

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL PLANCHEREL

**Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de polynômes
de Legendre et en série de fonctions de Bessel**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 39 (1922), p. 273-316

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39_273_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION

EN SÉRIE DE POLYNOMES DE LEGENDRE ET EN SÉRIE DE FONCTIONS DE BESSEL.

PAR M. MICHEL PLANCHEREL

Professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich



Les travaux de MM. H. Lebesgue, F. Bernstein, W.-H. Young et Ch.-J. de la Vallée Poussin ont fait faire un progrès décisif au problème de l'unicité du développement trigonométrique. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

une série trigonométrique quelconque dont les coefficients tendent vers zéro. Soit $S_n(x)$ la somme de ses n premiers termes.

M. Lebesgue démontrait en 1903 que si la série converge sur un ensemble E de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, elle est la série de Fourier de sa somme si cette somme est bornée sur E et si le complémentaire de E est un ensemble réductible ⁽¹⁾.

M. Bernstein montrait en 1908 que si le complémentaire de l'ensemble des points où $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$ ne contient pas de sous-ensemble parfait, tous les coefficients de la série sont nuls ⁽²⁾.

⁽¹⁾ H. LEBESGUE, *Sur les séries trigonométriques* [*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, (3), t. 20, 1903, p. 453-485]. Voir aussi *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1906), p. 122-124.

⁽²⁾ F. BERNSTEIN, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihe* [*Berichte über die Verhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-phys. Klasse*, Bd. 60, 1908, p. 325-338].

En 1911, M. Young démontrait que la série trigonométrique est encore une série de Fourier lorsque $\lim S_n(x)$ et $\overline{\lim} S_n(x)$ sont des fonctions sommables ayant au plus un ensemble dénombrable de points d'infinitude⁽¹⁾.

Enfin, en 1912, M. de la Vallée Poussin retrouvait et complétait, par une méthode d'une grande simplicité, les résultats de Bernstein et de Young. Il montrait, en particulier, que le résultat de Young subsiste, lorsque l'ensemble des points d'infinitude ne contient pas de sous-ensemble parfait. Il montrait encore que si cet ensemble se réduit à zéro, il n'est pas même nécessaire de supposer d'avance que les coefficients a_n et b_n tendent vers zéro; c'est comme conséquence du théorème qu'ils tendent vers zéro⁽²⁾.

Il m'a paru intéressant de dégager de la Note de M. de la Vallée Poussin une méthode applicable aux séries de polynômes de Legendre, aux séries de fonctions de Bessel et de Sturm-Liouville. On trouvera dans ce Mémoire *l'exposé de cette méthode et son application aux séries de polynômes de Legendre et aux séries de fonctions de Bessel d'ordre zéro*⁽³⁾. Son application aux séries de Sturm-Liouville et aux séries de fonctions de Bessel d'ordre quelconque fait l'objet d'une thèse qui paraîtra prochainement et à laquelle je me permets de renvoyer le lecteur.

CHAPITRE I.

LES SÉRIES DE POLYNÔMES DE LEGENDRE.

1. *Le paramètre généralisé de Beltrami.* — Les résultats de M. de la Vallée Poussin sur l'unicité du développement trigonométrique découlent de l'emploi très habile du théorème suivant :

(1) W.-H. YOUNG, *On the conditions that a trigonometrical series should have the Fourier form* [Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 9, 1910-1911, p. 421-433].

(2) CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'unicité du développement trigonométrique* [Bulletins de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 11 (novembre), 1912, p. 702-718].

(3) Application dont j'ai noté quelques résultats dans une Note des *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 325-328.

Si $f(x)$ est continue dans $a \leq x \leq b$ et possède en chaque point intérieur de cet intervalle une dérivée seconde généralisée supérieure

$$\overline{\lim}_{h=0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

positive et non nulle, alors, dans cet intervalle, tout arc de la courbe $y = f(x)$ est situé en dessous de sa corde. Au contraire, il serait au-dessus si la dérivée seconde inférieure était partout négative.

Pour trouver dans le cas des séries de polynômes de Legendre un théorème analogue, il est nécessaire de se reporter à la méthode de résolution du problème de du Bois-Reymond que j'ai exposée dans un Mémoire antérieur (1). Cette méthode, qui me semble la transposition naturelle de la méthode de Riemann, repose sur l'emploi du paramètre généralisé de Beltrami sur la sphère. J'en rappelle la définition.

(\mathfrak{S}, Φ) et (\mathfrak{S}', Φ') étant les coordonnées polaires de deux points sur la sphère-unité, ω leur distance sphérique et $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ une fonction continue du point (\mathfrak{S}, Φ), formons la différence (2)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi) &= \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\omega=h} [F(\mathfrak{S}', \Phi') - F(\mathfrak{S}, \Phi)] ds' \\ &= \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\omega=h} F(\mathfrak{S}', \Phi') ds' - F(\mathfrak{S}, \Phi) \end{aligned} \right.$$

entre la valeur moyenne $\frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\omega=h} F(\mathfrak{S}', \Phi') ds'$ de la fonction sur le petit cercle de pôle (\mathfrak{S}, Φ) et de rayon (sphérique) h et la valeur $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ de la fonction au pôle (centre sphérique) du petit cercle. Dans cette

(1) M. PLANCHEREL, *Les problèmes de Cantor et de du Bois-Reymond dans la théorie des séries de polynômes de Legendre* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 31, 1914, p. 223-262). J'utiliserai plusieurs résultats des Chapitres I, II, III de ce Mémoire que je désignerai, pour abrégé, par *Problèmes de Cantor*...

(2) Je désignais dans *Problèmes de Cantor*... par $\Delta_2 F(\mathfrak{S}, \Phi; h)$, $\Delta_2^* F(\mathfrak{S}, \Phi)$ les expressions désignées ici, plus simplement, par $\Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi)$, $\Delta^* F(\mathfrak{S}, \Phi)$.

formule, ds' représente l'élément d'arc au point (\mathfrak{S}', Φ') du petit cercle;

$$2\pi \sin h = \int_{\omega=h} ds'$$

est le périmètre du petit cercle. Le quotient $\Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi) : \sin^2 \frac{h}{2}$ est l'analogue de l'expression $\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$. Les limites supérieure et inférieure de ce quotient, lorsque h tend vers zéro, seront des nombres finis ou infinis que nous appellerons les *paramètres généralisés de Beltrami* supérieur et inférieur de $F(\mathfrak{S}, \Phi)$. Nous les représenterons symboliquement par

$$(2) \quad \overline{\Delta^* F}(\mathfrak{S}, \Phi) = \overline{\lim}_{h=0} \frac{\Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi)}{\sin^2 \frac{h}{2}}, \quad \underline{\Delta^* F}(\mathfrak{S}, \Phi) = \underline{\lim}_{h=0} \frac{\Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi)}{\sin^2 \frac{h}{2}}.$$

Lorsque ces limites supérieure et inférieure sont égales, leur valeur commune

$$(3) \quad \Delta^* F(\mathfrak{S}, \Phi) = \lim_{h=0} \frac{\Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$$

sera le paramètre généralisé de Beltrami.

Si $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ possède une différentielle totale seconde au point (\mathfrak{S}, Φ) , $\Delta^* F$ existe en ce point et est égal au paramètre ordinaire

$$(4) \quad \Delta F(\mathfrak{S}, \Phi) = \frac{1}{\sin \mathfrak{S}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}} \left(\sin \mathfrak{S} \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{S}} \right) + \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{S}} \frac{\partial^2 F}{\partial \Phi^2}.$$

Nous dirons d'une fonction $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ qu'elle est *harmonique* dans un domaine sphérique lorsqu'elle possède en tout point intérieur de ce domaine une différentielle totale seconde et qu'elle y vérifie l'équation $\Delta F = 0$. Un théorème, analogue au théorème de la moyenne de la théorie du potentiel, montre que la valeur moyenne d'une fonction harmonique sur un petit cercle est égale à la valeur de cette fonction au pôle du petit cercle. Par suite, si $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ est harmonique, on a non seulement $\Delta F(\mathfrak{S}, \Phi) = 0$, mais encore $\Delta_h F(\mathfrak{S}, \Phi) = 0$, pour h suffisamment petit.

2. *Corde harmonique d'un arc de courbe.* — Si $f(x)$ est sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, la substitution $x = \cos \vartheta$ lui fait correspondre une fonction $F(\vartheta) = f(\cos \vartheta)$, telle que $F(\vartheta) \sin \vartheta$ soit sommable dans $(0, \pi)$. La fonction égale à $F(\vartheta)$ en chaque point (ϑ, Φ) de la sphère a une valeur constante sur chaque parallèle; elle est sommable sur tout petit cercle. Par conséquent $\Delta_h F(\vartheta)$ existe. Nous appellerons encore paramètres généralisés de $f(x)$ ou de $F(\vartheta)$ les limites supérieure $\overline{\Delta^*} F(\vartheta)$, inférieure $\underline{\Delta^*} F(\vartheta)$ de $\Delta_h F(\vartheta) : \sin^2 \frac{h}{2}$. En particulier, lorsque $f''(x)$ existe en un point x intérieur à $(-1, +1)$, le paramètre généralisé $\Delta^* F(\vartheta)$ au point ϑ correspondant est égal à

$$(5) \quad \Delta F(\vartheta) = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \right].$$

Nous appellerons *fonction harmonique dans un intervalle* $a \leq \vartheta \leq b$ toute fonction $u(\vartheta)$ qui satisfait à l'intérieur de l'intervalle à l'équation $\Delta u(\vartheta) = 0$. La fonction correspondante $u(\vartheta, \Phi) = u(\vartheta)$ sur la surface sphérique est alors harmonique dans la zone $a \leq \vartheta \leq b$. L'équation $\Delta u(\vartheta) = 0$ a comme solution générale

$$u = c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} + c_2,$$

c_1, c_2 étant des constantes. Par suite, la seule fonction harmonique $u(\vartheta)$ qui soit finie pour $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$ est $u(\vartheta) = \text{constante}$.

Si maintenant nous remarquons que les cordes qui interviennent dans l'énoncé du théorème de M. de la Vallée Poussin cité au paragraphe 1 sont des solutions de l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ et que le premier membre de cette équation est à la dérivée seconde généralisée de y ce que $\Delta u(\vartheta)$ est au paramètre généralisé $\Delta^* u(\vartheta)$, nous serons naturellement amenés à introduire ce que, pour bien marquer l'analogie, nous appellerons la corde harmonique d'un arc de courbe. Par *corde harmonique* de l'arc (a, b) ($0 < a < b < \pi$) de la courbe $y = F(\vartheta)$, nous entendons l'arc de courbe $y = u(\vartheta)$, $a \leq \vartheta \leq b$, donné par la fonction harmonique $u(\vartheta)$ qui, pour $\vartheta = a$ et $\vartheta = b$, a les mêmes valeurs que $F(\vartheta)$.

Deux fonctions harmoniques $u_1(\vartheta)$, $u_2(\vartheta)$, qui sont égales en un

point a intérieur à l'intervalle $(0, \pi)$ ont une différence

$$u_1(\mathfrak{S}) - u_2(\mathfrak{S}) = [u'_1(a) - u'_2(a)] \sin a \left(\log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{a}{2} \right)$$

qui est une fonction monotone de \mathfrak{S} , croissante si $u'_1(a) > u'_2(a)$, décroissante si $u'_1(a) < u'_2(a)$. Par conséquent, si deux arcs $\gamma_1 = F_1(\mathfrak{S})$, $\gamma_2 = F_2(\mathfrak{S})$, $a \leq \mathfrak{S} \leq b$, ($0 < a < b < \pi$) ont la même extrémité gauche : $F_1(a) = F_2(a)$, mais n'ont pas la même extrémité droite, leurs cordes harmoniques $u_1(\mathfrak{S})$, $u_2(\mathfrak{S})$ n'auront qu'un seul point commun. Si, par exemple, $F_1(b) > F_2(b)$, on aura $u_1(\mathfrak{S}) > u_2(\mathfrak{S})$ pour $\mathfrak{S} > a$ et $u_1(\mathfrak{S}) < u_2(\mathfrak{S})$ pour $\mathfrak{S} < a$. Plus généralement, si les deux arcs de courbe sont tels que $F_1(a) > F_2(a)$, $F_1(b) > F_2(b)$, leurs cordes harmoniques $u_1(\mathfrak{S})$, $u_2(\mathfrak{S})$ seront telles que $u_1(\mathfrak{S}) > u_2(\mathfrak{S})$, pour $a \leq \mathfrak{S} \leq b$.

