appliquée à une surface spirale et à un hélicoïde, nous verrons au paragraphe suivant qu'elle réussit. De même, appli-

quée à P_2 , la méthode réussit sans restrictions pour des surfaces soit spirales, soit hélicoïdales.

Nous pouvons remarquer que dans ce cas de deux hélicoïdes nous avons en réalité introduit une condition non strictement nécessaire pour P_1 : sur S ou S_1 , il y a un réseau qui peut se transformer en les méridiens et en les parallèles d'une surface de révolution, nous avons considéré le cas où ces réseaux de S et S_1 se correspondent en même temps que les lignes de longueur nulle et les asymptotiques; nous avons reconnu qu'il y a une solution, constituée par deux hélicoïdes minimum, satisfaisant à cette nouvelle condition (1).

Pour traiter le problème strictement réduit à P_1 , je reviens à la méthode du début; S et S_1 étant rapportées à leurs lignes de courbure (u, v) et (u_1, v_1) j'écris le tableau des formes quadratiques fondamentales de S et S_1

$$(116) \quad \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma dc^2 \dots \dots \dots a^2 du^2 + c^2 dv^2, \\ \Sigma dc dx \dots \dots \dots a^2 R du^2 + c^2 R' dv^2, \\ \Sigma dx^2 \dots \dots \dots a^2 R^2 du^2 + c^2 R'^2 dv^2, \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} S \\ S_1 \end{array} \end{array}$$

Les fonctions a, c, R, R' ne dépendent que de $u + v$ et a_1, c_1, R_1, R'_1 seulement de $u_1 + v_1$. Les hélicoïdes S et S_1 se correspondant par P_1 (ou P_2), u_1 est fonction de u et v_1 est fonction de v . Si $\frac{R}{R'}$ n'est pas une constante, $\frac{R_1}{R'_1}$ n'est pas une constante, donc $u_1 + v_1$ est fonction de $u + v$; si $\frac{R}{R'}$ est constant et s'il s'agit d'un hélicoïde qui n'est ni minimum ni surface de révolution, on voit aisément que $\frac{a}{c}$ ne peut être constant, donc en vertu de $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a}{c}$ on voit encore que $u_1 + v_1$ est fonction de $u + v$. Si donc on écrit

$$u_1 = f(u), \quad v_1 = \varphi(v), \quad u_1 + v_1 = \psi(u + v),$$

(1) Dans le cas de deux surfaces spirales, ou d'une surface spirale et d'un hélicoïde, j'ai aussi introduit une condition surabondante de même genre et obtenu néanmoins des solutions nouvelles.

on obtient par dérivation

$$\frac{du_1}{du} = \frac{dv_1}{dv} = \psi'(u + v);$$

de sorte que

$$u_1 = \alpha u + \beta, \quad v_1 = \alpha v + \gamma,$$

où α , β , γ sont des constantes; un simple changement de notations permet de supposer $u_1 = u$, $v_1 = v$. Nous obtenons donc pour les cinq fonctions a , c , R , R' , K un système de cinq équations différentielles ordinaires, en posant $u + v = \omega$, au lieu de cinq équations aux dérivées partielles; la méthode ne résout pas complètement la question pour un hélicoïde S ; autrement dit, elle ne décide pas s'il y a d'autres surfaces qu'un hélicoïde correspondant à l'hélicoïde *particulier* S que nous trouvons ici, mais elle montre du moins qu'un couple de *deux hélicoïdes* S et S_1 ne peut être choisi arbitrairement; chacun d'eux ne dépend que d'un nombre fini de constantes; la connaissance du premier hélicoïde S détermine complètement (sauf similitude) le second S_1 et la correspondance ponctuelle entre S et S_1 , car le second hélicoïde S_1 ne dépend que des constantes déjà utilisées pour obtenir S (tout ceci s'applique à P_1 aussi bien qu'à P_2). Les trois premières équations sont celles qui lient a , c , R , R' dans tous les cas, mais recopiées en posant $u + v = \omega$. On a ainsi

$$(117) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{a} \frac{dc}{d\omega} \right) + \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{c} \frac{da}{d\omega} \right) + ac = 0, \\ \frac{dR}{d\omega} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\omega} (R' - R), \\ \frac{dR'}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{dc}{d\omega} (R - R'). \end{cases}$$

