

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES RIQUIER

Sur la résolution numérique des systèmes d'équations algébriques entières à un nombre quelconque d'inconnues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 45 (1928), p. 145-188

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1928_3_45__145_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE
DES
SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ENTIÈRES
A UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES

PAR M. CHARLES RIQUIER.

INTRODUCTION.

Les résultats, récemment communiqués à l'Académie des Sciences⁽¹⁾, dont l'exposé détaillé fait l'objet du présent travail, peuvent se résumer comme il suit.

I. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles n'impliquant qu'une fonction inconnue, et présentant, par rapport à celle-ci et à ses dérivées, la forme linéaire et homogène à coefficients constants. Exclusion étant faite de la solution banale où l'inconnue, u , est identiquement nulle :

1° Nous dirons que le système est *possible* ou *impossible*, suivant qu'il admet ou non quelque autre solution.

2° Nous nommerons *intégration restreinte* du système la recherche des solutions de la forme

$$u = \nu e^{rX+sY+\dots},$$

où X, Y, \dots désignent les variables indépendantes, en nombre quelconque n , et ν, r, s, \dots des constantes, en nombre $n + 1$, dont la première, ν , est expressément assujettie à n'être pas nulle; les solutions de cette forme seront elles-mêmes qualifiées d'*immédiates*. Dans

(1) *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 742.

Ann. Éc. Norm., (3), XLV. — MAI 1928.

une solution immédiate, la constante (non nulle) υ est évidemment arbitraire.

Cela posé :

A. On peut, à l'aide d'un calcul limité, reconnaître si un système donné (de la forme spécifiée plus haut) est possible ou impossible, et, dans le cas de possibilité, si son intégrale générale dépend d'un nombre limité ou illimité de constantes arbitraires.

B. Dans le cas où le système est possible et où son intégrale générale dépend d'un nombre limité, g , de constantes arbitraires, son intégration restreinte peut s'effectuer par la résolution d'un système de n équations algébriques entières de degré g , aux n inconnues r, s, \dots , de la forme

$$F_1(r) = 0, \quad F_2(s) = 0, \quad \dots$$

II. A un système algébrique quelconque où se trouvent engagées les n inconnues x, y, \dots ,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \dots + P_1 = 0, \\ M_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + \dots + P_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ (M_1, \dots, P_1, M_2, \dots, P_2, \dots, \text{coefficients constants}), \end{array} \right.$$

faisons correspondre le système différentiel partiel

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 \frac{\partial^{z_1 + \beta_1 + \dots} u}{\partial X^{\alpha_1} \partial Y^{\beta_1}} + \dots + P_1 u = 0, \\ M_2 \frac{\partial^{z_2 + \beta_2 + \dots} u}{\partial X^{\alpha_2} \partial Y^{\beta_2}} + \dots + P_2 u = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

impliquant la fonction inconnue u des n variables indépendantes X, Y, \dots .

Pour que le système algébrique (1) admette la solution numérique

$$x, y, \dots = x', y', \dots,$$

il faut et il suffit que le système différentiel partiel (2) admette la solution immédiate (I, 2°)

$$u = \upsilon e^{x'X + y'Y + \dots}$$

Et ainsi, *la recherche des solutions numériques du système (1) se ramène à l'intégration restreinte du système (2), et réciproquement.*

Cela posé :

CAS FONDAMENTAL. — *Si le système (2) est possible et que son intégrale générale dépende d'un nombre limité, g , de constantes arbitraires, la résolution numérique du système (1) se trouve ramenée au cas signalé plus haut (I, B) de l'intégration restreinte, et, par suite, à la résolution numérique d'un système de n équations de degré g , impliquant respectivement n inconnues différentes.*

III. Outre la connaissance du cas fondamental (II), le problème de la résolution numérique des systèmes algébriques, envisagé dans toute sa généralité, nécessite celle d'une question qui ne se trouve suffisamment éclaircie que dans des travaux encore presque ignorés : il s'agit de la recherche des *conditions nécessaires et suffisantes pour que N équations algébriques à l'inconnue x admettent quelque racine commune.*

Le cas de $N = 2$, traité par Euler, est classique. Si N est > 2 , *le cas de N équations se ramène à celui de $N - 1$ équations : on peut dès lors, quel que soit N , effectuer, par voie de récurrence, l'élimination de x .*

IV. Toutes ces notions une fois posées, on établit que *la recherche des solutions numériques d'un système quelconque d'équations algébriques entières, à un nombre quelconque, n , d'inconnues, se ramène à la considération exclusive du cas fondamental (II).*

A cet effet, on vérifie tout d'abord l'exactitude de la proposition pour $n = 1$; on montre ensuite que, si elle est vraie pour $n - 1$ inconnues, elle l'est nécessairement encore pour n inconnues.

CHAPITRE I.

L'ÉLIMINATION ALGÈBRIQUE.

Condition pour que deux formes algébriques binaires
admettent quelque racine commune (Euler).

1. On donne le nom de *forme algébrique* à un polynome entier et homogène dépendant d'un nombre quelconque de variables; le cas d'une seule variable, n'étant d'aucune utilité, est systématiquement exclu, et la forme est dite *binnaire*, *ternaire*, *quaternaire*, etc., suivant qu'elle dépend de 2, 3, 4, . . . variables.

L'adoption, pour les équations algébriques entières à une inconnue, de l'écriture homogène, dont nous ferons constamment usage dans la première partie du présent Chapitre, repose sur l'observation suivante :

Nous plaçant, comme l'exige essentiellement le sujet de notre étude, dans le monde des quantités imaginaires, considérons tous les couples de valeurs *non à la fois nulles* qu'il est possible d'attribuer aux deux indéterminées x, y : ces divers couples peuvent manifestement se partager (sans omission ni répétition) en une infinité de groupes, comprenant chacun une infinité de couples, et tels que deux couples quelconques pris dans un même groupe forment un déterminant nul, tandis que deux couples respectivement pris dans deux groupes différents forment un déterminant différent de zéro. Dans un même groupe, l'expression générale des couples, si l'on désigne par (x', y') l'un quelconque d'entre eux et par α un facteur arbitraire assujetti à la seule restriction de n'être pas nul, est donnée par les formules

$$x = \alpha x', \quad y = \alpha y' \quad (1);$$

en substituant ces valeurs dans une forme binaire de degré m , $F(x, y)$,

(1) Le groupe se désigne d'habitude, abstraction faite du facteur arbitraire qui figure dans son expression générale, par l'un quelconque des couples dont il se compose.

on a la relation

$$F(\alpha x', \alpha y') = \alpha^m F(x', y'),$$

en sorte que, si quelque'un des couples faisant partie du groupe considéré est une solution de l'équation $F(x, y) = 0$, tous les autres couples du même groupe jouissent de la même propriété : le groupe dont il s'agit est alors un *groupe-racine de l'équation* $F(x, y) = 0$, ou, plus simplement, une *racine* de cette équation, ou bien encore une *racine de la forme binaire* $F(x, y)$.

Une forme de degré nul se réduit à une simple constante.

Si l'on convient de ne pas considérer comme distinctes deux formes ne différant que par un facteur constant non nul, *une forme binaire de degré m dont les coefficients ne sont pas tous nuls est décomposable, et d'une seule manière, en un produit de m formes binaires du premier degré dont aucune n'a ses deux coefficients nuls à la fois*; les racines de ces dernières fournissent évidemment celles de la forme proposée.