3. THÉORÈME I. — Si $F(\mathfrak{S})$ est continue dans l'intervalle $a \leq \mathfrak{S} \leq b$, ($a > 0$, $b < \pi$) et si, en chaque point intérieur

$$\overline{\Delta^*} F(\mathfrak{S}) > 0 \quad (a < \mathfrak{S} < b),$$

alors, dans cet intervalle, tout arc de la courbe $y = F(\mathfrak{S})$ est situé en dessous de sa corde harmonique. Au contraire, il serait en dessus, si $\underline{\Delta^*} F$ était négatif pour $a < \mathfrak{S} < b$.

Ce théorème présente une analogie complète avec le théorème de M. de la Vallée Poussin. Il constitue un cas particulier d'un théorème plus général relatif aux fonctions d'un point (\mathfrak{S}, Φ) de la sphère ⁽¹⁾. Il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration directe très simple. Nous pourrions évidemment nous borner à démontrer la première partie du théorème.

Soit (α, β) un sous-intervalle quelconque de (a, b) : $a \leq \alpha < \beta \leq b$, et soit $y = u(\mathfrak{S})$ la corde harmonique de l'arc (α, β) de la courbe

$$y = F(\mathfrak{S}).$$

Si, contrairement au théorème, il y avait à l'intérieur de (α, β) quelque point où $F(\mathfrak{S}) \geq u(\mathfrak{S})$, nous pourrions conclure l'existence d'un point \mathfrak{S}_1 ,

⁽¹⁾ *Problèmes de Cantor* ..., § 6, p. 241-242.

intérieur à (a, b) , où la fonction continue $g(\xi) = F(\xi) - u(\xi)$ atteindrait son maximum. On aurait alors dans un voisinage $(\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon)$ de ξ_1 ,

$$g(\xi) \leq g(\xi_1).$$

Par suite, pour $0 < h < \varepsilon$,

$$\Delta_h g(\xi_1) = \Delta_h F(\xi_1) - \Delta_h u(\xi_1) \leq 0.$$

u étant une fonction harmonique, $\Delta_h u(\xi_1)$ est nul. Donc, $\Delta_h F(\xi_1) \leq 0$ pour $0 < h < \varepsilon$. De là résulterait que $\overline{\Delta^* F}(\xi_1) \leq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse du théorème.

Notons spécialement la proposition suivante, d'un emploi fréquent.

LEMME I. — Si $F(\xi)$ est continue au point ξ_1 , ($0 < \xi_1 < \pi$), si la fonction harmonique $u(\xi)$ est telle que $u(\xi_1) = F(\xi_1)$ et si, dans le voisinage $(\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon)$ de ξ_1 on a $F(\xi) \geq u(\xi)$, [$F(\xi) \leq u(\xi)$], alors $\underline{\Delta^* F}(\xi_1) \geq 0$, [$\overline{\Delta^* F}(\xi_1) \leq 0$].

Car, pour $0 < h < \varepsilon$, $\Delta_h F(\xi_1) \geq \Delta_h u(\xi_1) = 0$, d'où résulte, en effet, $\underline{\Delta^* F}(\xi_1) \geq 0$.

Le théorème suivant est, dans une certaine mesure, la réciproque du théorème I.

THÉORÈME II. — Si $F(\xi)$ est continue dans l'intervalle $a \leq \xi \leq b$, ($a > 0$, $b < \pi$) et si, dans cet intervalle, aucun arc de la courbe $y = F(\xi)$ n'a de points au-dessus (en dessous) de sa corde harmonique, alors, un arc quelconque de la courbe, s'il ne coïncide pas avec sa corde harmonique, est en dessous (au dessus) de cette corde et la courbe n'a en commun avec elle que les extrémités. De plus, en tout point intérieur de (a, b) , on a $\underline{\Delta^* F} \geq 0$ ($\overline{\Delta^* F} \leq 0$).

Soit (α, β) un sous-intervalle quelconque de (a, b) : $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Désignons par $y = u(\xi; \alpha, \beta)$ la corde harmonique de l'arc (α, β) de la courbe $y = F(\xi)$. Par hypothèse, $F(\xi) \leq u(\xi; \alpha, \beta)$ pour $\alpha \leq \xi \leq \beta$. Alors en tout point extérieur à (α, β) , on aura $F(\xi) \geq u(\xi; \alpha, \beta)$. Car, si au point γ extérieur à (α, β) , on avait au contraire $F(\gamma) < u(\gamma; \alpha, \beta)$, il en résulterait lorsque $\gamma > \beta$ que l'arc (α, γ) de la courbe aurait au moins un point — celui d'abscisse β — situé au-dessus de sa corde har-

monique et lorsque $\gamma < \alpha$ que l'arc (γ, β) de la courbe aurait au moins un point — celui d'abscisse α — situé au-dessous de sa corde harmonique. De plus, si l'arc (α, β) de la courbe ne coïncide pas avec sa corde harmonique, l'égalité est à exclure dans le résultat précédent : pour tout point extérieur à (α, β) , $F(\xi) > u(\xi; \alpha, \beta)$. Car, si en un point γ extérieur on avait $F(\gamma) = u(\gamma; \alpha, \beta)$, il suffirait de prendre un point γ_1 intérieur à (α, β) , tel que $F(\gamma_1) < u(\gamma_1; \alpha, \beta)$ pour conclure que l'arc (γ_1, γ_2) de la courbe aurait des points au-dessus de sa corde harmonique — le point d'abscisse β si $\gamma > \beta$, le point d'abscisse α si $\gamma < \alpha$ —.

Par conséquent, si un arc (α, β) ne coïncide pas avec sa corde harmonique, on aura

$$F(\xi) < u(\xi; \alpha, \beta) \quad \text{pour} \quad \alpha < \xi < \beta$$

et

$$F(\xi) > u(\xi; \alpha, \beta) \quad \text{pour} \quad \alpha \leq \xi < \alpha, \quad \text{et pour} \quad \beta < \xi \leq b.$$

De là résulte la première partie du théorème II.

Pour démontrer la seconde partie du théorème II, considérons un arc quelconque (α, β) — $a < \alpha < \beta \leq b$ — de la courbe. Faisons maintenant tendre β vers $\alpha + 0$. Si β_1, β_2 sont deux valeurs de β et si $\beta_1 > \beta_2$, les cordes harmoniques

$$y_1 = u(\xi; \alpha, \beta_1), \quad y_2 = u(\xi; \alpha, \beta_2)$$

des arcs (α, β_1) (α, β_2) de la courbe vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} y_1 &\geq y_2 & \text{pour} & \quad \xi > \alpha, \\ y_1 &\leq y_2 & \text{pour} & \quad \xi < \alpha, \end{aligned}$$

qui résultent du fait que le point $\xi = \beta_2$ de la courbe $y = F(\xi)$ ne peut se trouver au-dessus de la corde harmonique y_1 . On conclut de là, que lorsque β tend vers $\alpha + 0$, $u(\xi; \alpha, \beta)$ tend uniformément dans (a, b) vers une fonction $U_+(\xi)$ telle que $U_+(\alpha) = F(\alpha)$ et que $F(\xi) \geq U_+(\xi)$ pour $\xi \neq \alpha$. Le lemme I appliqué à $F(\xi)$ et $U_+(\xi)$ montre alors, puisque $a < \alpha < b$, que $\Delta^* F(\alpha) \geq 0$.

4. *Tangentes harmoniques. La condition (K).* — Nous dirons que la courbe $y = F(\mathfrak{S})$ possède au point $\mathfrak{S} = \alpha$ une tangente harmonique à droite $y = U_+(\mathfrak{S})$ [à gauche $y = U_-(\mathfrak{S})$] lorsque $U_+(\mathfrak{S})$ [$U_-(\mathfrak{S})$] est la limite unique de la corde harmonique de l'arc (α, β) de la courbe quand β tend vers $\alpha + 0$ ($\alpha - 0$). On pourrait démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $U_+(\mathfrak{S})$ existe est que la dérivée à droite $F'_+(\mathfrak{S})$ de $F(\mathfrak{S})$ existe et soit finie au point $\mathfrak{S} = \alpha$. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

Bornons-nous à calculer $\Delta_h F(\alpha)$ en supposant que $F'_+(\alpha)$ et $F'_-(\alpha)$ existent et sont finies. Nous aurons dans le voisinage de α

$$\begin{aligned} \text{pour } \mathfrak{S} < \alpha, \quad & F(\mathfrak{S}) = F(\alpha) + F'_-(\alpha)(\mathfrak{S} - \alpha) + o(\mathfrak{S} - \alpha) \quad (1), \\ \text{pour } \mathfrak{S} > \alpha, \quad & F(\mathfrak{S}) = F(\alpha) + F'_+(\alpha)(\mathfrak{S} - \alpha) + o(\mathfrak{S} - \alpha). \end{aligned}$$

Décomposons l'intégrale $\int_{\omega=h}$ de $\Delta_h F(\alpha)$ en deux parties relatives aux deux arcs dans lesquels le petit cercle $\omega = h$ de centre $(\alpha, 0)$ est décomposé par le parallèle $\mathfrak{S} = \alpha$. Il viendra

$$\Delta_h F(\alpha) = \frac{1}{2\pi \sin h} \left[F'_-(\alpha) \int_{\substack{\omega=h \\ (\mathfrak{S}' \leq \alpha)}} (\mathfrak{S}' - \alpha) ds' + F'_+(\alpha) \int_{\substack{\omega=h \\ (\mathfrak{S}' \geq \alpha)}} (\mathfrak{S}' - \alpha) ds' \right] + o(h).$$

Or, on vérifie aisément que

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\substack{\omega=h \\ (\mathfrak{S}' \leq \alpha)}} (\mathfrak{S}' - \alpha) ds' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\substack{\omega=h \\ (\mathfrak{S}' \geq \alpha)}} (\mathfrak{S}' - \alpha) ds' = \frac{2}{\pi}.$$

Par suite,

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h F(\alpha)}{\sin \frac{h}{2}} = \frac{2}{\pi} [F'_+(\alpha) - F'_-(\alpha)].$$

Lorsque $F(\mathfrak{S})$ possède en un point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, toutes deux finies, la condition nécessaire et suffisante de leur égalité est donc que $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h F : \sin \frac{h}{2}$ soit nulle en ce point; si ces

(1) $o(\mathfrak{S} - \alpha)$ désigne symboliquement une fonction quelconque de \mathfrak{S} dont le quotient par $\mathfrak{S} - \alpha$ tend vers zéro en même temps que $\mathfrak{S} - \alpha$.

dérivées sont différentes, on a $\Delta^* F = +\infty$ ou $\Delta^* F = -\infty$. Remarquons d'ailleurs que $\lim_{h=0} \Delta_h F(\xi) : \sin \frac{h}{2}$ peut s'annuler en un point sans que F possède en ce point des dérivées à droite et à gauche.

La condition

$$(7) \quad \lim_{h=0} \frac{\Delta_h F(\xi)}{\sin \frac{h}{2}} = 0$$

interviendra dans plusieurs des théorèmes que nous établirons. Pour abrégé, nous l'appellerons la *condition (K)* (1). Nous dirons qu'une fonction satisfait à la condition (K) en un point, lorsqu'elle vérifie en ce point la relation (7); nous dirons qu'elle satisfait à la condition (K) dans un intervalle (a, b) , lorsqu'elle y satisfait en tout point intérieur $a < \xi < b$.

Il est clair que la condition (K) est satisfaite en tout point où les deux paramètres $\underline{\Delta}^* F$ et $\overline{\Delta}^* F$ sont finis.