Les deux dernières donnent manifestement le droit d'écrire, en faisant une similitude,

$$(118) \quad ac(R' - R) = 1.$$

L'équation déjà rencontrée (E) est ici

$$(E) \quad \frac{d}{d\omega} \left(\frac{a}{c} \frac{dK}{d\omega} \right) + \frac{d}{d\omega} \left(\frac{c}{a} \frac{dK}{d\omega} \right) + e^{2K} - 1) ac = 0,$$

si j'écris l'équation (E') spéciale à P₁,

$$(E') \quad \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'}\right) \frac{d^2 K}{dv^2} + \frac{d}{dv} \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'}\right) \frac{dK}{dv} = 0,$$

elle s'intègre manifestement et donne, avec une constante arbitraire A,

$$(119) \quad \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'}\right) \frac{dK}{dv} = A.$$

On en déduit aisément, en portant dans (E),

$$(120) \quad e^{2K} = 1 - \frac{A}{ac} \frac{d}{dv} \left[\frac{RR'}{R'^2 - R^2} \times \frac{a^2 + c^2}{ac} \right],$$

$$(121) \quad \frac{2ARR'}{R'^2 - R^2} = \frac{d}{dv} \log \left\{ 1 - \frac{A}{ac} \frac{d}{dv} \left[\frac{RR'}{R'^2 - R^2} \times \frac{a^2 + c^2}{a^2} \right] \right\}.$$

On pourra, si l'on veut, garder comme inconnues les fonctions a et R : la seconde équation (117) donne R' , l'équation (118) donne c , et en remplaçant dans la première équation (117) et dans (121) on n'a plus que deux équations différentielles entre a et R . Pour P₂ on remplacerait (E') par (E'') qui, cette fois, n'est pas immédiatement intégrable, mais on est encore ramené à un système différentiel.

15. Il est bien clair que la méthode va réussir encore pour associer par P₁ une surface spirale et un hélicoïde. Les deux surfaces auront pour ds^2 respectivement :

$$\begin{aligned} \text{Surface spirale.....} & \quad ds^2 = U^2 e^{2v} (du^2 + dv^2) \\ \text{Hélicoïde.....} & \quad ds^2 = U_1^2 (du^2 + dv^2) \end{aligned}$$

La correspondance ponctuelle est obtenue en associant les points de même u , v et il suffit d'écrire

$$(122) \quad \left\{ \begin{aligned} z^2 + z'^2 &= U^2 - \frac{U'^2}{h^2}, \\ z_1'^2 &= U_1^2 - U_1'^2 - h_1^2, \\ \frac{U'^2 - UU'' + h^2 z^2}{U_1'^2 - U_1 U_1'' + h_1^2} &= \frac{h^2 z z'}{h_1 z_1'} = \frac{h^2 z'^2}{z_1'^2}. \end{aligned} \right.$$

En écrivant toujours

$$\frac{U'}{U} = \alpha, \quad \frac{U_1'}{U_1} = \beta,$$

on trouve par la méthode analogue à celle des paragraphes précédents

$$(123) \left\{ \begin{aligned} & (\alpha' - \beta') (\alpha - \beta) \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} \right) \\ & + (\alpha - \beta)^2 \frac{(\alpha^2 - h^2) \alpha'' - 2\alpha\alpha'^2}{(\alpha^2 - h^2)^2} = \beta \left[1 + (\alpha - \beta)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} \right)^2 \right], \\ & \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = k \left(\frac{h - \alpha}{h + \alpha} \right)^{\frac{1}{h}}, \\ & U = e^{\int \alpha du}, \\ & z^2 = \frac{U^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{h^2} \right)}{1 + (\alpha - \beta)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha^2 - h^2} \right)^2}, \\ & z_1 = h_1 L z, \\ & U_1^2 = \frac{h_1^2}{h^2} \frac{h^2 - \alpha^2}{1 - \beta^2} \frac{U^2}{z^2}. \end{aligned} \right.$$

La première équation (123), en y remplaçant β par la valeur déduite de la seconde, est une équation différentielle du second ordre en α , dont on ne doit prendre que les intégrales n'annulant pas $\alpha' + \alpha^2 - h^2$; on a une nappe réelle en supposant α compris entre $-h$ et $+h$, ce qui est possible d'une infinité de façons. Les constantes arbitraires sont h, h_1, k et les deux constantes dont dépend α ; on a ainsi cinq paramètres (en dehors d'une similitude). Les surfaces ainsi trouvées ne sont pas isothermiques.