Étant donnée une forme binaire $F(x, y)$, on dit qu'elle admet la racine (x', y') au *degré p de multiplicité*, ou bien encore qu'elle admet *p fois* la racine (x', y') , lorsqu'elle est algébriquement divisible par

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^p \text{ sans l'être par } \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^{p+1}.$$

Il résulte du théorème précédent qu'*une forme binaire de degré m dont les coefficients ne sont pas tous nuls admet un nombre limité de racines, et que la somme des degrés de multiplicité de ces racines est exactement égale à m* ; ce qu'on exprime souvent en disant qu'elle *admet exactement m racines, distinctes ou non*.

En conséquence, *si une forme binaire de degré m admet plus de m racines distinctes, elle a nécessairement tous ses coefficients nuls*.

Lorsqu'une forme binaire prend la valeur zéro pour toutes valeurs attribuées à ses deux variables x, y , on dit qu'elle est *identiquement nulle*. Cela étant :

1° *Pour qu'une forme binaire soit identiquement nulle, il faut et il suffit que ses coefficients soient tous nuls*.

La condition posée est évidemment suffisante, et sa nécessité résulte de la remarque formulée en dernier lieu.

2° Pour qu'un produit de formes binaires soit identiquement nul, il faut et il suffit que quelqu'un des facteurs le soit.

La condition posée, évidemment suffisante, est d'ailleurs nécessaire.

En effet, si le produit est identiquement nul, il s'annule pour une infinité de couples de valeurs de x, y , formant deux à deux des déterminants différents de zéro, d'où résulte, puisque le nombre des facteurs est limité, que quelqu'un d'entre eux jouit de la même propriété : le facteur en question, admettant, d'après cela, plus de racines distinctes qu'il n'y a d'unités dans son degré, ne peut manquer d'avoir tous ses coefficients nuls, et, par suite, d'être identiquement nul.

Nous terminerons ce bref rappel de propriétés connues par l'observation suivante :

Lorsqu'une forme binaire de degré m a tous ses coefficients nuls, elle est algébriquement divisible par une puissance aussi élevée qu'on le voudra de toute forme binaire du premier degré n'ayant pas ses deux coefficients nuls à la fois; on peut donc dire, en pareil cas, qu'elle admet telle racine que l'on voudra à un degré de multiplicité infini, ou bien encore qu'elle admet une infinité de fois telle racine que l'on voudra.

2. Soient

$$(1) \quad \begin{cases} A(x, y) = A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ B(x, y) = B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{cases}$$

deux formes binaires, dont les degrés respectifs, a, b , sont tous deux supérieurs à zéro, et dont aucune n'est identiquement nulle. Proposons-nous actuellement de déterminer deux formes inconnues, de degrés respectifs $a - 1, b - 1$,

$$(2) \quad \begin{cases} F_A(x, y) = \alpha_0 x^{a-1} + \alpha_1 x^{a-2} y + \dots + \alpha_{a-1} y^{a-1}, \\ F_B(x, y) = \beta_0 x^{b-1} + \beta_1 x^{b-2} y + \dots + \beta_{b-1} y^{b-1}, \end{cases}$$

par la double condition de n'être pas toutes deux identiquement nulles, et de rendre identiquement nulle la forme composée

$$(3) \quad A(x, y)F_B(x, y) + B(x, y)F_A(x, y),$$

de degré $a + b - 1$,

Cela étant, pour que les formes (1) admettent quelque racine commune, il faut et il suffit que le problème posé sur l'expression (3) soit possible.

I. *La condition posée est nécessaire.* — Effectivement, si les formes (1) admettent quelque facteur linéaire commun, elles satisfont aux identités

$$\begin{aligned} A(x, y) &= (H_0x + H_1y)Q_A(x, y), \\ B(x, y) &= (H_0x + H_1y)Q_B(x, y), \end{aligned}$$

où H_0, H_1 désignent deux constantes non à la fois nulles, et $Q_A(x, y), Q_B(x, y)$ deux formes de degrés respectifs $a - 1, b - 1$, dont aucune n'est identiquement nulle. L'identité qu'il s'agit de vérifier prend donc la forme

$$(H_0x + H_1y)Q_A(x, y)F_B(x, y) + (H_0x + H_1y)Q_B(x, y)F_A(x, y) = 0,$$

et l'on y satisfera évidemment en prenant

$$F_A(x, y) = Q_A(x, y), \quad F_B(x, y) = -Q_B(x, y).$$

II. *La condition posée est suffisante.* — Tout d'abord, aucune des deux formes (2), non à la fois identiquement nulles, qui, en raison de la possibilité supposée du problème, rendent l'expression (3) identiquement nulle, ne peut, si on l'envisage séparément, être identiquement nulle : car si $F_A(x, y)$, par exemple, l'était, le produit $A(x, y)F_B(x, y)$ le serait aussi, et par suite (n° 1), puisque $A(x, y)$ ne l'est pas, $F_B(x, y)$. Cela étant, l'identité

$$A(x, y)F_B(x, y) = -B(x, y)F_A(x, y)$$

montre que $A(x, y)$ divise le produit $B(x, y)F_A(x, y)$; il en résulte, puisque $A(x, y)$ est d'un degré supérieur à $F_A(x, y)$, qu'il a quelque facteur linéaire commun avec $B(x, y)$.

3. En écrivant les relations auxquelles doivent satisfaire les $a + b$ coefficients inconnus

$$\begin{aligned} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{a-1}, \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1} \end{aligned}$$

pour que l'expression (3), de degré $a + b - 1$, soit identiquement

nulle, on est conduit à poser, entre ces $a + b$ inconnues, un système, Σ , de $a + b$ équations linéaires et homogènes. Ainsi qu'il est facile de le constater, le déterminant, d'ordre $a + b$, qui a pour éléments les coefficients de ce système ne contient, dans a de ses colonnes, que des coefficients B et des zéros, et, dans les b colonnes restantes, que des coefficients A et des zéros; il est donc homogène et de degré a par rapport aux B, homogène et de degré b par rapport aux A, et par suite, si l'on suppose $a > 0$, $b > 0$, homogène et de degré *supérieur à zéro* par rapport aux coefficients de l'une quelconque des deux formes (1) : on lui a donné le nom de *résultant*.

Cela étant et, *en supposant uniquement qu'aucune des deux formes (1) ne soit de degré zéro, il faut et il suffit, pour que ces deux formes admettent quelque racine commune, que leur résultant soit nul.*

I. Supposons d'abord qu'aucune des deux formes (1) ne soit identiquement nulle.

Pour qu'elles admettent quelque racine commune, il est, en pareil cas, nécessaire et suffisant que le problème posé plus haut (n° 2) sur l'expression (3) soit possible, c'est-à-dire que le système Σ admette quelque solution où ses inconnues ne soient pas toutes nulles : il est donc nécessaire et suffisant que le résultant des deux formes (1) soit nul.

II. Affranchissons-nous maintenant de toute restriction relative à la nullité identique éventuelle des formes (1).

Pour qu'elles admettent quelque racine commune, il est évidemment nécessaire et suffisant :

- Ou bien que l'une au moins d'entre elles soit identiquement nulle;
- Ou bien que, aucune d'elles ne l'étant, leur résultant soit nul.

Or, ce résultant, étant, d'après une observation faite au début, homogène et de degré *supérieur à zéro* tant par rapport aux A que par rapport aux B, ne peut manquer de s'évanouir si quelque une des formes (1) est identiquement nulle.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de quelque racine commune est donc bien celle que formule notre énoncé.