LEMME II. — Soit $F(\xi)$ une fonction continue au point ξ_1 ($0 < \xi_1 < \pi$) et dans son voisinage. Soient $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ deux fonctions harmoniques différentes ayant la même valeur que $F(\xi)$ au point ξ_1 . Si, dans le voisinage de ξ_1 ,

$$F(\xi) \leq u_1(\xi) \quad \text{et} \quad F(\xi) \leq u_2(\xi)$$

ou, si

$$F(\xi) \geq u_1(\xi) \quad \text{et} \quad F(\xi) \geq u_2(\xi),$$

alors $F(\xi)$ ne peut satisfaire à la condition (K) au point ξ_1 .

Supposons, pour fixer les idées, que $u_1'(\xi_1) > u_2'(\xi_1)$ et plaçons nous dans le premier cas. En utilisant la fonction auxiliaire

$$g(\xi) = \begin{cases} u_1(\xi) & \text{pour } \xi \leq \xi_1, \\ u_2(\xi) & \text{pour } \xi \geq \xi_1, \end{cases}$$

nous aurons $F(\xi_1) = g(\xi_1)$ et $F(\xi) \leq g(\xi)$ dans le voisinage de ξ_1 . Par suite, pour h suffisamment petit, $\Delta_h F(\xi_1) \leq \Delta_h g(\xi_1)$. Or, d'après

(1) Cette condition est l'analogie de celle : $\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 0$ que M. de la Vallée Poussin appelle la condition (K).

la formule (6),

$$\lim_{h=0} \Delta_h g(\xi_1) : \sin \frac{h}{2} = \frac{2}{\pi} [u'_2(\xi_1) - u'_1(\xi_1)] < 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{h=0} \Delta_h F(\xi_1) : \sin \frac{h}{2} < 0.$$

La condition (K) n'est donc pas satisfaite.

LEMME III. — Si la fonction continue $F(\xi)$ vérifie la condition (K) au point ξ_1 , ($0 < \xi_1 < \pi$), il ne peut exister, au plus, qu'une seule fonction harmonique $u(\xi)$ telle que $u(\xi_1) = F(\xi_1)$ et que $u(\xi) \geq F(\xi)$, [$u(\xi) \leq F(\xi)$], dans le voisinage de ξ_1 .

Car, si $v(\xi)$ était une seconde fonction harmonique telle que $v(\xi_1) = F(\xi_1)$ et que $v(\xi) \geq F(\xi)$ dans le voisinage de ξ_1 , le lemme II montrerait que $F(\xi)$ ne pourrait pas vérifier la condition (K) au point ξ_1 .

5. THÉORÈME III. — Soit $F(\xi)$ une fonction continue dans l'intervalle $a \leq \xi \leq b$, ($a > 0$, $b < \pi$) et satisfaisant à la condition (K) à l'intérieur de cet intervalle. S'il y a des points de l'arc (a, b) de la courbe $y = F(\xi)$ au-dessus (au-dessous) de la corde harmonique de cet arc, l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) pour lesquels $\overline{\Delta^*} F(\xi) < 0$ [$\underline{\Delta^*} F(\xi) > 0$] a la puissance du continu et contient un sous-ensemble parfait.

La démonstration comprend deux parties. Dans la première, nous montrerons que l'ensemble des points où $\overline{\Delta^*} F \leq 0$ contient un sous-ensemble E , qui a la puissance du continu et qui est fermé. Dans la seconde, nous nous débarrasserons par un artifice simple des points où $\overline{\Delta^*} F = 0$ et montrerons l'existence d'un ensemble parfait de points où $\overline{\Delta^*} F < 0$.

a. Soit $y = u(\xi)$ la corde harmonique de l'arc (a, b) de la courbe $y = F(\xi)$. Par hypothèse, au moins un point de l'arc — et, par suite, une infinité, puisque $F(\xi)$ est continue — se trouve au-dessus de la corde. Il est alors possible de déterminer un nombre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que toute courbe* harmonique $y = v(\xi)$ passant par le

point $[a, F(a)]$ et ayant en ce point un coefficient angulaire $v'(a)$ tel que

$$u'(a) \leq v'(a) \leq u'(a) + \varepsilon$$

ait encore des points de l'arc au-dessus d'elle. Nous allons voir que l'on peut attacher à chacune de ces courbes $y = v(\xi)$ une valeur δ^* , différente d'une courbe à l'autre et telle que $\overline{\Delta^* F}(\delta^*) \leq 0$. L'ensemble des valeurs δ^* aura, par suite, la puissance du continu; en lui adjoignant ses valeurs d'accumulation nous obtiendrons l'ensemble E_1 .

$v(\xi)$ étant l'une quelconque des fonctions harmoniques définies ci-dessus, la fonction continue $g(\xi) = F(\xi) - v(\xi)$ possède dans (a, b) un maximum absolu positif. Soit δ^* la valeur de ξ pour laquelle ce maximum est atteint, ou, s'il y en a plus d'une, la plus grande d'entre elles. On aura, dans le voisinage de δ^* ,

$$g(\xi) \leq g(\delta^*), \quad \text{si } \xi \leq \delta^*; \quad g(\xi) < g(\delta^*), \quad \text{si } \xi > \delta^*.$$

Par conséquent, $\Delta_h g(\delta^*)$ sera négatif, pour h suffisamment petit. Or, $\Delta_h g(\delta^*) = \Delta_h F(\delta^*)$, puisque $\Delta_h v(\delta^*) = 0$. Donc, $\Delta_h F(\delta^*) < 0$, d'où $\overline{\Delta^* F}(\delta^*) \leq 0$.

Soient maintenant δ_1^* , δ_2^* les valeurs δ^* relatives à deux courbes v différentes : $v_1(\xi)$ et $v_2(\xi)$. Menons par le point $[\delta_1^*, F(\delta_1^*)]$ la courbe $y = u_1(\xi)$ parallèle à $y = v_1(\xi)$ et par le point $[\delta_2^*, F(\delta_2^*)]$ la courbe $y = u_2(\xi)$ parallèle à $y = v_2(\xi)$. $u_1(\xi)$ et $u_2(\xi)$ sont les fonctions harmoniques

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= v_1(\xi) + F(\delta_1^*) - v_1(\delta_1^*), \\ u_2(\xi) &= v_2(\xi) + F(\delta_2^*) - v_2(\delta_2^*). \end{aligned}$$

Or, en vertu de la signification de δ_1^* et de δ_2^* , dans le voisinage de δ_1^*

$$F(\xi) \leq u_1(\xi);$$

dans le voisinage de δ_2^*

$$F(\xi) \leq u_2(\xi).$$

Si δ_1^* était égal à δ_2^* , le lemme III entraînerait l'identité de $u_1(\xi)$ et de $u_2(\xi)$, donc aussi celle de $v_1(\xi)$ et de $v_2(\xi)$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. δ_1^* est donc différent de δ_2^* .

Supposons maintenant que $\varphi'_1(a) < \varphi'_2(a)$. Alors, $\varphi_1(\xi) < \varphi_2(\xi)$, pour $\xi > a$. Mais, puisque δ_1^* est la valeur maximante de $F(\delta) - \varphi_1(\xi)$ et δ_2^* la valeur maximante de $F(\xi) - \varphi_2(\xi)$ dans (a, b) , on a

$$(a) \quad \begin{cases} F(\delta_1^*) - \varphi_1(\delta_1^*) \geq F(\delta_2^*) - \varphi_1(\delta_2^*), \\ F(\delta_2^*) - \varphi_2(\delta_2^*) \geq F(\delta_1^*) - \varphi_2(\delta_1^*). \end{cases}$$

Si $\delta_2^* > \delta_1^*$, nous aurions, puisque $\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)$ est fonction croissante de ξ ,

$$\varphi_2(\delta_2^*) - \varphi_1(\delta_2^*) > \varphi_2(\delta_1^*) - \varphi_1(\delta_1^*).$$

L'addition membre à membre des deux dernières inégalités donnerait alors l'inégalité

$$F(\delta_2^*) - \varphi_1(\delta_2^*) > F(\delta_1^*) - \varphi_1(\delta_1^*)$$

qui est incompatible avec (a). Donc, $\delta_2^* < \delta_1^*$. En d'autres termes, la valeur δ^* qui correspond univoquement à la fonction $\varphi(\xi)$ est une fonction décroissante de l'inclinaison $\varphi'(a)$.

L'ensemble \mathcal{C} des valeurs δ^* a donc la puissance du continu; pour chacun de ses points, $\overline{\Delta^* F} \leq 0$. Soit E_1 l'ensemble formé par \mathcal{C} et ses valeurs limites. E_1 est fermé et a la puissance du continu: il contient donc un sous-ensemble parfait. Pour montrer qu'en tout point de E_1 , $\overline{\Delta^* F} \leq 0$, il suffira évidemment de faire voir que si $\bar{\delta}$ est limite d'une suite convergente quelconque de points δ_n^* de l'ensemble \mathcal{C} , on aura encore $\overline{\Delta^* F}(\bar{\delta}) \leq 0$. Soit, en effet, $\varphi_n(\xi)$ la fonction harmonique $\varphi(\xi)$ à laquelle correspond δ_n^* . δ^* étant une fonction décroissante de $\varphi'(a)$, il est clair que lorsque δ_n^* tend vers $\bar{\delta}$, $\varphi_n'(a)$ a une limite; par suite, les fonctions harmoniques $\varphi_n(\xi)$ convergent uniformément dans (a, b) vers une fonction harmonique $\bar{\varphi}(\xi)$. Les fonctions

$$u_n(\xi) = \varphi_n(\xi) + F(\delta_n^*) - \varphi_n(\delta_n^*)$$

convergent donc uniformément vers la fonction harmonique

$$\bar{u}(\xi) = \bar{\varphi}(\xi) + F(\bar{\delta}) - \bar{\varphi}(\bar{\delta}),$$

et les relations

$$F(\delta_n^*) = u_n(\delta_n^*), \quad F(\bar{\delta}) \leq u_n(\bar{\delta})$$

entraînent

$$F(\bar{\delta}) = \bar{u}(\bar{\delta}), \quad F(\mathfrak{S}) \leq \bar{u}(\mathfrak{S}).$$

Par conséquent, d'après le lemme I, on a encore $\bar{\Delta}^* F(\bar{\delta}) \leq 0$.

b. Pour achever la démonstration du théorème, nous nous servirons de la remarque que

$$(8) \quad \Delta \log \sin \mathfrak{S} = -1 \quad (0 < \mathfrak{S} < \pi).$$

Prenons la constante positive η assez petite pour que l'arc de courbe

$$y = F(\mathfrak{S}) - \eta \log \sin \mathfrak{S} \quad (a \leq \mathfrak{S} \leq b),$$

qui peut être pris aussi voisin que l'on veut de l'arc $y = F(\mathfrak{S})$, ait encore des points situés au-dessus de sa corde harmonique. $F(\mathfrak{S}) - \eta \log \sin \mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition (K) en même temps que $F(\mathfrak{S})$, il résulte de la première partie de la démonstration du théorème III que l'ensemble des points où $\bar{\Delta}^* [F(\mathfrak{S}) - \eta \log \sin \mathfrak{S}] \leq 0$ contient un sous-ensemble parfait. Or,

$$\bar{\Delta}^* [F(\mathfrak{S}) - \eta \log \sin \mathfrak{S}] = \bar{\Delta}^* F(\mathfrak{S}) - \eta \Delta \log \sin \mathfrak{S} = \bar{\Delta}^* F(\mathfrak{S}) + \eta.$$

Par conséquent, pour les points de cet ensemble, $\bar{\Delta}^* F(\mathfrak{S}) \leq -\eta$ et *a fortiori* $\bar{\Delta}^* F(\mathfrak{S}) < 0$.

Une conséquence immédiate du théorème III est le suivant :

* THÉORÈME IV. — Si $F(\mathfrak{S})$ est continue dans l'intervalle $a \leq \mathfrak{S} \leq b$, ($a < 0, b < \pi$), et satisfait à la condition (K) à l'intérieur de cet intervalle, l'ensemble des points intérieurs de cet intervalle où $\bar{\Delta}^* F < 0$ ($\underline{\Delta}^* F > 0$) est nul ou contient un sous-ensemble parfait.