16. La méthode réussit encore si l'on veut associer par P_2 soit deux surfaces spirales, soit deux hélicoïdes, soit une surface spirale et un hélicoïde. En effet, le ds^2 de l'une de ces surfaces étant pris sous la forme $E(du^2 + dv^2)$, l'équation des lignes de courbure est

$$(124) \quad D'(dv^2 - du^2) + (D - D'') du dv = 0,$$

et d'autre part l'angle V des asymptotiques, conservé dans la repré-

sentation plane (u, v) est donné par la formule

$$(125) \quad \text{tang}^2 V = \frac{4(D'^2 - DD'')}{D + D''}.$$

S'il s'agit de deux surfaces spirales par exemple, on aura à écrire

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D - D''}{D'} = \frac{D_1 - D_1''}{D_1'}, \quad \frac{D'^2 - DD''}{D + D''} + \frac{D_1'^2 - D_1 D_1''}{D_1 + D_1''} = 0; \\ u_1 = mu, \quad v_1 = mv; \end{array} \right.$$

on a ainsi, en conservant les fonctions z et z_1 , quatre équations différentielles ordinaires entre U, U_1, z, z_1 et la variable indépendante u . On les intègre comme plus haut.

Très peu de chose à modifier s'il s'agit d'un hélicoïde et d'une surface spirale, ou de deux hélicoïdes; et comme par construction même, aucune des deux surfaces n'est de révolution, aucune ne peut être sphérique, donc l'autre n'est pas surface minima; le couple obtenu est donc essentiellement nouveau.

17. Ce qui précède montre que chacun des problèmes P_1 et P_2 admet comme solution un grand nombre de surfaces. Leur énumération complète semble un problème difficile.

M. Kinnoyuke Ogura a étudié (*Tohoku mathematical Journal*, 1917) cinq familles de courbes tracées sur une ou deux surfaces: lignes de longueur nulle, lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes de torsion, c'est-à-dire inclinées en chaque point à 45° sur les lignes de courbure; lignes caractéristiques, c'est-à-dire tangentes en chaque point à l'un des diamètres conjugués égaux de l'indicatrice de Dupin (j'emploie les termes de M. Ogura). Nous voyons que le problème P_1 se traduit par la conservation de ces cinq familles sur les deux surfaces.

Dans le problème P_2 , les lignes de longueur nulle, les lignes de courbure, les lignes de torsion se conservent; les asymptotiques s'échangent avec les lignes caractéristiques et inversement. M. Ogura a effleuré le problème P_2 au tome 9, 1918, des *Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society*. Il était donc intéressant de fournir des exemples précis de correspondances P_1 ou P_2 autres que

celles, déjà connues, fournies par les surfaces de révolution et les surfaces minima.

C'est ce que j'ai fait le premier dans ce Chapitre.

CHAPITRE II.

SURFACES MINIMA.

1. Les résultats obtenus au Chapitre précédent ont mis, dès le début, en évidence le rôle particulier d'une sphère ou d'une surface minima pour P_1 . La fonction λ se calcule immédiatement, on a $\lambda = k$ pour la sphère, $\lambda = \frac{1}{k}$ pour une surface minima. L'équation exprimant que $\log \lambda$ est donné par une intégrale de différentielle totale se trouve immédiatement satisfaite par la fonction k ; de sorte que k n'a plus qu'une équation aux dérivées partielles à vérifier, au lieu de deux; le raisonnement du paragraphe 5 s'applique sans modification et prouve que, réciproquement, à toute solution k de cette équation, correspond une surface, S_1 , associée.

Le cas de la sphère a été élucidé aussitôt : la surface associée est simplement la sphère et l'on a simplement à étudier les tracés géographiques de la sphère sur elle-même; tout revient somme toute à étudier l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Pour une surface minima S donnée, la surface S_1 est une surface minima *quelconque*; la représentation sphérique des lignes de courbure de la surface S est un réseau orthogonal isotherme; le problème revient à déterminer tous les réseaux orthogonaux isothermes de la sphère, de sorte que le problème revient encore à étudier l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Les surfaces minima constituent la solution la plus intéressante du problème que nous avons appelé P_1 . La méthode suivie au paragraphe précédent permet de retrouver sans effort un résultat déjà classique. Je me contente donc de l'exposer synthétiquement.