4. Exemples de la formation du résultant de deux formes binaires.

I. Résultant des deux formes

$$\begin{aligned} &A_0 x + A_1 y, \\ &B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2. \end{aligned}$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0 x + A_1 y)(\beta_0 x + \beta_1 y) + (B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2) \alpha_0$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 &+ B_0 \alpha_0 = 0, \\ A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 + B_1 \alpha_0 &= 0, \\ A_1 \beta_1 + B_2 \alpha_0 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & B_0 \\ A_1 & A_0 & B_1 \\ 0 & A_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$B_2 A_0^2 - A_1 (A_0 B_1 - B_0 A_1).$$

II. Résultant des deux formes.

$$\begin{aligned} &A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2, \\ &B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2. \end{aligned}$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2)(\beta_0 x + \beta_1 y) + (B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2)(\alpha_0 x + \alpha_1 y)$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 &+ B_0 \alpha_0 &= 0, \\ A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 + B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 &= 0, \\ A_2 \beta_0 + A_1 \beta_1 + B_2 \alpha_0 + B_1 \alpha_1 &= 0, \\ A_2 \beta_1 &+ B_2 \alpha_1 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ A_1 & A_0 & B_1 & B_0 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{vmatrix} \quad (1).$$

(1) On peut, comme il est facile de s'en assurer en effectuant les calculs, le mettre

III. Résultant des deux formes

$$\begin{aligned} & A_0 x + A_1 y, \\ & B_0 x^3 + 3 B_1 x^2 y + 3 B_2 x y^2 + B_3 y^3. \end{aligned}$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0 x + A_1 y)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x y + \beta_2 y^2) + (B_0 x^3 + 3 B_1 x^2 y + 3 B_2 x y^2 + B_3 y^3) \alpha_0$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 & + B_0 \alpha_0 = 0, \\ A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 & + 3 B_1 \alpha_0 = 0, \\ A_1 \beta_1 + A_0 \beta_2 + 3 B_2 \alpha_0 & = 0, \\ A_1 \beta_2 + B_3 \alpha_0 & = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 \\ A_1 & A_0 & 0 & 3 B_1 \\ 0 & A_1 & A_0 & 3 B_2 \\ 0 & 0 & A_1 & B_3 \end{vmatrix},$$

ou

$$3 A_0 A_1 (A_1 B_1 - A_0 B_2) + A_0^3 B_3 - A_1^3 B_0.$$

IV. Résultant des deux formes

$$\begin{aligned} & A_0 x^2 + 2 A_1 x y + A_2 y^2, \\ & B_0 x^3 + 3 B_1 x^2 y + 3 B_2 x y^2 + B_3 y^3. \end{aligned}$$

En écrivant que l'expression

$$\begin{aligned} & (A_0 x^2 + 2 A_1 x y + A_2 y^2)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x y + \beta_2 y^2) \\ & + (B_0 x^3 + 3 B_1 x^2 y + 3 B_2 x y^2 + B_3 y^3)(\alpha_0 x + \alpha_1 y) \end{aligned}$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 & + B_0 \alpha_0 & = 0, \\ 2 A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 & + 3 B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 & = 0, \\ A_2 \beta_0 + 2 A_1 \beta_1 + A_0 \beta_2 + 3 B_2 \alpha_0 + 3 B_1 \alpha_1 & = 0, \\ & + A_2 \beta_1 + 2 A_1 \beta_2 + B_3 \alpha_0 + 3 B_2 \alpha_1 & = 0, \\ & A_2 \beta_2 & + B_3 \alpha_1 = 0, \end{aligned}$$

sous les deux formes suivantes, très fréquemment usitées :

$$(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2)$$

et

$$[2(A_0 B_2 + B_0 A_2) - A_1 B_1]^2 - (A_1^2 - 4 A_0 A_2)(B_1^2 - 4 B_0 B_2).$$

les deux équations

$$(3) \quad \begin{cases} A(x) = 0, \\ \lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x) = 0 \end{cases}$$

admettent quelque racine commune.

La condition est évidemment nécessaire, et nous avons à prouver qu'elle est suffisante.

I. Considérons un polynôme entier dépendant de variables u, v, \dots en nombre quelconque, et, dans les plans de notation graphique de ces variables, décrivons, autour des valeurs particulières u_0, v_0, \dots , prises comme centres, un système de cercles. *Quelque petits que l'on suppose ces cercles, pour que, à leur intérieur, le polynôme prenne la valeur zéro indépendamment des valeurs attribuées aux variables u, v, \dots , il faut et il suffit que ses coefficients soient tous nuls.*

La condition formulée est évidemment suffisante, et il nous reste à établir qu'elle est nécessaire.

Or, elle l'est évidemment quand il s'agit d'un polynôme entier à une seule variable: car, si le polynôme n'avait pas tous ses coefficients nuls, il ne pourrait prendre la valeur zéro que pour un nombre essentiellement limité de valeurs de cette variable (n° 1). Il suffit alors de prouver que si la condition formulée est nécessaire dans le cas d'un polynôme entier à $q - 1$ variables, elle l'est encore dans le cas d'un polynôme entier, $F(u, v, \dots)$, dépendant des q variables u, v, \dots .

A cet effet, ordonnons le polynôme $F(u, v, \dots)$ par rapport à u , et mettons-le sous la forme

$$(4) \quad f_0(v, \dots) + f_1(v, \dots)u + f_2(v, \dots)u^2 + \dots,$$

où

$$(5) \quad f_0(v, \dots), f_1(v, \dots), f_2(v, \dots), \dots$$

sont des polynômes entiers (en nombre limité) dépendant des $q - 1$ variables v, \dots . Si, à l'intérieur du système de cercles considéré, on attribue à v, \dots un système déterminé de valeurs particulières, l'expression (4) s'évanouit quel que soit u , et l'on a dès lors

$$f_0(v, \dots) = 0, \quad f_1(v, \dots) = 0, \quad f_2(v, \dots) = 0, \dots$$

Mais, les valeurs particulières que nous venons d'attribuer à v, \dots étant, dans les limites imposées, complètement arbitraires, il résulte de ce qui est admis sur les polynomes entiers à $q - 1$ variables que les coefficients des divers polynomes (5) sont tous nuls, et, par suite, ceux du polynome $F(u, v, \dots)$.

II. *Étant donné un nombre quelconque de polynomes entiers, dépendant d'un nombre quelconque de variables, et dont aucun n'a tous ses coefficients nuls, il existe quelque système de valeurs de ces variables n'annulant aucun des polynomes.*

A. *Lorsqu'un polynome entier, $F(u, v, \dots)$, à un nombre quelconque de variables, prend une valeur différente de zéro pour un système déterminé, (u_0, v_0, \dots) , de valeurs particulières de ces variables, il reste différent de zéro pour toutes valeurs de u, v, \dots suffisamment voisines de u_0, v_0, \dots .*