Supposons qu'il y ait au moins un point intérieur où $\bar{\Delta}^* F < 0$. Il existe alors au moins un arc de la courbe $y = F(\mathfrak{S})$ ayant des points au-dessus de sa corde harmonique et par conséquent, d'après le théorème III, un ensemble parfait de points où $\bar{\Delta}^* F < 0$. Car, dans le cas contraire, aucun arc de $F(\mathfrak{S})$ n'aurait de points au-dessus de sa corde;

d'après le théorème II, $\underline{\Delta}^* F$ et *a fortiori* $\overline{\Delta}^* F$ seraient positifs ou nuls en tout point intérieur de (a, b) , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

6. THÉORÈME V. — *Si $F(\mathfrak{S})$ possède une dérivée $F'(\mathfrak{S})$ continue dans l'intervalle $a \leq \mathfrak{S} \leq b$, ($a < 0$, $b < \pi$), on a en tout point intérieur de cet intervalle*

$$(9) \quad F'(\mathfrak{S}) \cot \mathfrak{S} + \underline{D}F'(\mathfrak{S}) \leq \underline{\Delta}^* F(\mathfrak{S}) \leq \overline{\Delta}^* F(\mathfrak{S}) \leq F'(\mathfrak{S}) \cot \mathfrak{S} + \overline{D}F'(\mathfrak{S}).$$

$\underline{D}F'(\mathfrak{S})$ et $\overline{D}F'(\mathfrak{S})$ désignent, pour abrégier, les limites inférieure et supérieure de $\frac{F'(\mathfrak{S} + h) - F'(\mathfrak{S})}{h}$ lorsque h tend vers zéro.

Affectons le parallèle du point (\mathfrak{S}, Φ) de la sphère d'un sens de circulation positif correspondant à Φ croissant. Affectons également le grand cercle passant par (\mathfrak{S}, Φ) et par le point voisin (\mathfrak{S}', Φ') d'un sens de circulation positif allant de (\mathfrak{S}, Φ) à (\mathfrak{S}', Φ') . Désignons par ψ l'angle que fait le grand cercle avec le parallèle et prenons le sens positif de ψ tel que ψ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ lorsque (\mathfrak{S}', Φ') est au pôle $\mathfrak{S}' = 0$ et que ψ soit égal à $-\frac{\pi}{2}$ lorsque (\mathfrak{S}', Φ') est au pôle $\mathfrak{S}' = \pi$. L'élément d'arc ds' au point (\mathfrak{S}', Φ') du petit cercle $\omega = h$ est alors égal à $\sin h d\psi$ et $\Delta_h F(\mathfrak{S})$ peut s'écrire

$$\Delta_h F(\mathfrak{S}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} [F(\mathfrak{S}') - F(\mathfrak{S})] d\psi. \\ (-\pi \leq \psi \leq \pi)$$

Dans cette intégrale étendue aux points (\mathfrak{S}', Φ') du petit cercle de centre (\mathfrak{S}, Φ) et de rayon sphérique h , ψ varie de $-\pi$ à $+\pi$. Si nous décomposons cette intégrale en deux parties étendues chacune à l'un des petits demi-cercles ayant le méridien du point (\mathfrak{S}, Φ) comme base, ces deux parties auront même valeur par raison de symétrie. Il suffira donc de faire varier ψ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

$$\Delta_h F(\mathfrak{S}) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=h} [F(\mathfrak{S}') - F(\mathfrak{S})] d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=h} \dots + \frac{1}{\pi} \int_{\omega=h} \dots \\ \left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0\right) \qquad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Introduisons dans la première intégrale du dernier membre la nouvelle variable $\xi = \mathfrak{S}' - \mathfrak{S}$ et dans la seconde intégrale la nouvelle variable $\xi = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}'$. Dans les deux intégrales ξ variera entre 0 et h . Pour éviter la confusion qui pourrait provenir du fait que ξ a une signification différente selon que ψ est positif ou négatif, nous poserons

$$\psi = -\psi_1, \quad \text{lorsque} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0,$$

et

$$\psi = \psi_2, \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

ψ_1 et ψ_2 sont donc deux angles positifs qui varient entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \Delta_h F(\mathfrak{S}) &= \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} [F(\mathfrak{S} + \xi) - F(\mathfrak{S})] d\psi_1 + \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} [F(\mathfrak{S} - \xi) - F(\mathfrak{S})] d\psi_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} [F(\mathfrak{S} + \xi) - F(\mathfrak{S})] (d\psi_1 - d\psi_2) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} [F(\mathfrak{S} + \xi) + F(\mathfrak{S} - \xi) - 2F(\mathfrak{S})] d\psi_2 \\ &= I_1(\mathfrak{S}, h) + I_2(\mathfrak{S}, h) \end{aligned}$$

en désignant, pour abréger, par $I_1(\mathfrak{S}, h)$ la première intégrale et par $I_2(\mathfrak{S}, h)$ la seconde.

Nous montrerons, dans les deux paragraphes suivants, que

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} I_1(\mathfrak{S}, h) : \sin^2 \frac{h}{2} = F'(\mathfrak{S}) \cot \mathfrak{S}$$

et que

$$(11) \quad \underline{DF}'(\mathfrak{S}) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_2(\mathfrak{S}, h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{I_2(\mathfrak{S}, h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq \overline{DF}'(\mathfrak{S}).$$

La démonstration du théorème V sera alors achevée.

7. *Étude de $I_1(\mathfrak{S}, h)$.* — Puisque, par hypothèse, $F'(\mathfrak{S})$ existe et est

continué, nous pouvons écrire

$$(12) \quad \frac{I_1(\mathfrak{S}, h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{F'(\mathfrak{S})}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi d(\psi_1 - \psi_2) \\ + \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \left[\frac{F(\mathfrak{S} + \xi) - F(\mathfrak{S})}{\xi} - F'(\mathfrak{S}) \right] \xi d(\psi_1 - \psi_2).$$

Or, nous allons montrer que

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi d(\psi_1 - \psi_2) = \cot \mathfrak{S}$$

et qu'il existe une constante M telle que

$$(14) \quad \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi |d(\psi_1 - \psi_2)| < M, \quad \text{pour } 0 < h < \frac{\pi}{2}.$$

Par suite, puisque $\frac{F(\mathfrak{S} + \xi) - F(\mathfrak{S})}{\xi}$ tend vers $F'(\mathfrak{S})$, la seconde intégrale de (12) tendra vers zéro, comme on le voit en lui appliquant le théorème généralisé de la moyenne. La démonstration de la formule (10) est donc ramenée à celle des formules (13) et (14).

Or, si nous prenons en particulier $F(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$, nous avons

$$I_1(\mathfrak{S}, h) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi d(\psi_1 - \psi_2), \quad I_2(\mathfrak{S}, h) = 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{\Delta_h \mathfrak{S}}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi d(\psi_1 - \psi_2).$$

Mais, d'autre part, puisque \mathfrak{S} possède une dérivée seconde, la formule (5) donne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h \mathfrak{S}}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \Delta \mathfrak{S} = \frac{1}{\sin \mathfrak{S}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}} \left(\sin \mathfrak{S} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{S}} \right) = \cot \mathfrak{S}.$$

La formule (13) est donc établie.

La formule (14) est plus longue à démontrer. Il est nécessaire que nous calculions $d(\psi_1 - \psi_2)$ pour estimer son ordre de grandeur en fonction de h . Désignons par N le pôle $\mathfrak{S} = 0$ de la sphère, par P le point (\mathfrak{S}, Φ) ; ξ étant un nombre positif ou nul au plus égal à h , désignons encore par P₁ le point du demi-petit cercle $\omega = h \left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right)$ qui a la coordonnée $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + \xi$ et par P₂ celui qui a la coordonnée $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' - \xi$. Soient γ_1 l'angle au sommet N du triangle sphérique NPP₁, et γ_2 l'angle au sommet N du triangle sphérique NPP₂. Le triangle sphérique NPP₁ a donc pour longueur de ses côtés : NP = \mathfrak{S} , PP₁ = h , NP₁ = $\mathfrak{S} + \xi$; son angle au sommet P est égal à $\frac{\pi}{2} + \psi_1$. Le triangle sphérique NPP₂ a pour longueur de ses côtés : NP = \mathfrak{S} , PP₂ = h , NP₂ = $\mathfrak{S} - \xi$; son angle au sommet P est égal à $\frac{\pi}{2} - \psi_2$. La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne dans le triangle NPP₁

$$\cos(\mathfrak{S} + \xi) = \cos \mathfrak{S} \cos h - \sin \mathfrak{S} \sin h \sin \psi_1,$$

et dans le triangle NPP₂

$$\cos(\mathfrak{S} - \xi) = \cos \mathfrak{S} \cos h + \sin \mathfrak{S} \sin h \sin \psi_2.$$

Donc, par différentiation par rapport à ξ ,

$$\begin{aligned} \sin(\mathfrak{S} + \xi) d\xi &= \sin \mathfrak{S} \sin h \cos \psi_1 d\psi_1, \\ \sin(\mathfrak{S} - \xi) d\xi &= \sin \mathfrak{S} \sin h \cos \psi_2 d\psi_2; \end{aligned}$$

il en résulte

$$d(\psi_1 - \psi_2) = d\psi_1 - d\psi_2 = \frac{d\xi}{\sin \mathfrak{S} \sin h} \left[\frac{\sin(\mathfrak{S} + \xi)}{\cos \psi_1} - \frac{\sin(\mathfrak{S} - \xi)}{\cos \psi_2} \right].$$

Or, la relation des sinus donne

$$\frac{\sin(\mathfrak{S} + \xi)}{\cos \psi_1} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin h}, \quad \frac{\sin(\mathfrak{S} - \xi)}{\cos \psi_2} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin h}.$$

Par suite,

$$d(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2}{\sin^2 h \sin \mathfrak{S}} d\xi.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi |d(\psi_1 - \psi_2)| &= \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2} \sin^2 h \sin \mathfrak{S}} \int_0^h \xi |\sin \chi_1 - \sin \chi_2| d\xi. \\ &= O\left(\frac{1}{h^4} \int_0^h \xi |\sin \chi_1 - \sin \chi_2| d\xi\right) \quad (1). \end{aligned}$$

En se servant des relations

$$\sin \chi_1 = 2 \sin \frac{1}{2} \chi_1 \cos \frac{1}{2} \chi_1, \quad \sin \chi_2 = 2 \sin \frac{1}{2} \chi_2 \cos \frac{1}{2} \chi_2$$

et en développant $\cos \frac{1}{2} \chi_1$, $\cos \frac{1}{2} \chi_2$ suivant les puissances de χ_1 et de χ_2 , on voit que

$$\begin{aligned} O(\sin \chi_1 - \sin \chi_2) &= O\left(\sin \frac{1}{2} \chi_1 - \sin \frac{1}{2} \chi_2\right) + O(\chi_1^3) + O(\chi_2^3) \\ &= O\left(\sin \frac{1}{2} \chi_1 - \sin \frac{1}{2} \chi_2\right) + O\left(\sin^3 \frac{1}{2} \chi_1\right) + O\left(\sin^3 \frac{1}{2} \chi_2\right). \end{aligned}$$

Mais, à l'aide de la formule connue de résolution des triangles sphériques

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin b \sin c}},$$

on voit que

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \chi_1 &= \sqrt{\frac{\sin \frac{h-\xi}{2} \sin \frac{h+\xi}{2}}{\sin \mathfrak{S} \sin(\mathfrak{S} + \xi)}}, & \sin \frac{1}{2} \chi_2 &= \sqrt{\frac{\sin \frac{h-\xi}{2} \sin \frac{h+\xi}{2}}{\sin \mathfrak{S} \sin(\mathfrak{S} - \xi)}}, \\ \sin \frac{1}{2} \chi_1 - \sin \frac{1}{2} \chi_2 &= \sqrt{\frac{\sin \frac{h-\xi}{2} \sin \frac{h+\xi}{2}}{\sin \mathfrak{S}}} \frac{\sqrt{\sin(\mathfrak{S} - \xi)} - \sqrt{\sin(\mathfrak{S} + \xi)}}{\sqrt{\sin(\mathfrak{S} - \xi) \sin(\mathfrak{S} + \xi)}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} O\left(\sin^3 \frac{1}{2} \chi_1\right) &= O\left(\sin^3 \frac{1}{2} \chi_2\right) = O\left(\sqrt{(h^2 - \xi^2)^3}\right), \\ O\left(\sin \frac{1}{2} \chi_1 - \sin \frac{1}{2} \chi_2\right) &= O\left(\xi \sqrt{h^2 - \xi^2}\right). \end{aligned}$$

(1) $O(g(h))$ désigne une fonction quelconque dont le quotient par $g(h)$ reste borné lorsque h tend vers zéro.