2. Les formules de Weierstrass, par exemple, montrent immédia-

tement que le ds^2 d'une surface minima S donnée se ramène à la forme

$$(1) \quad ds^2 = R(dx^2 + dy^2)$$

par les deux quadratures classiques qui donnent à la fois les lignes de courbure et les asymptotiques de la surface; R est la valeur absolue de chaque rayon principal au point de coordonnées x, y . Le $d\sigma^2$ de la représentation sphérique est alors

$$(2) \quad d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{R}.$$

Cette équation (2) permet d'indiquer la forme de la fonction R des deux variables x, y ; on trouve

$$(3) \quad R = (1 + X^2 + Y^2)(\xi^2 + \eta^2),$$

où X, Y est un premier couple de solutions adjointes de l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

et ξ, η un second couple. Mais cette forme de R ne nous servira pas. Les lignes de courbure de S ont pour équations $x = \text{const.}, y = \text{const.}$, les asymptotiques $x \pm y = \text{const.}$ La sphère est rapportée à un système orthogonal isotherme quelconque.

Une autre surface minima S_1 , également choisie arbitrairement, donnera

$$(5) \quad \begin{cases} ds_1^2 = R_1(dx_1^2 + dy_1^2), \\ d\sigma_1^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{R_1}. \end{cases}$$

La comparaison des équations (1), (2) et (5) montre immédiatement que notre problème *relatif* à S et S_1 est possible et admet pour solution générale, soit

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta, \\ y_1 = \alpha y + \gamma, \end{cases}$$

soit

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha y + \gamma, \\ y_1 = \alpha x + \beta, \end{cases}$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires.

[A titre d'indication, les fonctions k , λ du Chapitre précédent sont

$$k = \alpha \sqrt{\frac{R_1}{R}}, \quad \lambda = \alpha \sqrt{\frac{R}{R_1}},$$

et ceci fournit l'intégrale générale de l'équation (E) du Chapitre précédent attachée à la première surface S.]

Dans ce qui précède, on peut supposer S_1 distincte ou non de la première surface S.

Remarquons encore en passant qu'il y a une infinité de surfaces minima algébriques dont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sont aussi algébriques; pour deux telles surfaces, les correspondances indiquées sont algébriques.

3. Avec les notations de Weierstrass, on sait que l'équation différentielle des lignes de courbure ou des lignes asymptotiques d'une surface minima est respectivement

$$(8) \quad \begin{cases} F(u) du^2 - F_1(u_1) du_1^2 = 0, \\ F(u) du^2 + F_1(u_1) du_1^2 = 0 \end{cases}$$

(les variables u , u_1 étant conjuguées, F et F_1 étant des fonctions conjuguées).

Écrivons

$$(9) \quad \begin{cases} F(u) du^2 = CG(v) dv^2, \\ F_1(u_1) du_1^2 = CG_1(v_1) dv_1^2, \end{cases}$$

où C est une constante; la surface minima S_1 , obtenue en remplaçant respectivement

$$\begin{array}{l} \text{par} \\ \begin{array}{cccc} u, & u_1, & F(u), & F_1(u_1) \\ \varphi, & \varphi_1, & G(\varphi), & G_1(\varphi_1), \end{array} \end{array}$$

correspond évidemment à S avec conservation des lignes de courbure, des lignes asymptotiques et des angles, en associant au point (u, u_1) de S le point (φ, φ_1) de S_1 .

Si la surface S_1 est donnée en même temps que S, les équations (9) fournissent précisément le couple de valeurs (φ, φ_1) correspondant

à (u, u_1) et les explications qui précèdent ne sont au fond que la répétition de celles du paragraphe antérieur. On retrouve les trois paramètres et la seconde série de correspondances en prenant le second couple de fonctions G, G_1 susceptibles de représenter la surface S_1 .

Mais on peut, comme l'a fait M. Goursat aux *Acta mathematica* (t. XI, 1888), se placer à un point de vue un peu différent : on peut chercher à déterminer à la fois $\varphi, \varphi_1, G(\varphi), G_1(\varphi_1)$ et C de façon à obtenir *une* surface S_1 et *un* mode de correspondance (parmi les deux ∞^3 de modes reliant S à S_1) jouissant de propriétés remarquables. M. Goursat a ainsi découvert un mode intéressant de transformation réelle à trois paramètres susceptibles de s'appliquer à l'ensemble des surfaces minima. J'ai de mon côté (*Comptes rendus*, 2 novembre 1920; *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1921 et 1922) signalé une transformation s'appliquant à *une* surface minima arbitraire. J'ai même ensuite appliqué au couple S, S_1 que j'obtiens la transformation de M. Goursat, de façon à *composer* les deux résultats. J'expose rapidement l'un et l'autre procédé.