Effectivement, si l'on désigne par M_0 le module (non nul) de $F(u_0, v_0, \dots)$, et par μ une quantité positive (> 0) choisie comme on voudra au-dessous de M_0 , il résulte de la continuité de $F(u, v, \dots)$ que, pour toutes valeurs de u, v, \dots suffisamment voisines de u_0, v_0, \dots , on aura

$$\text{mod} [F(u, v, \dots) - F(u_0, v_0, \dots)] < M_0 - \mu,$$

et à plus forte raison

$$M_0 - \text{mod} F(u, v, \dots) < M_0 - \mu,$$

c'est-à-dire

$$\text{mod} F(u, v, \dots) > \mu.$$

B. Revenons à l'énoncé formulé au début du présent alinéa II.

Lorsque le nombre des polynomes se réduit à 1, la propriété qu'il s'agit d'établir résulte immédiatement de l'alinéa I; pour prouver qu'elle est générale, il suffit donc de montrer qu'en la supposant vraie pour $p - 1$ polynomes, elle l'est nécessairement aussi pour les p polynomes

$$Q(u, v, \dots), \dots, R(u, v, \dots), S(u, v, \dots),$$

dépendant de variables u, v, \dots en nombre quelconque. Or, aucun de ces p polynomes, et, notamment, des $p - 1$ premiers, n'ayant, par hypothèse, tous ses coefficients nuls, on peut, en vertu de ce qui est

admis, assigner quelque système de valeurs, (u_0, v_0, \dots) , tel que les $p - 1$ polynomes

$$Q(u, v, \dots), \dots, R(u, v, \dots)$$

soient tous différents de zéro pour

$$u, v, \dots = u_0, v_0, \dots,$$

et par suite, en vertu de *A*, pour toutes valeurs de u, v, \dots suffisamment voisines de u_0, v_0, \dots . Cela étant, si l'on a $S(u_0, v_0, \dots) \neq 0$, le système de valeurs (u_0, v_0, \dots) satisfait à toutes les conditions requises. Si l'on a au contraire $S(u_0, v_0, \dots) = 0$, il existe certainement, dans un voisinage aussi rapproché qu'on le voudra de (u_0, v_0, \dots) , et par suite dans un domaine où aucun des $p - 1$ premiers polynomes ne peut s'annuler, quelque système de valeurs, (u_1, v_1, \dots) , n'annulant pas $S(u, v, \dots)$, car, sinon, le polynome $S(u, v, \dots)$ aurait, en vertu de *I*, tous ses coefficients nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse; pour les valeurs u_1, v_1, \dots , on aura donc à la fois

$$Q(u_1, v_1, \dots) \neq 0, \dots, R(u_1, v_1, \dots) \neq 0, S(u_1, v_1, \dots) \neq 0$$

III. *Il existe, pour les $n - 1$ indéterminées (2), une infinité de systèmes de valeurs,*

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda', & \mu', & \dots, & \omega', \\ \lambda'', & \mu'', & \dots, & \omega'', \\ \lambda''', & \mu''', & \dots, & \omega''', \\ \dots & \dots & \dots, & \dots \end{cases}$$

tels que, dans le tableau (6), qui contient $n - 1$ colonnes et une infinité de lignes, $n - 1$ lignes arbitrairement choisies forment un déterminant différent de zéro.

Effectivement, à une première ligne, $\lambda', \mu', \dots, \omega'$, composée de $n - 1$ éléments arbitrairement choisis sous la seule restriction de n'être pas tous nuls, on peut, par l'application de l'alinéa II à un polynome linéaire et homogène dépendant de deux variables, adjoindre une deuxième ligne, $\lambda'', \mu'', \dots, \omega''$, telle que le tableau résultant,

$$\begin{array}{cccc} \lambda' & \mu' & \dots & \omega' \\ \lambda'' & \mu'' & \dots & \omega'' \end{array}$$

à $n - 1$ colonnes et deux lignes, contienne quelque déterminant du second ordre différent de zéro; puis, par l'application de l'alinéa II à un polynome linéaire et homogène dépendant de trois variables, adjoindre à ce dernier tableau une troisième ligne, λ''' , μ''' ..., ω''' , telle que le tableau résultant,

$$\begin{array}{cccc} \lambda', & \mu', & \dots, & \omega', \\ \lambda'', & \mu'', & \dots, & \omega'', \\ \lambda''', & \mu''', & \dots, & \omega''', \end{array}$$

à $n - 1$ colonnes et trois lignes, contienne quelque déterminant du troisième ordre différent de zéro; et ainsi jusqu'à ce que, par l'application de l'alinéa II à un polynome linéaire et homogène dépendant de $n - 1$ variables, on ait obtenu un tableau carré,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda', & \mu', & \dots, & \omega', \\ \lambda'', & \mu'', & \dots, & \omega'', \\ \dots & \dots & \dots, & \dots \\ \lambda^{(n-2)}, & \mu^{(n-2)}, & \dots, & \omega^{(n-2)}, \\ \lambda^{(n-1)}, & \mu^{(n-1)}, & \dots, & \omega^{(n-1)}, \end{array} \right.$$

formant un déterminant d'ordre $n - 1$ différent de zéro : il est alors manifeste que, dans le tableau (7), toute association de $n - 2$ lignes contient quelque déterminant d'ordre $n - 2$ différent de zéro.

Cela étant, on pourra, par l'application de l'alinéa II à plusieurs polynomes linéaires et homogènes dépendant de $n - 1$ variables, adjoindre au tableau (7) une ligne,

$$\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, \dots, \omega^{(n)},$$

telle que, dans le tableau résultant,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda', & \mu', & \dots, & \omega', \\ \lambda'', & \mu'', & \dots, & \omega'', \\ \dots & \dots & \dots, & \dots \\ \lambda^{(n-2)}, & \mu^{(n-2)}, & \dots, & \omega^{(n-2)}, \\ \lambda^{(n-1)}, & \mu^{(n-1)}, & \dots, & \omega^{(n-1)}, \\ \lambda^{(n)}, & \mu^{(n)}, & \dots, & \omega^{(n)}, \end{array} \right.$$

à $n - 1$ colonnes et n lignes, toute association de $n - 1$ lignes forme

un déterminant différent de zéro : il est alors manifeste que, dans le tableau (8), toute association de $n - 2$ lignes contient quelque déterminant d'ordre $n - 2$ différent de zéro.

Par une nouvelle application de l'alinéa II à plusieurs polynômes linéaires et homogènes dépendant de $n - 1$ variables, on pourra maintenant adjoindre au tableau (8) une ligne,

$$\lambda^{(n+1)}, \mu^{(n+1)}, \dots, \omega^{(n+1)},$$

telle que, dans le tableau résultant,

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda', & \mu', & \dots, & \omega', \\ \lambda'', & \mu'', & \dots, & \omega'', \\ \dots & \dots, & \dots & \dots, \\ \lambda^{(n-2)}, & \mu^{(n-2)}, & \dots, & \omega^{(n-2)}, \\ \lambda^{(n-1)}, & \mu^{(n-1)}, & \dots, & \omega^{(n-1)}, \\ \lambda^{(n)}, & \mu^{(n)}, & \dots, & \omega^{(n)}, \\ \lambda^{(n+1)}, & \mu^{(n+1)}, & \dots, & \omega^{(n+1)}, \end{cases}$$

à $n - 1$ colonnes et $n + 1$ lignes, toute association de $n - 1$ lignes forme un déterminant différent de zéro : il est alors manifeste que, dans le tableau (9), toute association de $n - 2$ lignes contient quelque déterminant d'ordre $n - 2$ différent de zéro.

Par une nouvelle application de l'alinéa II, on pourra de même, etc.

Ce mode de raisonnement peut, comme on le voit, être indéfiniment poursuivi.

IV. Revenons à notre énoncé général, et supposons que, pour toutes valeurs des $n - 1$ indéterminées (2), les deux équations (3) admettent quelque racine commune : il s'agit d'établir que les n équations (1) admettent nécessairement quelque racine commune.