On aura donc

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi |d(\psi_1 - \psi_2)| \\
 &= O \left[\frac{1}{h^2} \int_0^h \xi |O(\sin \chi_1 - \sin \chi_2)| d\xi \right] \\
 &= O \left[\frac{1}{h^2} \int_0^h \xi \left| O \left(\sin \frac{\chi_1}{2} - \sin \frac{\chi_2}{2} \right) \right| d\xi \right] \\
 &\quad + O \left[\frac{1}{h^2} \int_0^h \xi \left| O \left(\sin^3 \frac{1}{2} \chi_1 \right) + O \left(\sin^3 \frac{1}{2} \chi_2 \right) \right| d\xi \right] \\
 &= O \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h \xi^2 \sqrt{h^2 - \xi^2} d\xi \right) + O \left[\frac{1}{h^3} \int_0^h \xi \sqrt{(h^2 - \xi^2)^3} d\xi \right] \\
 &= O \left(\int_0^1 u^2 \sqrt{1 - u^2} du \right) + O \left[h \int_0^1 u \sqrt{(1 - u^2)^3} du \right] \\
 &= O(1) + O(h) = O(1)
 \end{aligned}$$

en posant $u = \frac{\xi}{h}$. L'expression (14) reste donc bornée lorsque h tend vers zéro.

8. *Étude de $I_2(\mathfrak{S}, h)$.* — En remarquant que

$$F(\mathfrak{S} + \xi) - 2F(\mathfrak{S}) + F(\mathfrak{S} - \xi) = \int_0^\xi [F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)] dt$$

nous aurons

$$I_2(\mathfrak{S}, h) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} d\psi_2 \int_0^\xi \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} 2t dt.$$

Le théorème de la moyenne donne, pour $0 < \xi < h$,

$$\begin{aligned}
 & \text{borne inf.}_{0 < t < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} \int_0^\xi 2t dt \\
 & \leq \int_0^\xi \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} 2t dt \leq \text{borne sup.}_{0 < t < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} \int_0^\xi 2t dt.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(15) \quad \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi^2 d\psi_2 \cdot \text{borne inf.}_{0 < t < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} \\ \leq \frac{I_2(\mathfrak{S}, h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi^2 d\psi_2 \cdot \text{borne sup.}_{0 < t < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t}.$$

Or, si l'on prend, en particulier, $F(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^2$, $I_2(\mathfrak{S}, h)$ se réduit à $\frac{2}{\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi^2 d\psi_2$ et $\frac{I_1(\mathfrak{S}, h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$ à, d'après la formule (10), la limite $2\mathfrak{S} \cot \mathfrak{S}$.

Comme, d'autre part, $\Delta \mathfrak{S}^2 = 2\mathfrak{S} \cot \mathfrak{S} + 2$, on conclut que

$$(16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \int_{\xi=0}^{\xi=h} \xi^2 d\psi_2 = 1.$$

Remarquons maintenant que

$$(17) \quad \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} = \frac{1}{2} \left[\frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S})}{t} + \frac{F'(\mathfrak{S} - t) - F'(\mathfrak{S})}{-t} \right]$$

est la moyenne arithmétique des nombres

$$\frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S})}{t}, \quad \frac{F'(\mathfrak{S} - t) - F'(\mathfrak{S})}{-t}.$$

Par conséquent

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{borne inf.}_{0 < t < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} \geq \text{borne inf.}_{0 < |t| < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S})}{t}, \\ \text{borne sup.}_{0 < t < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S} - t)}{2t} \leq \text{borne sup.}_{0 < |t| < h} \frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S})}{t}. \end{array} \right.$$

Mais on sait que la borne inférieure et la borne supérieure de

$$\frac{F'(\mathfrak{S} + t) - F'(\mathfrak{S})}{t},$$

pour $0 < |t| < h$, tendent respectivement, lorsque h tend vers zéro,

vers la dérivée inférieure de $F'(\vartheta)$

$$(19) \quad \underline{D}F'(\vartheta) = \lim_{t=0} \frac{F'(\vartheta + t) - F'(\vartheta)}{t}$$

et vers la dérivée supérieure de $F'(\vartheta)$

$$(20) \quad \overline{D}F'(\vartheta) = \overline{\lim}_{t=0} \frac{F'(\vartheta + t) - F'(\vartheta)}{t}.$$

En faisant tendre h vers zéro dans (15) et en tenant compte des formules (16)-(20), on obtient sans autre l'inégalité (11).

9. THÉORÈME VI. — Soit $f(\vartheta)$ une fonction sommable dans l'intervalle (a, b) , ($a > 0, b < \pi$), finie sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle. ε étant une quantité positive arbitrairement petite et α un point quelconque de l'intervalle (a, b) , on peut construire :

a. Une fonction $\Phi_1(\vartheta)$ continue dans $a \leq \vartheta \leq b$, telle que :

$$1^\circ \quad 0 \leq \Phi_1(\vartheta) - \frac{1}{\sin \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi \leq \varepsilon \quad (a \leq \vartheta \leq b);$$

2° En tout point intérieur de (a, b) où $f(\vartheta)$ est finie,

$$\underline{D}\Phi_1(\vartheta) > f(\vartheta) - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi.$$

b. Une fonction $\Phi_2(\vartheta)$ continue dans $a \leq \vartheta \leq b$, telle que :

$$1^\circ \quad -\varepsilon \leq \Phi_2(\vartheta) - \frac{1}{\sin \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi \leq 0 \quad (a \leq \vartheta \leq b);$$

2° En tout point intérieur de (a, b) où $f(\vartheta)$ est finie,

$$\overline{D}\Phi_2(\vartheta) < f(\vartheta) - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi.$$

Nous savons, en effet, déterminer une fonction continue $\varphi_1(\vartheta)$ par

les conditions (1) :

$$1^{\circ} \quad 0 \leq \varphi_1(\vartheta) - \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) d\xi \leq \varepsilon \quad (a \leq \vartheta \leq b);$$

2° En tout point intérieur de (a, b) où $f(\vartheta)$ est finie,

$$\underline{D} \varphi_1(\vartheta) > f(\vartheta).$$

Nous savons, de même, déterminer une fonction continue $\varphi_2(\vartheta)$ par les conditions :

$$1^{\circ} \quad -\varepsilon \leq \varphi_2(\vartheta) - \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) d\xi \leq 0 \quad (a \leq \vartheta \leq b);$$

2° En tout point intérieur de (a, b) où $f(\vartheta)$ est finie,

$$\overline{D} \varphi_2(\vartheta) < f(\vartheta).$$

Il suffira maintenant de prendre

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vartheta) &= \varphi_1(\vartheta) - \int_{\alpha}^{\vartheta} d\xi \frac{\cos \xi}{\sin^2 \xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) \sin t dt, \\ \Phi_2(\vartheta) &= \varphi_2(\vartheta) - \int_{\alpha}^{\vartheta} d\xi \frac{\cos \xi}{\sin^2 \xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) \sin t dt, \end{aligned}$$

pour obtenir deux fonctions qui répondent aux conditions du théorème. Remarquons, en effet, qu'en intégrant par parties le premier terme de l'expression

$$- \int_{\alpha}^{\vartheta} d\xi \frac{\cos \xi}{\sin^2 \xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) \sin t dt + \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) d\xi,$$

nous vérifions que cette expression est égale à $\frac{1}{\sin \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi$.

On aura donc

$$\Phi_1(\vartheta) - \frac{1}{\sin \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi = \varphi_1(\vartheta) - \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) d\xi,$$

(1) Voir, au sujet de la possibilité de cette détermination, CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *loc. cit.*, p. 708-711, ou le *Cours d'Analyse* du même (2^e édition, Gauthier-Villars, 1909), t. I, § 282.

ce qui montre que $\Phi_1(\vartheta)$ vérifie la première condition qui lui est imposée. D'autre part,

$$\underline{D}\Phi_1(\vartheta) = \underline{D}\varphi_1(\vartheta) - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(t) \sin t dt,$$

et puisque $\underline{D}\varphi_1(\vartheta)$ est supérieure à $f(\vartheta)$ en tout point intérieur où $f(\vartheta)$ est finie, la seconde condition imposée à $\Phi_1(\vartheta)$ est aussi vérifiée.

Même raisonnement sur $\Phi_2(\vartheta)$.

REMARQUE. — Les conditions 1^o imposées à $\Phi_1(\vartheta)$ et à $\Phi_2(\vartheta)$ pourraient être remplacées par les suivantes :

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \Phi_1(\vartheta) - \frac{1}{\sin \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi \leq 0, \\ 0 &\leq \Phi_2(\vartheta) - \frac{1}{\sin \vartheta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

car il suffirait, pour obtenir $\Phi_1(\vartheta)$, $\Phi_2(\vartheta)$, de retrancher ou d'ajouter la constante ε aux fonctions du théorème VI.

10. *L'analogue du théorème de Schwarz.* — Il est constitué par le théorème VII et par le théorème VIII; il permet de remonter du paramètre généralisé de Beltrami d'une fonction à cette fonction.

THÉORÈME VII. — Soit $F(\vartheta)$ une fonction continue dans l'intervalle $\alpha \leq \vartheta \leq b$, ($\alpha > 0$, $b < \pi$). S'il existe une fonction $f(\vartheta)$, finie à l'intérieur de l'intervalle (α, b) , sommable dans cet intervalle, et telle que

$$\underline{\Delta}^* F(\vartheta) \leq f(\vartheta) \leq \bar{\Delta}^* F(\vartheta) \quad (\alpha < \vartheta < b),$$

on a

$$(21) \quad F(\vartheta) = \int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) \sin t dt + c_1 \log \tan \frac{\vartheta}{2} + c_2 \quad (\alpha \leq \vartheta \leq b),$$

α étant un point arbitraire de l'intervalle et c_1, c_2 des constantes.