4. Je me borne, pour simplifier, aux surfaces minima réelles : il est donc entendu que u_1 est conjuguée de u , $F_1(u_1)$ conjuguée de $F(u)$; donc la donnée de u ou de $F(u)$ suffit pour calculer u_1 ou $F_1(u_1)$. De même pour φ et $\varphi_1, G(\varphi)$ et $G_1(\varphi_1)$.

Nous remarquons avec M. Goursat qu'une surface minima réelle est le lieu des milieux des cordes s'appuyant sur deux courbes minima conjuguées $(M), (M_1)$. Si l'ensemble de la figure subit un déplacement, la surface minima participe simplement au déplacement de $(M), (M_1)$; si le déplacement est réel, les deux courbes sont restées conjuguées, la surface reste réelle, égale à ce qu'elle était.

Imaginons maintenant que (M) subisse un déplacement imaginaire arbitraire; si (M_1) participe au même déplacement, elle cesse d'être imaginaire conjuguée de (M) , la surface cesse d'être réelle, mais reste égale à elle-même. Mais alors il est naturel, après avoir imprimé à (M) un déplacement imaginaire D , d'imprimer à (M_1) le déplacement conjugué D_1 ; (M) est devenue une autre courbe minima (M^p) , (M_1) la courbe minima (M_1^p) conjuguée de (M^p) ; un point M de (M) devient le point M^p de (M^p) ; je considère le milieu μ de MM_1 , il engendre une

surface minima réelle que j'appelle (MM_1) ; je fais correspondre à μ le milieu μ^{pp_1} de $M^pM_1^p$; ce point μ^{pp_1} engendre une nouvelle surface minima réelle que j'appelle $(M^pM^{p_1})$ et il est évident que, sur ces deux surfaces, les lignes de longueur nulle se correspondent. On constate aisément que les lignes de courbure et les asymptotiques se conservent; il suffit de se reporter à l'étude du déplacement sur la sphère de rayon unité et à l'étude du déplacement d'une courbe minima. En écrivant

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{mv + n}{pv + q}, \\ G(v) = \frac{(mq - np)^2}{(pv + q)^4} F\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right), \end{array} \right.$$

où m, n, p, q sont des constantes arbitraires réelles ou non, et les formules conjuguées pour $u, v, G,$ et $F,$ on définit la courbe (M) comme arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan

$$(11) \quad (1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 4f(u) = 0$$

avec

$$F(u) = \frac{d^3 f}{du^3}.$$

La courbe (M^p) est l'arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan

$$(12) \quad (1 - v^2)x + i(1 + v^2)y + 2vz + 4g(v) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(v) = \frac{d^3 g}{dv^3}, \\ g(v) = f\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right) \frac{(pv + q)^2}{mq - np}. \end{array} \right.$$

Le point M , ou u , de (M) a pour homologue le point M^p , ou v , de (M^p) donné par les formules (10) à (13).

On constate immédiatement que

$$(14) \quad G(v) dv^2 = F(u) du^2,$$

donc les équations (9) sont vérifiées avec $C = 1$; les asymptotiques et lignes de courbure sont donc conservées.

Cette transformation dépend des six constantes réelles nécessaires pour définir les rapports mutuels de m, n, p, q . Elle s'applique, si l'on veut, à l'ensemble infini de toutes les surfaces minima. Les coordonnées du point transformé d'un point d'une surface minima donnée s'obtiennent par des calculs algébriques; une surface minima algébrique reste algébrique.

On s'aperçoit aisément, avec M. Goursat, dont je résume les résultats, que le déplacement (10) sur la sphère peut être décomposé en deux : une rotation réelle autour d'un diamètre réel arbitraire de la sphère (3 paramètres) précédant ou suivant une rotation d'amplitude imaginaire pure autour d'un nouveau diamètre réel (3 paramètres) de la sphère. La rotation réelle n'a d'autre effet que de déplacer, sans déformation, l'une ou l'autre surface minima dans l'espace. On peut donc la négliger. Ayant donc donné la position du diamètre réel et l'amplitude imaginaire pure de la rotation autour de ce diamètre, nous choisirons ce diamètre pour Oz et les formules (10) ou (13) seront ramenées à la forme canonique

$$(15) \quad u = kv, \quad G(v) = k^2 F(kv), \quad g(v) = \frac{1}{k} f(kv),$$

où k est une constante réelle arbitraire, différente de ± 1 .