En effet, puisque, pour toutes valeurs de $\lambda, \mu, \dots, \omega$, les deux équations (3) admettent quelque racine commune, et que, d'autre part, l'équation $A(x) = 0$ n'a pas tous ses coefficients nuls, cette dernière admet un nombre, m , de racines distinctes supérieur à zéro et au plus égal à a , et ces m racines sont, naturellement, indépendantes des valeurs attribuées aux indéterminées (2). Si, dans le tableau illimité (6), on considère $(n - 2)m + 1$ lignes quelconques, par exemple les

$(n - 2)m + 1$ premières, il y aura, pour chacun des $(n - 2)m + 1$ couples d'équations

$$\begin{aligned} A(x) = 0, & \quad \lambda' & B(x) + \mu' & C(x) + \dots + \omega' & L(x) = 0; \\ A(x) = 0, & \quad \lambda'' & B(x) + \mu'' & C(x) + \dots + \omega'' & L(x) = 0; \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots; \\ A(x) = 0, & \quad \lambda^{[n-2m+1]} & B(x) + \mu^{[n-2m+1]} & C(x) + \dots + \omega^{[n-2m+1]} & L(x) = 0, \end{aligned}$$

quelque racine commune aux deux équations du couple. D'ailleurs, l'équation $A(x) = 0$ ayant exactement m racines distinctes, il y aura, parmi ces $(n - 2)m + 1$ couples d'équations, $n - 1$ couples au moins pour lesquels la racine commune coïncidera avec une même racine, $x = \xi$, de l'équation $A(x) = 0$; en désignant donc par

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \dots & \omega_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \dots & \omega_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-1} & \mu_{n-1} & \dots & \omega_{n-1} \end{vmatrix}$$

un certain déterminant d'ordre $n - 1$ extrait du tableau (6), par suite différent de zéro, et par $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_{n-1}(x)$ certains polynômes entiers en x , on aura les $n - 1$ identités

$$\begin{aligned} \lambda_1 B(x) + \mu_1 C(x) + \dots + \omega_1 L(x) &= (x - \xi) Q_1(x), \\ \lambda_2 B(x) + \mu_2 C(x) + \dots + \omega_2 L(x) &= (x - \xi) Q_2(x), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1} B(x) + \mu_{n-1} C(x) + \dots + \omega_{n-1} L(x) &= (x - \xi) Q_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Or, la résolution de ces identités, effectuée conformément à l'algorithme de Cramer par rapport aux $n - 1$ polynômes $B(x), C(x), \dots, L(x)$, montre que ces derniers sont tous divisibles par $x - \xi$; il en résulte, ainsi que nous l'avions annoncé, que les n équations (1) admettent quelque racine commune.

6. LEMME II. — Soient

$$(10) \quad \begin{cases} H_0 x^h + H_1 x^{h-1} + \dots + H_{h-1} x + H_h = 0, \\ K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + \dots + K_{k-1} x + K_k = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

des équations algébriques à l'inconnue x , en nombre limité, et dont les

dégrés (apparents) respectifs, h, k, \dots , sont tous supérieurs à zéro; on suppose que, dans quelque-une d'entre elles, par exemple dans la première, le degré apparent est aussi le degré effectif, c'est-à-dire que le coefficient H_0 est différent de zéro.

Cela étant, pour que les équations (10) admettent quelque racine commune, il faut et il suffit que ces équations, mises, comme il suit, sous forme homogène,

$$(11) \quad \begin{cases} H_0 x^h + H_1 x^{h-1} y + \dots + H_{h-1} x y^{h-1} + H_h y^h = 0, \\ K_0 x^k + K_1 x^{k-1} y + \dots + K_{k-1} x y^{k-1} + K_k y^k = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

admettent quelque racine commune.

Effectivement, si les équations (10) admettent la racine commune $x = \xi$, les équations (11) sont manifestement vérifiées pour $x = \xi$, $y = 1$, et admettent dès lors la racine commune $(x, y) = (\xi, 1)$.

Inversement, supposons que les équations (11) admettent la racine commune $(x, y) = (x', y')$, où x', y' désignent des valeurs numériques non à la fois nulles. On voit tout d'abord que la valeur numérique y' ne peut être nulle: car, si elle l'était, x' serait différent de zéro, et la première équation (11) donnerait $H_0 x'^h = 0$, ce qui est impossible à cause de $H_0 \neq 0$. Notre hypothèse relative aux équations (11) et à leur racine commune peut donc se formuler en disant que ces équations sont toutes vérifiées pour $x = \frac{x'}{y'}$, $y = 1$, ce qui revient à dire que les équations (10) sont toutes vérifiées pour $x = \frac{x'}{y'}$.

7. Considérons maintenant n équations algébriques à l'inconnue x , par exemple les n équations (1), dont les degrés (apparents) respectifs, a, b, \dots, l , soient tous supérieurs à zéro, et proposons-nous de rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces n équations admettent quelque racine commune. Dans cette recherche nous examinerons d'abord le cas d'une équation unique, puis de deux équations; nous ferons voir ensuite que le cas de n équations ($n > 2$) se ramène à celui de $n - 1$ équations.

I. Pour que l'équation algébrique à l'inconnue x

$$A(x) = \Lambda_0 x^a + \Lambda_1 x^{a-1} + \Lambda_2 x^{a-2} + \dots + \Lambda_{a-1} x + \Lambda_a = 0,$$

dont le degré (apparent) a est supérieur à zéro, admette quelque racine, il faut et il suffit :

Ou bien que ses coefficients soient tous nuls ;

Ou bien que l'on ait $A_0 \neq 0$;

Ou bien que l'on ait $A_0 = 0, A_1 \neq 0$;

Ou bien que l'on ait $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0 ; \dots$;

Ou bien, enfin, que l'on ait $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_{a-2} = 0, A_{a-1} \neq 0$.

Par exemple :

Pour que l'équation

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0$$

admette quelque racine, il faut et il suffit : ou bien que ses coefficients A_0, A_1, A_2 soient tous nuls ; ou bien que l'on ait $A_0 \neq 0$; ou bien, enfin, que l'on ait $A_0 = 0, A_1 \neq 0$.

Pour que l'équation

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

admette quelque racine, il faut et il suffit : ou bien que ses coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 soient tous nuls ; ou bien que l'on ait $A_0 \neq 0$; ou bien que l'on ait $A_0 = 0, A_1 \neq 0$; ou bien, enfin, que l'on ait $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0$.

II. Pour que les deux équations algébriques à l'inconnue x

$$A(x) = A_0x^a + A_1x^{a-1} + A_2x^{a-2} + \dots + A_{a-1}x + A_a = 0,$$

$$B(x) = B_0x^b + B_1x^{b-1} + B_2x^{b-2} + \dots + B_{b-1}x + B_b = 0,$$

dont les degrés (apparents) a, b sont tous deux supérieurs à zéro, admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, la première ayant tous ses coefficients nuls, la deuxième admette quelque racine (I) ;

Ou bien que l'on ait $A_0 \neq 0$, et que les deux formes binaires

$$A_0x^a + A_1x^{a-1}y + A_2x^{a-2}y^2 + \dots + A_{a-1}xy^{a-1} + A_ax^0y^a,$$

$$B_0x^b + B_1x^{b-1}y + B_2x^{b-2}y^2 + \dots + B_{b-1}xy^{b-1} + B_by^b$$

aient un résultant nul ;

Ou bien que l'on ait $A_0 = 0$, $A_1 \neq 0$, et que les deux formes binaires

$$\begin{aligned} & A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} y + \dots + A_{a-1} x y^{a-2} + A_a y^{a-1}, \\ & B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned}$$

aient un résultant nul;

Ou bien que l'on ait $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$, et que les deux formes binaires

$$\begin{aligned} & A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x y^{a-3} + A_a y^{a-2}, \\ & B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned}$$

aient un résultant nul; etc.;

Ou bien, enfin, que l'on ait $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, ..., $A_{a-2} = 0$, $A_{a-1} \neq 0$, et que les deux formes binaires

$$\begin{aligned} & A_{a-1} x + A_a y, \\ & B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b \end{aligned}$$

aient un résultant nul.