Remarquons d'abord que le changement de α dans la formule (21) a simplement pour effet de modifier la valeur des constantes c_1 et c_2 . Il suffira donc d'établir le théorème pour une valeur particulière de α .

a. Supposons d'abord $b \leq \frac{\pi}{2}$. Formons les deux fonctions $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$ du théorème VI, relatives à $f(\xi)$, en prenant $\alpha = a$ dans nos formules. Construisons dans l'intervalle $a \leq \xi \leq b$ les trois courbes

$$\begin{aligned} y_1 &= F(\xi) - \int_a^\xi \Phi_1(\xi) d\xi, \\ y &= F(\xi) - \int_a^\xi \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_a^\xi f(t) \sin t dt, \\ y_2 &= F(\xi) - \int_a^\xi \Phi_2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Puisque

$$\Phi_2(\xi) \leq \frac{1}{\sin \xi} \int_a^\xi f(t) \sin t dt \leq \Phi_1(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b),$$

nous aurons pour $a \leq \xi \leq b$

$$y_1 \leq y \leq y_2.$$

Mais

$$y_2 - y_1 = \int_a^\xi [\Phi_1(\xi) - \Phi_2(\xi)] d\xi \leq 2\varepsilon(b-a) < 2\pi\varepsilon.$$

Donc, pour $a \leq \xi \leq b$,

$$0 \leq y - y_1 < 2\pi\varepsilon, \quad 0 \leq y_2 - y < 2\pi\varepsilon.$$

Les trois arcs de courbe y_1, y, y_2 ont la même origine d'abscisse $\xi = a$. Soient ν_1, ν, ν_2 leurs cordes harmoniques dans (a, b) . Nous aurons, à l'extrémité $\xi = b$ des arcs,

$$0 \leq \nu - \nu_1 = y - y_1 < 2\pi\varepsilon, \quad 0 \leq \nu_2 - \nu = y_2 - y < 2\pi\varepsilon.$$

Par conséquent, pour $a \leq \xi \leq b$,

$$\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2, \quad \nu - \nu_1 < 2\pi\varepsilon, \quad \nu_2 - \nu < 2\pi\varepsilon.$$

Or,

$$\frac{\Delta_h y_1(\xi)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{\Delta_h F(\xi)}{\sin^2 \frac{h}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \Delta_h \int_a^\xi \Phi_1(\xi) d\xi \quad (a < \xi < b).$$

Par suite, à la limite $h = 0$,

$$\underline{\Delta}^* \gamma_1(\vartheta) \leq \underline{\Delta}^* F(\vartheta) - \underline{\Delta}^* \int_a^{\vartheta} \Phi_1(\xi) d\xi \quad (a < \vartheta < b).$$

Par hypothèse, $\underline{\Delta}^* F(\vartheta) \leq f(\vartheta)$. D'autre part, d'après le théorème V,

$$\underline{\Delta}^* \int_a^{\vartheta} \Phi_1(\xi) d\xi \geq \Phi_1(\vartheta) \cot \vartheta + \underline{D} \Phi_1(\vartheta) \quad (a < \vartheta < b).$$

Mais, en vertu du choix de $\Phi_1(\vartheta)$ et parce qu'ici $b \leq \frac{\pi}{2}$ et par suite $\cot \vartheta \geq 0$, on a, pour $a < \vartheta < b$,

$$\Phi_1(\vartheta) \cot \vartheta \geq \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_a^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi$$

et

$$\underline{D} \Phi_1(\vartheta) > f(\vartheta) - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_a^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}^* \gamma_1(\vartheta) &\leq f(\vartheta) - \Phi_1(\vartheta) \cot \vartheta - \underline{D} \Phi_1(\vartheta) \\ &< f(\vartheta) - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_a^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi - f(\vartheta) + \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \int_a^{\vartheta} f(\xi) \sin \xi d\xi = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\underline{\Delta}^* \gamma_1(\vartheta) < 0 \quad (a < \vartheta < b).$$

On établirait par un calcul analogue que

$$\bar{\Delta}^* \gamma_2(\vartheta) > 0 \quad (a < \vartheta < b).$$

En vertu du théorème I, l'arc γ_1 est donc, dans l'intervalle (a, b) , *au-dessus* de sa corde harmonique et l'arc γ_2 *au-dessous* de sa corde harmonique :

$$\gamma_1 > \varrho_1, \quad \gamma_2 < \varrho_2, \quad \text{pour } a < \vartheta < b.$$

A fortiori, donc,

$$\varrho_1 < \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2 < \varrho_2$$

ou

$$\varrho_1 < \gamma < \varrho_2, \quad \text{pour } a < \vartheta < b.$$

Or, puisque à l'intérieur de (a, b) $\varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2$, nous concluons qu'à

l'intérieur de cet intervalle

$$|y - v| < c_2 - c_1 < 2\pi\varepsilon.$$

Pour $\mathfrak{S} = a$ et $\mathfrak{S} = b$, on a $y = v$. y et v étant indépendantes du nombre positif arbitraire ε , on a nécessairement $y = v$. y est donc une fonction harmonique dans (a, b) , c'est-à-dire de la forme $c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2} + c_2$. Le théorème est donc démontré.

b. Supposons $a \geq \frac{\pi}{2}$. On ramène ce cas au précédent par la substitution $\theta = \pi - \mathfrak{S}$.

c. Supposons enfin $a < \frac{\pi}{2} < b$. Appliquons alors le théorème à chacun des intervalles $(a, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{\pi}{2}, b)$ en prenant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans chacun d'eux. Nous obtiendrons :

pour $a \leq \mathfrak{S} \leq \frac{\pi}{2}$,

$$F(\mathfrak{S}) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\mathfrak{S}} \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi} f(t) \sin t dt + c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2} + c_2;$$

pour $\frac{\pi}{2} \leq \mathfrak{S} \leq b$,

$$F(\mathfrak{S}) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\mathfrak{S}} \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi} f(t) \sin t dt + d_1 \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2} + d_2.$$

$F(\mathfrak{S})$ étant continue au point $\mathfrak{S} = \frac{\pi}{2}$, on conclut d'abord que $c_2 = d_2$.

Ces formules montrent ensuite que $F(\mathfrak{S})$ possède au point $\mathfrak{S} = \frac{\pi}{2}$ une dérivée à gauche $F'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et une dérivée à droite $F'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dont la différence est

$$F'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) - F'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = d_1 - c_1.$$

Si cette différence était différente de zéro on aurait, d'après une remarque faite au paragraphe 4, $\Delta^* F\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$ ou $-\infty$ selon que $d_1 - c_1 > 0$ ou < 0 . Mais alors, contrairement à l'hypothèse, $f(\mathfrak{S})$ serait

infinie au point $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. On a donc $d_1 = c_1$, ce qui achève la démonstration.

Les résultats du théorème VII subsistent lorsque la fonction $f(\vartheta)$ est infinie sur un ensemble qui ne contient pas de sous-ensemble parfait, pourvu que sur cet ensemble $F(\vartheta)$ satisfasse à la condition (K). On a, en effet, le théorème :

THÉORÈME VIII. — Soit $F(\vartheta)$ une fonction continue dans l'intervalle $a \leq \vartheta \leq b$, ($a > 0$, $b < \pi$). S'il existe une fonction $f(\vartheta)$ sommable dans (a, b) , telle que

$$\underline{\Delta}^* F(\vartheta) \leq f(\vartheta) \leq \bar{\Delta}^* F(\vartheta) \quad (a < \vartheta < b),$$

si de plus l'ensemble des points où $f(\vartheta)$ est infinie ne contient pas de sous-ensemble parfait et si aux points de cet ensemble $F(\vartheta)$ vérifie la condition (K), on a

$$F(\vartheta) = \int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) \sin t \, dt + c_1 \log \tan \frac{\vartheta}{2} + c_2 \quad (a \leq \vartheta \leq b),$$

α étant un point arbitraire de l'intervalle et c_1, c_2 des constantes.

En reprenant les raisonnements précédents nous concluons de nouveau qu'en tout point intérieur de (a, b) où $f(\vartheta)$ est finie, on aurait encore

$$\underline{\Delta}^* y_1 < 0, \quad \bar{\Delta}^* y_2 > 0.$$

On peut encore conclure de ces inégalités que pour tout point intérieur à (a, b)

$$y_1 \geq \nu_1, \quad y_2 \leq \nu_2.$$

Car, s'il existait, par exemple, un point où $y_1 < \nu_1$, il résulterait du théorème III que $\underline{\Delta}^* y_1$ serait positif sur un ensemble de points contenant un sous-ensemble parfait. Or, d'après ce qui précède, les seuls points où $\underline{\Delta}^* y_1$ peut être positif sont les points où $f(\vartheta)$ est infinie et, par hypothèse, leur ensemble ne contient pas de sous-ensemble parfait.

Dans le cas où $b \leq \frac{\pi}{2}$ et dans le cas où $a \geq \frac{\pi}{2}$, on pourra donc continuer le raisonnement comme plus haut. Dans le cas $a < \frac{\pi}{2} < b$, on conclura,

comme plus haut, l'inégalité $c_2 = d_2$. Si $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est finie, on conclura, comme plus haut, que $c_1 = d_1$. Si $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est infinie, $F(\xi)$ vérifie la condition (K) au point $\xi = \frac{\pi}{2}$; par suite $F'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $F'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)$ devront encore être égales, d'où $c_1 = d_1$.

11. *Séries de polynômes de Legendre. Fonctions génératrices.* — Soit $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ le polynôme de Legendre de degré n ($n = 0, 1, 2, \dots$) et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ une série de polynômes de Legendre à coefficients a_n quelconques. S'il existe une fonction $g(x)$, sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, telle que

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

nous dirons que $g(x)$ est la fonction *génératrice* de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ (convergente ou non). Alors que nous appellerons *série de polynômes de Legendre* une série quelconque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, nous réservons la dénomination de *série de Legendre* à une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ qui possède une fonction génératrice $g(x)$. a_n est, dans le dernier cas, appelé le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $g(x)$.

On sait que si deux fonctions sont les génératrices de la même série de Legendre, elles ne peuvent différer que sur un ensemble de mesure nulle.

Une condition nécessaire pour qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ possède une génératrice est que (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

(1) *Problèmes de Cantor*, § 2, p. 230, et § 4, p. 237.

Une condition nécessaire pour qu'une série de polynômes de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge presque partout dans l'intervalle $(-1, 1)$ est que ⁽¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0.$$

La substitution $x = \cos \vartheta$ fait correspondre à toute série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$. Si la première possède une génératrice $g(x)$, la fonction

$$f(\vartheta) = g(\cos \vartheta)$$

est telle que $f(\vartheta) \sin \vartheta$ est sommable dans $(0, \pi)$ et l'on a

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Nous dirons alors que $f(\vartheta)$ est la génératrice de la série de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$.

12. Développement de $\int_\alpha^\vartheta \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_\alpha^\xi f(t) \sin t dt$ en série de Legendre. —

Nous aurons besoin, dans la suite, du développement de

$$G(\vartheta) = \int_\alpha^\vartheta \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_\alpha^\xi f(t) \sin t dt \quad (0 < \vartheta < \pi, \quad 0 < \alpha < \pi)$$

en série de Legendre, en supposant que la fonction $f(\vartheta) \sin \vartheta$ est sommable dans $(0, \pi)$. Soit

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

⁽¹⁾ *Problèmes de Cantor*, § 1, p. 228.

le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $f(\vartheta)$ et soit

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi G(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $G(\vartheta)$. $G(\vartheta)$ étant une fonction continue dans $0 < \vartheta < \pi$, de carré sommable dans $(0, \pi)$, $G'(\vartheta)$ étant également continue à l'intérieur de $(0, \pi)$, on sait que la série de Legendre de $G(\vartheta)$ converge à l'intérieur de $(0, \pi)$ vers $G(\vartheta)$,

$$G(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(\cos \vartheta) \quad (0 < \vartheta < \omega).$$

Par contre, en général, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos \vartheta)$ ne sera pas convergente dans $(0, \pi)$.

Établissons, pour $n > 0$, la relation qui lie α_n et β_n . En remplaçant $G(\vartheta)$ par sa valeur dans l'intégrale qui donne β_n , nous obtenons

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta) \int_\alpha^\vartheta \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_\alpha^\xi f(t) \sin t dt.$$

On peut permuter l'ordre des intégrations dans cette formule. En remarquant que

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_\alpha^\vartheta d\xi \int_\alpha^\xi \dots dt = \int_0^\alpha dt \int_0^t d\xi \int_0^\xi \dots d\vartheta + \int_\alpha^\pi dt \int_t^\pi d\xi \int_\xi^\pi \dots d\vartheta,$$

et en s'appuyant, pour le calcul de ces intégrales, sur l'équation différentielle des polynômes de Legendre

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = -n(n+1) P_n(\cos \vartheta)$$

on obtient, tous calculs faits,

$$\beta_n = -\frac{\alpha_n}{n(n+1)} + \frac{2n+1}{2n(n+1)} \left[\int_0^\alpha f(t) \sin t dt + (-1)^n \int_\alpha^\pi f(t) \sin t dt \right] \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Or, comme on le vérifie aisément, le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $\log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2}$ est

$$-\frac{2n+1}{2n(n+1)} [1 - (-1)^n],$$

et le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $\log \sin \mathfrak{S}$ est

$$\frac{2n+1}{2n(n+1)} [1 + (-1)^n].$$

Par suite, $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $\frac{1}{2} \log \sin \mathfrak{S} - \frac{1}{2} \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2}$ et $(-1)^n \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $\frac{1}{2} \log \sin \mathfrak{S} + \frac{1}{2} \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2}$.