Si x, y, z sont les coordonnées d'un point de (MM_1) et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point correspondant de la surface adjointe où le plan tangent est parallèle, on sait que (x_0, y_0, z_0) s'obtiennent par des calculs algébriques et des différentiations quand la surface (MM_1) est donnée et que (x, y, z) est choisi sur cette surface. Le point correspondant sur $(M^p M_1^p)$ a pour coordonnées

$$(16) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+k^2}{2k} x - \frac{k^2-1}{2k} y_0, \\ y_1 = \frac{1+k^2}{2k} y + \frac{k^2-1}{2k} x_0, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Le diamètre qui a été pris pour Oz est celui que M. Goursat appelle

axe de dérivation : les sections des deux surfaces (MM_1) et $(M^pM_1^p)$ par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation se correspondent point par point de façon que les tangentes aux deux sections aux points correspondants soient parallèles.

La transformation de M. Goursat fait ainsi correspondre à chaque surface minima réelle $S \infty^3$ surfaces minima réelles S_1 correspondant à S avec conservation des angles, des lignes de courbure et des asymptotiques ; mais sur chaque couple S, S_1 nous n'avons envisagé qu'une des représentations conformes de S sur S_1 parmi les ∞^3 représentations, qui conservent aussi les lignes de courbure et les asymptotiques.

5. J'ai découvert moi-même une autre transformation intéressante des surfaces minima en étudiant les courbes à torsion constante (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1919, p. 266-270).

Soit A une courbe de torsion constante $\frac{1}{\tau}$, où τ est réel ; en un point a de A je porte sur la binormale dans chaque sens à partir de a la longueur τi ; j'obtiens ainsi deux points M et \bar{M} engendrant chacun une courbe minima (M) ou (\bar{M}) . Les plans osculateurs à (M) en M et à (\bar{M}) en \bar{M} se coupent suivant la droite $M a \bar{M}$; autrement dit, la binormale à la courbe A engendre une surface réglée admettant pour asymptotiques deux courbes minima et A pour ligne de striction. Réciproquement, si une surface réglée non développable admet parmi ses asymptotiques non rectilignes deux courbes minima (M) et (\bar{M}) , le milieu du segment $M\bar{M}$ intercepté sur chaque génératrice par ces deux asymptotiques engendre une courbe A à torsion constante ligne de striction de la surface réglée. De ces propriétés, que j'énonce simplement ici, résulte un moyen d'obtenir la courbe à torsion constante la plus générale ⁽¹⁾ et par suite toutes les surfaces applicables sur le paraboloidé

$$x^2 + y^2 = 2pz \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 2piz.$$

On voit que l'on peut partir d'une courbe minima (M) arbitraire ; on se

⁽¹⁾ Ici il est indifférent que la courbe A soit réelle ou non.

donne ensuite arbitrairement la constante réelle τ et l'on cherche la courbe (\bar{M}) ; la courbe *donnée* (M) est, comme plus haut, l'arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan

$$(17) \quad (1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 4f(u) = 0.$$

Pour obtenir la courbe *inconnue* (\bar{M}) , je calcule v au moyen de u par l'équation de Riccati

$$(18) \quad f'''(u) du + 2i\tau \frac{dv}{(v-u)^2} = 0.$$

Une fois déterminée l'intégrale $v(u)$ de l'équation (18), je calcule $g(v)$ par la formule

$$(19) \quad g(v) = \frac{(v-u)^2}{2} f''(u) + (v-u)f'(u) + f(u).$$

La courbe cherchée (\bar{M}) est l'arête de rebroussement de l'enveloppe du plan

$$(20) \quad (1 - v^2)x + i(1 + v^2)y + 2vz + 4\varphi(v) = 0.$$

Les courbes (\bar{M}) correspondant à une courbe donnée (M) dépendent de *deux* paramètres : la constante τ et la constante d'intégration entrant dans la fonction $v(u)$ intégrale de (18).