Le simple rapprochement des n^{os} 6 (lemme II) et 3 suffit à mettre en évidence l'exactitude de cet énoncé.

III. Supposons actuellement n quelconque (> 2), et cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les n équations (1) admettent quelque racine commune.

Notre proposition du n^o 5 (lemme I) entraîne tout d'abord la conséquence suivante :

Pour que les n équations (1) (dont les degrés apparents a, b, \dots, l sont supérieurs à zéro) admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, la première, $A(x) = 0$, ayant tous ses coefficients nuls, les $n - 1$ équations restantes,

$$B(x) = 0, \quad C(x) = 0, \quad \dots, \quad L(x) = 0,$$

admettent quelque racine commune;

Ou bien que, la première n'ayant pas tous ses coefficients nuls, les deux équations

$$(12) \quad \begin{cases} A(x) = 0, \\ \lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x) = 0 \end{cases}$$

admettent, pour toutes valeurs de $\lambda, \mu, \dots, \omega$, quelque racine commune.

Cela étant, désignons par $\Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega)$ ce que devient le premier membre,

$$\lambda B(x) + \mu C(x) + \dots + \omega L(x),$$

de la dernière équation écrite, lorsqu'on lui donne la forme homogène par l'introduction d'une variable auxiliaire y ; autrement dit, et en supposant, ce qui est évidemment permis, que le degré b ne soit inférieur à aucun des degrés c, \dots, l , posons

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega) &= \lambda [B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b] \\ &+ \mu [C_0 x^c y^{b-c} + C_1 x^{c-1} y^{b-c+1} + \dots + C_{c-1} x y^{b-1} + C_c y^b] \\ &+ \dots \\ &+ \omega [L_0 x^l y^{b-l} + L_1 x^{l-1} y^{b-l+1} + \dots + L_{l-1} x y^{b-1} + L_l y^b]. \end{aligned}$$

En vertu de l'alinéa précédent, II, pour que, l'équation $A(x) = 0$ n'ayant pas tous ses coefficients nuls, les deux équations (12) admettent, pour toutes valeurs de $\lambda, \mu, \dots, \omega$, quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que l'on ait $A_0 \neq 0$, et que le résultant des deux formes

$$\begin{aligned} A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned}$$

aux indéterminées x, y , qui est lui-même une forme de degré a aux $n - 1$ indéterminées $\lambda, \mu, \dots, \omega$, s'annule pour toutes valeurs de ces dernières, c'est-à-dire (n° 5, I) ait tous ses coefficients nuls;

Ou bien que l'on ait $A_0 = 0, A_1 \neq 0$, et que le résultant des deux formes

$$\begin{aligned} A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} y + \dots + A_{a-1} x y^{a-2} + A_a y^{a-1}, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned}$$

aux indéterminées x, y , qui est lui-même une forme de degré $a - 1$ en $\lambda, \mu, \dots, \omega$, ait tous ses coefficients nuls;

Ou bien que l'on ait $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0$, et que le résultant des deux formes

$$\begin{aligned} A_2 x^{a-2} + \dots + A_{a-1} x y^{a-3} + A_a y^{a-2}, \\ \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned}$$

aux indéterminées x, y , qui est lui-même une forme de degré $a - 2$ en $\lambda, \mu, \dots, \omega$, ait tous ses coefficients nuls; etc.;

Ou bien, enfin, que l'on ait $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_{a-2} = 0, A_{a-1} \neq 0$, et que le résultant des deux formes

$$\begin{aligned} & A_{a-1}x + A_ax, \\ & \Psi(x, y, \lambda, \mu, \dots, \omega), \end{aligned}$$

aux indéterminées x, y , qui est lui-même une forme linéaire en $\lambda, \mu, \dots, \omega$, ait tous ses coefficients nuls.

La recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de quelque racine commune à n équations données se ramène donc bien, comme nous l'avons annoncé, à une recherche semblable effectuée dans le cas de $n - 1$ équations; et, comme elle a été résolue plus haut (II) pour le cas de deux équations, elle pourra l'être, de proche en proche, pour des équations en nombre quelconque.

8. Exemples d'élimination.

I. Pour que les deux équations du second degré

$$\begin{aligned} & A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0, \\ & B_0x^2 + B_1x + B_2 = 0, \end{aligned}$$

à l'inconnue x , admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, les coefficients, A_0, A_1, A_2 , de la première équation étant tous nuls, la deuxième admette quelque racine (n° 7, I);

Ou bien que, A_0 étant différent de zéro, le résultant des deux formes quadratiques

$$\begin{aligned} & A_0x^2 + A_1xy + A_2y^2, \\ & B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2 \end{aligned}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, II)

$$(A_0B_2 - B_0A_2)^2 - (A_0B_1 - B_0A_1)(A_1B_2 - B_1A_2) = 0;$$

Ou bien, enfin, que, A_0 étant nul et A_1 différent de zéro, le résultant

des deux formes

$$\begin{aligned} & A_1x + A_2y, \\ & B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2 \end{aligned}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, I)

$$B_2A_1^2 - A_2(A_1B_1 - A_2B_0) = 0.$$

II. Pour que les deux équations

$$\begin{aligned} & A_0x^2 + 2A_1x + A_2 = 0, \\ & B_0x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3 = 0, \end{aligned}$$

à l'inconnue x , admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, les coefficients, A_0, A_1, A_2 , de la première équation étant tous nuls, la deuxième admette quelque racine;

Ou bien que, A_0 étant différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\begin{aligned} & A_0x^2 + 2A_1xy + A_2y^2, \\ & B_0x^3 + 3B_1x^2y + 3B_2xy^2 + B_3y^3 \end{aligned}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, IV)

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 2A_1 & A_0 & 0 & 3B_1 & B_0 \\ A_2 & 2A_1 & A_0 & 3B_2 & 3B_1 \\ 0 & A_2 & 2A_1 & B_3 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & B_3 \end{vmatrix} = 0;$$

Ou bien, enfin, que, A_0 étant nul et A_1 différent de zéro, le résultant des deux formes

$$\begin{aligned} & 2A_1x + A_2y, \\ & B_0x^3 + 3B_1x^2y + 3B_2xy^2 + B_3y^3 \end{aligned}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, III)

$$\begin{vmatrix} 2A_1 & 0 & 0 & B_0 \\ A_2 & 2A_1 & 0 & 3B_1 \\ 0 & A_2 & 2A_1 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III. Pour que les trois équations du second degré

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0,$$

$$B_0x^2 + B_1x + B_2 = 0,$$

$$C_0x^2 + C_1x + C_2 = 0,$$

à l'inconnue x , admettent quelque racine commune, il faut et il suffit :

Ou bien que, les coefficients, $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$, des deux premières équations étant tous nuls, la troisième admette quelque racine;