β_n est donc, pour $n > 0$, égal à $-\frac{\alpha_n}{n(n+1)}$ augmenté du $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de la fonction

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt \cdot \log \sin \mathfrak{S} \\ & + \frac{1}{2} \left[\int_\alpha^\pi f(t) \sin t \, dt - \int_0^\alpha f(t) \sin t \, dt \right] \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2}. \end{aligned}$$

On aura donc, en remarquant que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n(n+1)} P_n(\cos \mathfrak{S})$ converge pour $0 < \mathfrak{S} < \pi$,

$$G(\mathfrak{S}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n(\cos \mathfrak{S})}{n(n+1)} + \alpha_0 \log \sin \mathfrak{S} + c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2} + c_2 \quad (0 < \mathfrak{S} < \pi),$$

c_1 et c_2 étant des constantes.

Remarque. — Les valeurs indiquées ci-dessus pour les coefficients de Legendre de $\log \sin \mathfrak{S}$ et de $\log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2}$ montrent que leurs produits par n ne tendent pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Plus généralement même, une

fonction de la forme

$$\alpha_0 \log \sin \mathfrak{S} + c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{S}}{2} + c_2$$

a des coefficients de Legendre dont le produit par n ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, à moins que $\alpha_0 = c_1 = 0$.

13. *La série associée à une série de polynômes de Legendre.* — A toute série de polynômes de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \mathfrak{S})$ faisons correspondre la série associée

$$F(\mathfrak{S}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \mathfrak{S}).$$

Pour $\mathfrak{S} \neq 0, \pi$, $P_n(\cos \mathfrak{S})$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, comme le montre sa formule asymptotique (1). Par suite, lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, la série associée est absolument convergente à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$ et elle converge uniformément dans tout intervalle entièrement intérieur à ce dernier. $F(\mathfrak{S})$ est alors une fonction continue de \mathfrak{S} pour $0 < \mathfrak{S} < \pi$. De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a_n}{n(n+1)} \right)^2$ étant alors convergente, le théorème de Riesz-Fischer (2) montre que $F(\mathfrak{S}) \sin \mathfrak{S}$ est de carré sommable dans $(0, \pi)$ et que

$$\frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} F(\mathfrak{S}) P_n(\cos \mathfrak{S}) \sin \mathfrak{S} d\mathfrak{S} = - \frac{a_n}{n(n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, $F(\mathfrak{S})$ est encore continue aux points $\mathfrak{S} = 0$, $\mathfrak{S} = \pi$ et elle satisfait à la condition (K) à l'intérieur de l'intervalle

(1) *Problèmes de Cantor...*, § 1, p. 229, formule (2).

(2) Pour une démonstration de ce théorème, voir, par exemple, M. PLANCHEREL, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies* [*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXX (1910, 2^e semestre), § 3, p. 295-297].

$(0, \pi)$ ⁽¹⁾. De plus, en tout point de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$ à l'intérieur de cet intervalle ⁽²⁾

$$\Delta^* F(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta).$$

Nous n'aurons d'ailleurs pas besoin de ce dernier résultat, mais du théorème suivant.

THÉORÈME IX. — Soit a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) une suite quelconque de nombres assujettis à la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0,$$

et soient $S_n(\vartheta)$, $F(\vartheta)$ les fonctions

$$S_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu P_\nu(\cos \vartheta),$$

$$F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P_n(\cos \vartheta)}{n(n+1)}.$$

Il existe une constante M indépendante de ϑ , telle que, pour $0 < \vartheta < \pi$,

$$\left| \underline{\Delta}^* F(\vartheta) \right| \leq M \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| S_n(\vartheta) - a_0 \right|,$$

$$\left| \overline{\Delta}^* F(\vartheta) \right| \leq M \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| S_n(\vartheta) - a_0 \right|.$$

Il suffit évidemment de démontrer le théorème dans le cas où $\overline{\lim} |S_n(\vartheta)|$ est finie au point ϑ . ϑ étant intérieur à $(0, \pi)$, on peut prendre h assez petit pour que la série $F(\vartheta)$ (envisagée sur la sphère) soit uniformément convergente sur le petit cercle $\omega = h$ de centre (ϑ, φ) et qu'on puisse, par suite, l'intégrer terme à terme sur ce petit

⁽¹⁾ *Problèmes de Cantor...*, § 8, théorème IX, p. 247-248.

⁽²⁾ *Ibidem.*

cercle. On aura, alors,

$$\Delta_h F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \Delta_h P_n(\cos \vartheta).$$

Or ⁽¹⁾,

$$\Delta_h P_n(\cos \vartheta) = - P_n(\cos \vartheta) [1 - P_n \cos h];$$

par conséquent,

$$\frac{\Delta_h F(\vartheta)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin^2 \frac{h}{2}}.$$

Mais,

$$a_n P_n(\cos \vartheta) = [S_n(\vartheta) - a_0] - [S_{n-1}(\vartheta) - a_0];$$

par suite, puisque $S_n(\vartheta)$ reste bornée quel que soit n pour la valeur ϑ considérée,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_h F(\vartheta)}{\sin^2 \frac{h}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} [S_n(\vartheta) - a_0] \left\{ \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin^2 \frac{h}{2}} - \frac{1 - P_{n+1}(\cos h)}{(n+1)(n+2) \sin^2 \frac{h}{2}} \right\}, \\ &= \sum_{n=1}^m + \sum_{n=m+1}^{\infty}, \end{aligned}$$

m étant un nombre entier quelconque. Lorsque h tend vers zéro, l'expression $\{ \dots \}$ tend vers zéro. La limite de la somme $\sum_{n=1}^m$ du dernier membre est donc, pour m fixe, égale à zéro lorsque h tend vers zéro. On aura donc, pour tout m ,

$$\underline{\Delta}^* F(\vartheta) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=m+1}^{\infty} [S_n(\vartheta) - a_0] \left\{ \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin^2 \frac{h}{2}} - \frac{1 - P_{n+1}(\cos h)}{(n+1)(n+2) \sin^2 \frac{h}{2}} \right\},$$

ainsi qu'une relation analogue pour $\overline{\Delta}^* F(\vartheta)$ (avec $\overline{\lim}$ au second membre). Or, on peut montrer ⁽²⁾ que la fonction

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1)} - \frac{1 - P_{n+1}(\cos h)}{(n+1)(n+2)} \right|$$

⁽¹⁾ *Problèmes de Cantor...*, p. 240, formule (14).

⁽²⁾ *Problèmes de Cantor...*, § 9, p. 249-252.

est une fonction bornée de h pour $0 < h < \frac{\pi}{2}$. Si nous désignons par M la borne supérieure de cette fonction dans $0 < h < \frac{\pi}{2}$, nous aurons, puisque m peut être pris aussi grand que nous le voulons,

$$|\underline{\Delta}^* F(\mathfrak{S})| \leq M \overline{\lim}_{n=\infty} |S_n(\mathfrak{S}) - a_0|,$$

ainsi que la même inégalité pour $\overline{\Delta}^* F(\mathfrak{S})$.

14. *La solution du problème d'unicité.* — Les résultats obtenus permettent de donner au problème de l'unicité du développement en série de polynômes de Legendre la réponse suivante :

THÉOREME X. — Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ une série quelconque de polynômes de Legendre. Soient

$$\Psi_1(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^n a_\nu P_\nu(x), \quad \Psi_2(x) = \overline{\lim}_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^n a_\nu P_\nu(x).$$

I. Si $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ ⁽¹⁾, il suffit, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ possède une fonction génératrice, que $\Psi_1(x)$ et $\Psi_2(x)$ soient sommables dans l'intervalle $(-1, 1)$ et soient finies en tout point intérieur de cet intervalle.

II. Si $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, il suffit, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ possède une fonction génératrice, que $\Psi_1(x)$ et $\Psi_2(x)$ soient sommables dans l'intervalle $(-1, 1)$ et que l'ensemble des points de cet intervalle où $|\Psi_1(x)| + |\Psi_2(x)|$ est infinie ne contienne pas de sous-ensemble parfait.

Notons ⁽²⁾

$$\Phi(x) = \overline{\lim}_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^n a_\nu P_\nu(x) \right|.$$

⁽¹⁾ Cette condition est surabondante. Voir la remarque de la page 316.

⁽²⁾ La fonction $\Phi(x)$ de ma Note des *Comptes rendus* est, par erreur, définie comme la limite inférieure de $\left| \sum_{\nu=0}^n a_\nu P_\nu(x) \right|$ pour $n = \infty$.

Pour chaque valeur de x , $\Phi(x)$ est égale à la plus grande des deux valeurs $|\Psi_1(x)|, |\Psi_2(x)|$. Les hypothèses du théorème X relatives à $\Psi_1(x)$ et à $\Psi_2(x)$ sont donc équivalentes aux mêmes hypothèses relatives à la seule fonction $\Phi(x)$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas I : $\Phi(x)$ est donc sommable et fini. Notons $\Phi(\cos \vartheta) = \psi(\vartheta)$. Nous pourrions appliquer le théorème IX pour chaque valeur de ϑ intérieure à $(0, \pi)$:

$$-M\psi(\vartheta) \leq \underline{\Delta}^* F(\vartheta) \leq \bar{\Delta}^* F(\vartheta) \leq M\psi(\vartheta) \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

$\Phi(x)$ étant sommable dans $(-1, 1)$, $\psi(\vartheta) \sin \vartheta$ l'est dans $(0, \pi)$. D'après l'inégalité précédente, on peut trouver une fonction $f(\vartheta)$, finie pour $0 < \vartheta < \pi$, telle que $f(\vartheta) \sin \vartheta$ soit sommable dans $(0, \pi)$ et que

$$\underline{\Delta}^* F(\vartheta) \leq f(\vartheta) \leq \bar{\Delta}^* F(\vartheta) \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

Il suffirait de prendre, par exemple, $f(\vartheta) = \underline{\Delta}^* F(\vartheta)$ ou $f(\vartheta) = \bar{\Delta}^* F(\vartheta)$. Le théorème VII est applicable et donne

$$F(\vartheta) = \int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{d\xi}{\sin \xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) \sin t \, dt + c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} + c_2 \quad (0 < \vartheta < \pi, 0 < \alpha < \pi).$$

Par conséquent, puisque $f(\vartheta) \sin \vartheta$ est sommable dans $(0, \pi)$, d'après le paragraphe 12,

$$F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n(\cos \vartheta)}{n(n+1)} + \alpha_0 \log \sin \vartheta + c_1 \log \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} + c_2 \quad (0 < \vartheta < \pi);$$

α_n désigne ici le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $f(\vartheta)$

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) (\sin \vartheta \, d\vartheta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et c_1, c_2 sont des constantes. Mais, d'après sa définition,

$$F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n(\cos \vartheta)}{n(n+1)} \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta) = \alpha_0 \log \sin \vartheta + c_1 \log \tan \frac{\vartheta}{2} + c_2 \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

La série du premier membre est telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\alpha_n - a_n}{n(n+1)} \right)^2$ converge, car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, puisque $f(\vartheta) \sin \vartheta$ est sommable. D'après le théorème de Riesz-Fischer, $\frac{\alpha_n - a_n}{n(n+1)}$ est donc le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre du second membre. Mais le produit par n de ce coefficient tend ici vers zéro avec $\frac{1}{n}$; il résulte alors de la remarque qui termine le paragraphe 12 que nécessairement $\alpha_0 = c_1 = 0$. Le second membre se réduit donc à c_2 et l'absence de $P_0(\cos \vartheta)$ au premier membre entraîne ensuite $c_2 = 0$. Par conséquent, $\alpha_n - a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, c'est-à-dire

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

De plus, puisque $\alpha_0 = 0$,

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$ est donc une série de Legendre ayant $a_0 + f(\vartheta)$ pour génératrice.

Dans le cas II, les raisonnements précédents subsistent entièrement, avec cette seule différence qu'au lieu du théorème VII, c'est le théorème VIII qu'il faut faire intervenir; $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ tendant vers zéro, $F(\vartheta)$ vérifie la condition (K) à l'intérieur de $(0, \pi)$.