En différentiant (19) et tenant compte de (18), on trouve aisément $g'(v)$; en recommençant la même opération sur $g'(v)$, on a $g''(v)$, puis $g'''(v)$. On a ainsi

$$(21) \quad \begin{cases} g(v) = \frac{(v-u)^2}{2} f''(u) + (v-u)f'(u) + f(u), \\ g'(v) = (v-u) f''(u) + f'(u) - i\tau, \\ g''(v) = f''(u) - \frac{2i\tau}{v-u}, \\ g'''(v) dv + \frac{2i\tau du}{(v-u)^2} = 0. \end{cases}$$

Si l'on résout les trois premières équations (21) par rapport à $f''(u)$, $f'(u)$, $f(u)$ et qu'on adjoigne aux trois équations ainsi obtenues l'équation (18), on a un système de quatre équations qui se déduit si

l'on veut de (21) en échangeant u et v , $f(u)$ et $g(v)$. Ceci montre bien la réciprocité des courbes (M) et (\bar{M}) . La comparaison des équations

$$(22) \quad \begin{cases} g'''(v) dv = \frac{-2i\tau du}{(v-u)^2}, \\ \frac{2i\tau dv}{(v-u)^2} = -f'''(u) du \end{cases}$$

donne immédiatement

$$(23) \quad g'''(v) dv^2 = f'''(u) du^2,$$

ce qui est encore l'une des relations (9) avec $C = 1$. Si donc nous considérons une surface minima donnée arbitrairement, nous déterminons d'abord les deux courbes minima (M) et (M_1) dont elle dérive : cette surface est donc maintenant appelée (MM_1) . A la courbe (M) nous faisons correspondre, par le procédé qui vient d'être exposé, ∞^2 courbes minima (\bar{M}) ; nous choisissons l'une (\bar{M}) et prenons la conjuguée (\bar{M}_1) . La surface minima $(\bar{M}\bar{M}_1)$ est réelle et correspond à la surface (MM_1) avec conservation des angles, des lignes de courbure et des lignes asymptotiques. De plus, si μ est le milieu de MM_1 et $\bar{\mu}$ celui du segment correspondant $\bar{M}\bar{M}_1$, la droite $\mu\bar{\mu}$ engendre une congruence rectiligne dont les surfaces focales sont précisément la surface (MM_1) lieu de μ et la surface $(\bar{M}\bar{M}_1)$ lieu de $\bar{\mu}$.

Pour démontrer tous ces résultats, il est commode d'introduire la courbe à torsion constante $\frac{1}{\tau}$ décrite par le milieu du segment $M\bar{M}$; c, c', c'' étant les cosinus directeurs de cette droite $M\bar{M}$, les courbes minima $(M), (\bar{M}), (M_1), (\bar{M}_1)$ sont définies par les équations

$$(24) \quad \begin{cases} (M) & x = i\tau c + \tau \int c'' dc' - c' dc'', & \dots, \\ (\bar{M}) & \bar{x} = -i\tau c + \tau \int c'' dc' - c' dc'', & \dots, \\ (M_1) & x_1 = i\tau c_1 + \tau \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'', & \dots, \\ (\bar{M}_1) & \bar{x}_1 = i\tau c_1 + \tau \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'', & \dots, \end{cases}$$

les formules étant à compléter par des permutations circulaires évidentes et c_1, c'_1, c''_1 étant les conjuguées de c, c', c'' .

Je considère sur la sphère unité la courbe (a, a', a'') supplémentaire de (c, c', c'') ; soient b, b', b'' les cosinus directeurs de la tangente à la courbe (a, a', a'') ou (c, c', c'') . Appelons σ l'arc de la courbe (a, a', a'') et θ celui de la courbe (c, c', c'') . Je prendrai pour paramètres indépendants θ et l'arc conjugué θ_1 de (c_1, c'_1, c''_1) . On a

$$(25) \quad \begin{cases} dc = b d\theta, & da = b d\sigma, & db = -a d\sigma - c d\theta, \\ dx = \tau(a + ib) d\theta, & d\bar{x} = \tau(a - ib) d\theta, \\ dx_1 = \tau(a_1 - ib_1) d\theta_1, & d\bar{x}_1 = \tau(a_1 + ib_1) d\theta_1, \end{cases}$$

et l'on trouve aisément, pour équation des asymptotiques de (MM_1) , l'équation $d\theta^2 - d\theta_1^2 = 0$, qui est la même pour (\overline{MM}_1) ; l'équation des lignes de courbure est donc $d\theta^2 + d\theta_1^2 = 0$.