Ou bien que, A_0, A_1, A_2 étant nuls et B_0 différent de zéro, le résultant des deux formes quadratiques

$$B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2,$$

$$C_0x^2 + C_1xy + C_2y^2$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, II)

$$(B_0C_2 - C_0B_2)^2 - (B_0C_1 - C_0B_1)(B_1C_2 - C_1B_2) = 0;$$

Ou bien que, A_0, A_1, A_2, B_0 étant nuls et B_1 différent de zéro, le résultant des deux formes

$$B_1x + B_2y,$$

$$C_0x^2 + C_1xy + C_2y^2$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, I)

$$C_2B_1^2 - B_2(B_1C_1 - B_2C_0) = 0;$$

Ou bien que, A_0 étant différent de zéro, le résultant des deux formes

$$A_0x^2 + A_1xy + A_2y^2,$$

$$(\lambda B_0 + \mu C_0)x^2 + (\lambda B_1 + \mu C_1)xy + (\lambda B_2 + \mu C_2)y^2$$

soit égal à zéro quels que soient λ, μ (n° 7, III), c'est-à-dire que l'on

ait (n° 4, II), quels que soient λ, μ ,

$$[A_0(\lambda B_2 + \mu C_2) - A_2(\lambda B_0 + \mu C_0)]^2 - [A_0(\lambda B_1 + \mu C_1) - A_1(\lambda B_0 + \mu C_0)][A_1(\lambda B_2 + \mu C_2) - A_2(\lambda B_1 + \mu C_1)] = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à λ et μ les quantités contenues dans les divers crochets,

$$\begin{aligned} & [\lambda(A_0 B_2 - B_0 A_2) + \mu(A_0 C_2 - C_0 A_2)]^2 \\ & - [\lambda(A_0 B_1 - B_0 A_1) + \mu(A_0 C_1 - C_0 A_1)] \\ & \times [\lambda(A_1 B_2 - B_1 A_2) + \mu(A_1 C_2 - C_1 A_2)] = 0, \end{aligned}$$

ou, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de λ, μ ,

$$\begin{aligned} & (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0, \\ & 2(A_0 B_2 - B_0 A_2)(A_0 C_2 - C_0 A_2) \\ & - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 C_2 - C_1 A_2) - (A_0 C_1 - C_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0, \\ & (A_0 C_2 - C_0 A_2)^2 - (A_0 C_1 - C_0 A_1)(A_1 C_2 - C_1 A_2) = 0; \end{aligned}$$

Ou bien, enfin, que, A_0 étant nul et A_1 différent de zéro, le résultant des deux formes

$$A_1 x + A_2 y, \\ (\lambda B_0 + \mu C_0)x^2 + (\lambda B_1 + \mu C_1)xy + (\lambda B_2 + \mu C_2)y^2$$

soit égal à zéro quels que soient λ, μ , c'est-à-dire que l'on ait (n° 4, I), quels que soient λ, μ ,

$$A_1^2(\lambda B_2 + \mu C_2) - A_2[A_1(\lambda B_1 + \mu C_1) - A_2(\lambda B_0 + \mu C_0)] = 0,$$

ou, en égalant à zéro le coefficient de λ et celui de μ ,

$$\begin{aligned} A_1^2 B_2 - A_2(A_1 B_1 - A_2 B_0) &= 0, \\ A_1^2 C_2 - A_2(A_1 C_1 - A_2 C_0) &= 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE II.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES, HOMOGÈNES, ET A COEFFICIENTS CONSTANTS; LEUR DISTINCTION EN DEUX ESPÈCES; DÉFINITION DE LEUR INTÉGRATION RESTREINTE; INTÉGRATION RESTREINTE DES SYSTÈMES QUI SONT A LA FOIS DE PREMIÈRE ESPÈCE ET DU PREMIER ORDRE.

Distinction des systèmes en deux espèces; définition de leur intégration restreinte.

9. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque impliquant diverses fonctions inconnues, u, v, \dots , des variables indépendantes x, y, \dots , et présentant, par rapport à ces inconnues et à leurs dérivées, la forme linéaire et homogène à coefficients constants : exclusion totale étant faite, dans ce qui va suivre, de la solution banale où toutes les inconnues sont identiquement nulles, nous dirons que le système considéré est *possible* ou *impossible* suivant qu'il admet, ou non, quelque autre solution.

Les intégrales générales d'un système possible dépendant, comme on sait, de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre fini, construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes x, y, \dots , et les colonnes aux fonctions arbitraires dont dépendent les intégrales générales; puis, dans la colonne qui correspond à l'une quelconque de ces arbitraires, noircissons à l'aide de hachures les cases situées dans les lignes correspondant aux diverses variables dont ne dépend pas (schématiquement) l'arbitraire considérée; et répétons l'opération successivement dans toutes les colonnes : nous obtiendrons ainsi une sorte de damier où les cases blanches et noires pourront offrir des dispositions relatives variées.

Un calcul limité permet, comme nous l'établirons plus loin (Chap. III), de reconnaître si le système donné est possible ou impossible, et, dans le cas de possibilité, d'en construire le damier.

Dans les systèmes possibles, nous distinguerons deux espèces, suivant que les intégrales générales dépendent de constantes arbi-

traires en nombre *limité* (première espèce) ou *illimité* (deuxième espèce).

Pour qu'un système possible soit de première espèce, il est évidemment nécessaire et suffisant que le damier construit d'après les indications précédentes ne renferme que des cases noires; les constantes arbitraires dont dépendent en pareil cas ses intégrales générales seront en même nombre que les colonnes du damier.

10. Supposons actuellement que le système considéré au début du numéro précédent soit résolu par rapport à diverses dérivées *premières* des fonctions inconnues u, v, \dots (les seconds membres étant d'ailleurs d'ordre quelconque); et écrivons-en les diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes x, y, \dots et les colonnes aux fonctions inconnues u, v, \dots , en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x): nous obtiendrons ainsi un Tableau où les cases vides et pleines pourront offrir des dispositions relatives variées. Supposons maintenant que le système dont il s'agit soit *complètement intégrable*: de la forme schématique (qui est ici on ne peut plus simple) des conditions initiales, il résulte immédiatement que le Tableau et le damier respectivement formés, l'un avec des cases vides et pleines conformément aux indications du présent numéro, l'autre avec des cases blanches et noires conformément aux indications du numéro précédent, sont, à part cela, identiques l'un à l'autre.

11. Dans le système envisagé, nous qualifierons d'*immédiate* toute solution (hypothétique) de la forme

$$\begin{cases} u = \psi^{r \cdot x + s \cdot y + \dots}, \\ v = \varphi^{r \cdot x + s \cdot y + \dots}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

où e désigne la base des logarithmes népériens, et

$$\begin{aligned} r, & \quad s, \quad \dots, \\ \psi, & \quad \varphi, \quad \dots, \end{aligned}$$

le système obtenu par l'application de ce mécanisme : nous allons examiner ce que deviennent les équations (4) et l'équation (5) quand on passe du système (1) au système (6).

En désignant par

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \mu_1, & \dots, & \omega_1, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \dots, & \omega_2, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \lambda_g, & \mu_g, & \dots, & \omega_g \end{matrix}$$

les g systèmes de multiplicateurs ci-dessus spécifiés, on a, entre les coefficients des deux systèmes, les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'_i = \lambda_i \alpha_1 + \mu_i \alpha_2 + \dots + \omega_i \alpha_g, \\ \beta'_i = \lambda_i \beta_1 + \mu_i \beta_2 + \dots + \omega_i \beta_g, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \eta'_i = \lambda_i \eta_1 + \mu_i \eta_2 + \dots + \omega_i \eta_g, \\ \alpha'_i = \lambda_i \alpha_1 + \mu_i \alpha_2 + \dots + \omega_i \alpha_g, \\ \beta'_i = \lambda_i \beta_1 + \mu_i \beta_2 + \dots + \omega_i \beta_g, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ h'_i = \lambda_i h_1 + \mu_i h_2 + \dots + \omega_i h_g \end{array} \right.$$

($i = 1, 2, \dots, g$).