Deux génératrices de la même série ne pouvant différer que sur un ensemble de mesure nulle, on conclut que $\underline{\Delta}^* F(\vartheta)$ et $\bar{\Delta}^* F(\vartheta)$ sont égales presque partout, si les hypothèses du théorème X sont remplies.

CHAPITRE II.

LES SÉRIES DE FONCTIONS DE BESSEL.

1. *Le paramètre généralisé de Beltrami dans le plan.* — L'étude de l'unicité du développement d'une fonction en série de fonctions de Bessel d'ordre zéro a été faite récemment par M. C. Arnold (1). M. Arnold développe pour les séries de fonctions de Bessel la méthode exposée dans le Mémoire déjà cité (2) et il obtient des résultats de même portée.

La méthode que nous avons exposée au Chapitre I se transpose sans aucune difficulté aux séries de fonctions de Bessel d'ordre zéro; certains calculs sont même plus simples, tels ceux qui correspondent aux calculs des paragraphes 6, 7, 8. Nous pourrions donc être très bref.

Alors que l'étude des séries $\sum a_n P_n(\cos \vartheta)$ se fait le plus naturellement sur la sphère, celle des séries $\sum a_n J(k_n r)$ se fait le plus naturellement dans un cercle de rayon r (3). A la place de l'expression $\Delta_h F(\vartheta, \Phi)$ se présente, dans le plan, une expression analogue que nous définirons comme suit.

Soient r, Φ , les coordonnées polaires d'un point quelconque du plan et $F(r, \Phi)$ une fonction continue de ce point, Soit ω la distance des deux points $(r, \Phi), (r', \Phi')$ du plan. Formons l'expression

$$\Delta_h F(\vartheta, \Phi) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\omega=h} [F(r', \Phi') - F(r, \Phi)] ds';$$

l'intégrale est étendue aux points (r', Φ') de la circonférence de centre (r, Φ) et de rayon h , ds est l'élément d'arc de la circonférence au point (r', Φ') . Les limites inférieure et supérieure de $\Delta_h F(r, \Phi)$: $\frac{h^2}{4}$,

(1) G. ARNOLD, *Die Probleme von Cantor und du Bois-Reymond in der Theorie der Besselschen Reihen* [Inauguraldissertation, Freiburg (Schweiz), 1920].

(2) *Problèmes de Cantor*....

(3) Pour la raison de ce choix, voir *Problèmes de Cantor*, p. 225.

lorsque h tend vers zéro, seront encore désignées par $\underline{\Delta}^*F(r, \Phi)$, $\overline{\Delta}^*F(r, \Phi)$ et constitueront les *paramètres généralisés de Beltrami* de $F(r, \Phi)$ dans le plan. Lorsque ces paramètres sont égaux, leur valeur commune sera désignée par $\Delta^*F(r, \Phi)$. En particulier, lorsque $F(r, \Phi)$ possède en un point une différentielle totale seconde, $\Delta^*F(r, \Phi)$ se réduit à l'opérateur de Laplace

$$\Delta F(r, \Phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \Phi^2}.$$

2. *Corde harmonique d'un arc. Ses propriétés.* — A toute fonction $F(r)$ définie dans l'intervalle $(0, 1)$, continue pour $0 < r < 1$, nous pouvons faire correspondre une fonction $F(r, \Phi) = F(r)$ définie dans le cercle de rayon 1 ayant son centre à l'origine, continue à l'intérieur de ce cercle, sauf peut-être au centre. On pourra donc, pour h suffisamment petit, former l'expression

$$\Delta_h F(r) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\omega=h} [F(r') - F(r)] ds' \quad (0 < r < 1).$$

Nous appellerons encore *paramètres généralisés de $F(r)$* les limites inférieure $\underline{\Delta}^*F(r)$ et supérieure $\overline{\Delta}^*F(r)$ de $\Delta_h F(r)$: $\frac{h^2}{4}$ lorsque h tend vers zéro. En particulier, si $F''(r)$ existe en un point, $\Delta^*F(r)$ est égal en ce point à

$$\Delta F(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}.$$

Nous appellerons *fonction harmonique* dans un intervalle

$$a \leq r \leq b \quad (a \geq 0, b \leq 1)$$

toute fonction $u(r)$ qui vérifie l'équation $\Delta u(r) = 0$ à l'intérieur de cet intervalle. La fonction correspondante $u(r, \Phi) = u(r)$ vérifie l'équation de Laplace à l'intérieur de l'aire annulaire $a < r < b$. L'équation $\Delta u(r) = 0$ a

$$u(r) = c_1 \log r + c_2$$

comme solution générale. Les seules fonctions harmoniques qui soient finies pour $r = 0$ sont donc des constantes.

Étant donné un arc $a \leq r \leq b$, ($a > 0$, $b \leq 1$) de la courbe $y = F(r)$, nous appellerons *corde harmonique* de cet arc l'arc (a, b) de la courbe harmonique $y = u(r)$ qui a les mêmes extrémités. On se rend compte que tous les théorèmes des paragraphes 2, 3, 4, 5 subsistent textuellement en remplaçant les définitions relatives à la sphère par celles que nous venons de donner; il suffit d'y astreindre l'intervalle (a, b) à la condition $a > 0$, $b \leq 1$ et d'entendre par la condition (K) la condition $\lim_{h=0} \Delta_h(r) : h = 0$.

Au lieu du théorème V du paragraphe 6, nous aurons, par une démonstration analogue, simplifiée par le fait que l'on y utilise la trigonométrie plane au lieu de la trigonométrie sphérique, le théorème :

THÉORÈME V'. — Si $F(r)$ possède une dérivée $F'(r)$ continue dans l'intervalle $a \leq r \leq b$ ($a > 0$, $b \leq 1$), on a, pour $a < r < b$,

$$\frac{1}{r} F'(r) + \underline{D} F'(r) \leq \underline{\Delta}^* F(r) \leq \bar{\Delta}^* F(r) \leq \frac{1}{r} F'(r) + \bar{D} F'(r).$$

Rappelons que $\underline{D}F'(r)$ et $\bar{D}F'(r)$ sont des abréviations pour la limite inférieure et la limite supérieure de $\frac{F'(r+h) - F'(r)}{h}$ lorsque h tend vers zéro.

Par suite, au lieu du théorème VII se présentera le :

THÉORÈME VII'. — Soit $F(r)$ une fonction continue dans l'intervalle $a \leq r \leq b$ ($a > 0$, $b \leq 1$). S'il existe une fonction $f(r)$ sommable dans cet intervalle et finie à son intérieur, telle que pour $a < r < b$,

$$\underline{\Delta}^* F(r) \leq f(r) \leq \bar{\Delta}^* F(r),$$

on aura

$$F(r) = \int_a^r \frac{d\xi}{\xi} \int_a^\xi f(t) t dt + c_1 \log r + c_2 \quad (a \leq r \leq b, a \leq \alpha \leq b).$$

Un théorème analogue peut s'énoncer lorsque $F(r)$ est infinie sur un ensemble de points qui ne contient pas de sous-ensemble parfait, pourvu que $F(r)$ vérifie en chaque point de cet ensemble intérieur à (a, b) la condition (K), c'est-à-dire la condition

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta_h F(r)}{h} = 0.$$

3. *L'unicité du développement en série de fonctions de Bessel.* — Soit

$$J(r) = 1 - \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

la fonction de Bessel d'ordre zéro. H étant une constante quelconque ⁽¹⁾, soient

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$$

les racines non négatives, rangées par ordre de grandeur croissante, de l'équation

$$rJ'(r) + HJ(r) = 0.$$

Nous appellerons *série de fonctions de Bessel* (d'ordre zéro) toute série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r)$. S'il existe une fonction $f(r)$, telle que $rf(r)$ soit sommable dans l'intervalle $(0, 1)$ et que

$$\frac{\int_0^1 f(r) J(k_n r) r dr}{\int_0^1 J(k_n r)^2 r dr} = a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

nous dirons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r)$ est une *série de Bessel* et que $f(r)$ en est la *génératrice*. On sait que deux fonctions génératrices de la même série ne peuvent différer que sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de l'intervalle $(0, 1)$ ⁽²⁾. Une condition nécessaire pour

⁽¹⁾ Nous supposons, dans ce qui suit, $H \neq 0$. Si $H = 0$, il interviendrait, par le fait que k_1 serait alors nul, quelques légères modifications, par exemple dans la définition de $F(r)$, sans importance sur le résultat final.

⁽²⁾ Voir, par exemple, W.-H. YOUNG, *On series of Bessel functions* [Proceedings of the London Mathematical Society (2), vol. 18, p. 163-201, p. 174]. Dès que l'on suppose démontrée la possibilité de représenter par une série uniformément convergente de Bessel les fonctions d'un certain champ (par exemple, les fonctions analytiques qui s'annulent en 0 et en 1), ceci résulte du théorème IV de ma Note : *Sätze über Systeme orthogonaler Funktionen* [Mathematische Annalen, Bd 68 (1910), p. 270-278].

qu'une série $\sum a_n J(k_n r)$ possède une génératrice est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Une condition nécessaire pour que cette série converge presque partout dans $(0, 1)$ est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Par un calcul analogue à celui du paragraphe 12 et en s'appuyant sur l'équation différentielle

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dJ(k_n r)}{dr} \right] = -k_n^2 J(k_n r),$$

on vérifie que si $r f(r)$ est sommable dans $(0, 1)$ et si a_n est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Bessel de $f(r)$, c'est-à-dire le coefficient de $J(k_n r)$ dans la série de Bessel dont $f(r)$ est la génératrice, on a

$$\int_{\alpha}^r \frac{d\xi}{\xi} \int_{\alpha}^{\xi} f(t) t dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n J(k_n r)}{k_n^2} + c_1 \log r + c_2 \quad (0 < r \leq 1, 0 < \alpha \leq 1).$$

A toute série de fonctions de Bessel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r)$ faisons correspondre la série associée

$$F(r) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n J(k_n r)}{k_n^2}.$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, $F(r)$ est continue pour $0 < r \leq 1$, elle est de carré sommable dans $(0, 1)$. La série associée est dans ce cas une série de Bessel ayant sa somme $F(r)$ pour génératrice.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, $F(r)$ est continue pour $0 \leq r \leq 1$ et elle vérifie la condition (K) à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$. De plus, en tout point de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r)$, on a

$$\Delta^* F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r).$$

En remarquant que

$$\Delta_h J(k_n r) = -J(k_n r) [1 - J(k_n h)]$$

et en s'appuyant sur le fait que la fonction

$$\frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - J(k_n r)}{k_n^2} - \frac{1 - J(k_{n+1} h)}{k_{n+1}^2} \right|$$

est bornée pour $0 < h < 1$ ⁽¹⁾, on pourra établir un théorème analogue au théorème IX et obtenir finalement le théorème d'unicité suivant :

THÉORÈME X'. — Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(k_n r)$ une série de fonctions de Bessel à coefficients quelconques et soient

$$\Psi_1(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v J(k_v r), \quad \Psi_2(r) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v J(k_v r).$$

I. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, il suffit, pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r)$ possède une fonction génératrice, que $r\Psi_1(r)$ et $r\Psi_2(r)$ soient sommables dans l'intervalle $(0, 1)$ et soient finies en tout point intérieur de cet intervalle.

II. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, il suffit, pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(k_n r)$ possède une fonction génératrice, que $r\Psi_1(r)$ et $r\Psi_2(r)$ soient sommables dans l'intervalle $(0, 1)$ et que l'ensemble des points de cet intervalle où $|\Psi_1(r)| + |\Psi_2(r)|$ est infinie ne contienne pas de sous-ensemble parfait.

REMARQUE. — La condition $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ qui figure dans la première partie des théorèmes X et X' est en réalité surabondante. Car lorsque $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$ sont finies sur un ensemble de mesure positive, la suite $a_n : \sqrt{n}$ est bornée ⁽²⁾.

(1) Pour la vérification de ces assertions, je renvoie à la thèse de M. ARNOLD.

(2) Voir CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (classe des sciences), 1913, p. 9.