D'ailleurs, comme vérification, en remplaçant la courbe sphérique (c, c', c'') par la courbe symétrique $(-c, -c', -c'')$ et de même (c_1, c'_1, c''_1) par sa symétrique, (M) s'échange avec (\overline{M}) , (M_1) avec (\overline{M}_1) , la surface (MM_1) avec (\overline{MM}_1) . Dans cette opération, les arcs θ ni θ_1 ne changent, de sorte que les équations des lignes de courbure et des asymptotiques ne changent pas en passant de (MM_1) à (\overline{MM}_1) . Les paramètres directeurs de la droite $\mu, \bar{\mu}$ sont $c - c_1, c' - c'_1, c'' - c''_1$; écrire qu'elle est tangente en μ à (MM_1) revient à écrire

$$\begin{vmatrix} a + ib, & a' + ib', & a'' + ib'' \\ a_1 - ib_1, & a'_1 - ib'_1, & a''_1 - ib''_1 \\ c - c_1, & c' - c'_1, & c'' - c''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La vérification est aisée en décomposant ce déterminant en deux, dont l'un s'obtient en réduisant la dernière ligne à c, c', c'' et l'autre en la réduisant à $-c_1, -c'_1, -c''_1$; on développe ensuite le premier par rapport à la seconde ligne et le second par rapport à la première ligne.

M. Thybaut avait, dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale*, 1897), indiqué cette correspondance entre les deux surfaces minima (MM_1) , (\overline{MM}_1) sans achever complètement les calculs. La connais-

sance d'un tel couple réel donne immédiatement la courbe à torsion constante lieu du milieu de $(M\bar{M})$, et par suite une surface réelle applicable sur le parabolôide de révolution. Réciproquement, une courbe à torsion constante donnée permet de reconstituer les formules (24) et, par suite, d'obtenir le couple $(MM_1)(\bar{M}\bar{M}_1)$.

J'ai étudié complètement les nombreuses propriétés géométriques de cette figure au *Bulletin de la Société mathématique* (1922).

Ici encore, nous n'avons utilisé qu'une représentation conforme particulière de l'une des surfaces sur l'autre, à savoir celle réalisée par les droites de la congruence $\mu\bar{\mu}$.

Cette transformation, à l'inverse de celle de M. Goursat, ne peut s'appliquer qu'à une surface minima isolée.

6. Rien n'empêche maintenant d'appliquer au couple $(MM_1)(\bar{M}\bar{M}_1)$ l'opération de M. Goursat. Or, on remarque que le couple des deux courbes minima (\bar{M}) et (M) est défini par des propriétés géométriques qui subsistent dans un déplacement, réel ou imaginaire : les plans osculateurs en M et \bar{M} respectivement se coupent suivant $M\bar{M}$. Donc l'opération de M. Goursat remplace le couple $(MM_1)(\bar{M}\bar{M}_1)$ par un nouveau couple de surfaces minima se correspondant encore comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes de longueur nulle, des lignes de courbure et des asymptotiques. Si l'axe de dérivation est pris pour l'axe des Oz , on voit que les points μ et $\bar{\mu}$ sont remplacés après l'opération par des points situés respectivement à la même cote et qui sont encore points focaux de la congruence rectiligne transformée.

On peut partir d'une surface S réelle donnée et lui associer les ∞^2 surfaces S_1 , toutes réelles, obtenues par la méthode du paragraphe précédent. L'opération de M. Goursat donne alors d'un bloc une nouvelle surface réelle minima Σ et toutes les surfaces Σ_1 correspondantes.

D'autre part, un tel couple S, S_1 donne une surface applicable sur le parabolôide de révolution ; après l'opération de M. Goursat, on a un nouveau couple Σ, Σ_1 qui doit donner, lui aussi, une surface applicable sur le parabolôide, contenant trois paramètres de forme. J'ai en effet

montré dans mon Mémoire n° 1 sur le parabolöide (¹), que de toute surface réelle connue, applicable sur le parabolöide, on déduit, par des éliminations et des différentiations, ∞^3 surfaces réelles de même définition, algébriques ou transcendantes, en même temps que la première.

Nous avons donc montré les liens qui réunissent ces questions en apparence si diverses. Dans mon Mémoire sur le parabolöide, j'ai de plus montré les phénomènes si curieux qui se produisent ici dans la réalité : le couple réel (MM_1) , $(\overline{M}\overline{M}_1)$ donne une surface réelle applicable sur le parabolöide $x^2 + y^2 = 2pz$, point réel pour point imaginaire. Or le couple $(M\overline{M}_1)$, $(\overline{M}M_1)$ constitue un nouveau couple de deux surfaces minima se correspondant encore comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes de longueur nulle, des asymptotiques et des lignes de courbure; mais ce couple est constitué par une surface imaginaire et sa conjuguée; ce couple fournit la surface *réelle* la plus générale applicable *physiquement* sur le parabolöide. Mais je ne puis que renvoyer le lecteur à ces Mémoires.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, 1921.