On en déduit

$$\begin{aligned} r\alpha'_i - a'_i &= \lambda_i(r\alpha_1 - a_1) + \mu_i(r\alpha_2 - a_2) + \dots + \omega_i(r\alpha_g - a_g), \\ r\beta'_i - b_i &= \lambda_i(r\beta_1 - b_1) + \mu_i(r\beta_2 - b_2) + \dots + \omega_i(r\beta_g - b_g), \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ r\eta'_i - h'_i &= \lambda_i(r\eta_1 - h_1) + \mu_i(r\eta_2 - h_2) + \dots + \omega_i(r\eta_g - h_g) \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, g$);

il en résulte, si l'on a égard à la règle de multiplication des déterminants, que l'équation (5) se reproduit, multipliée par le déterminant, essentiellement différent de zéro, que forment les $\lambda, \mu, \dots, \omega$: les racines de l'équation (5) ne changent donc pas.

14. Effectuons maintenant dans le système (1) une transformation linéaire et homogène (à coefficients constants) des fonctions incon-

d'équations différentielles ordinaires auquel correspond une certaine équation caractéristique (n° 15); or, nous allons établir la propriété suivante :

L'intégration restreinte de S se ramène à la résolution des n équations caractéristiques qui correspondent respectivement aux n lignes (x), (y), ... Pour avoir les divers systèmes de valeurs de r, s, ... qui figurent dans les solutions immédiates du système, on écrira sur une première rangée les racines distinctes de l'équation caractéristique qui correspond à la ligne (x); sur une deuxième rangée, les racines distinctes de l'équation caractéristique qui correspond à la ligne (y); etc.; et l'on prendra, de toutes les manières possibles, une quantité, et une seule, dans chacune de ces n rangées.

Le cas élémentaire et classique d'une seule variable indépendante ayant été examiné dans ce qui précède (nos 12, 13, 14 et 15), il nous suffira d'établir que *si la proposition est vraie pour n — 1 variables indépendantes, elle l'est encore pour n variables.*

Les solutions cherchées de S devant être de la forme (1), effectuons tout d'abord, dans le système S, la transformation

$$(2) \quad u_1 = e^{rx} v_1, \quad u_2 = e^{rx} v_2, \quad \dots, \quad u_g = e^{rx} v_g.$$

où r désigne une constante provisoirement indéterminée, et v_1, v_2, \dots, v_g de nouvelles fonctions inconnues, assujetties à ne dépendre que des $n - 1$ variables y, \dots , à l'exclusion de x . En effectuant la transformation (2) sur les $n - 1$ lignes $(y), \dots$, on ne fera, après suppression du facteur commun e^{rx} , que reproduire ces $n - 1$ lignes elles-mêmes, à cela près que les notations u_1, u_2, \dots, u_g se trouveront respectivement remplacées par les notations v_1, v_2, \dots, v_g . D'ailleurs, le système S, où se trouvent engagées les n variables x, y, \dots , étant passif par hypothèse, on aperçoit immédiatement que le système, S' , formé par ces $n - 1$ nouvelles lignes, et où se trouvent engagées les $n - 1$ variables y, \dots , à l'exclusion de x , jouit de la même propriété. De ce système S' il faudra tout d'abord effectuer l'intégration restreinte; il faudra écrire ensuite que les solutions immédiates de S' , multipliées par e^{rx} , vérifient la ligne (x) du système S.

Or, de ce qui est provisoirement admis pour le cas de $n - 1$ variables indépendantes, résulte pour le système S' la propriété suivante :

L'intégration restreinte de S' se ramène à la résolution des $n - 1$ équations caractéristiques qui correspondent respectivement aux $n - 1$ lignes $(y), \dots$. Pour avoir les divers systèmes de valeurs de x, \dots qui figurent dans les solutions immédiates de S', on écrira sur une première rangée les racines distinctes de l'équation caractéristique qui correspond à la première ligne, (y) , du Tableau de S'; sur une deuxième rangée, les racines distinctes de l'équation caractéristique qui correspond à la ligne suivante; etc.; et l'on prendra, de toutes les manières possibles, une quantité, et une seule, dans chacune de ces $n - 1$ rangées.

Écrivons maintenant que les solutions immédiates de S', multipliées par e^{rx} , vérifient la ligne (x) du système S : après suppression du facteur commun $e^{r_1 x + \dots}$, on se trouve conduit à considérer, dans les formules (2), r, v_1, v_2, \dots, v_g comme des constantes provisoirement indéterminées, et à écrire que la ligne (x) du système S est vérifiée par les fonctions u_1, u_2, \dots, u_g ainsi définies; en d'autres termes, on se trouve conduit à effectuer l'intégration restreinte de la ligne (x) comme si x était la seule variable indépendante. *Les valeurs de r qui figurent dans les solutions immédiates de la ligne (x) , considérée isolément, ne sont autres d'ailleurs que les racines de l'équation caractéristique correspondante.*

Ce résultat, rapproché de celui qui vient d'être formulé relativement à S', suffit à établir le point que nous avons en vue.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION RESTREINTE DES SYSTÈMES DE PREMIÈRE ESPÈCE D'ORDRE QUELCONQUE.

Examen de la question de possibilité pour un système donné d'équations aux dérivées partielles; détermination de l'espèce d'un système possible.

(Nous nous bornerons, pour plus de simplicité, au cas où le système d'équations aux dérivées partielles proposé n'implique qu'une

fonction inconnue : ce cas est le seul que nous aurons à utiliser pour l'objet du présent travail.)

17. On peut, à l'aide d'un calcul limité dont nous allons indiquer le mécanisme, reconnaître si un système donné (présentant, par rapport à l'inconnue et à ses dérivées, la forme linéaire et homogène à coefficients constants) est possible ou impossible, et, dans le cas de possibilité, s'il est de première ou de deuxième espèce.

I. Nous dirons que deux systèmes (de la forme spécifiée) sont *analytiquement équivalents*, s'ils admettent la même intégrale générale (ce qui comprend le cas particulier où tous deux sont impossibles).

II. Si, dans un système (de la forme spécifiée) résolu par rapport à diverses dérivées de l'inconnue u , on attribue, conformément aux indications formulées dans la définition de l'orthonomie ⁽¹⁾, p cotes successives à chacune des variables indépendantes ⁽²⁾; si, de plus, chaque second membre ne contient, outre l'inconnue u , que des dérivées qui soient normales par rapport au premier membre correspondant : on peut, sans changer les cotes, en déduire un système orthonome (de même forme) analytiquement équivalent (I) au proposé, et composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.

(Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 214, V.)

III. Si l'on considère une fonction u des variables indépendantes x, y, \dots , et que l'on forme successivement, avec des dérivées de u , divers ensembles (limités) dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité.

(Voir *ibid.*, n° 214, VI.)

IV. En vue d'une démonstration aussi simple que possible de notre énoncé général, nous poserons les définitions suivantes :

⁽¹⁾ Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 104.

⁽²⁾ On aperçoit sans peine que, la fonction inconnue étant ici supposée unique, il n'y a pas à se préoccuper d'elle dans l'attribution des cotes.

Désignant par u une fonction inconnue des variables indépendantes x, y, \dots, z, t , adoptons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$x, y, \dots, z, t,$$

et rangeons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres de u . Sur cette ligne, nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. Désignant ensuite par $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à x, y, \dots, z, t , nous diviserons chacun de ces ensembles en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α ; puis chacun des ensembles partiels en sous-ensembles se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β ; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles définitifs se composera alors d'une dérivée unique, et les dérivées de tous ordres de u se trouveront rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous qualifierons de *taxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de u est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, selon que, dans la suite taxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système d'équations aux dérivées partielles impliquant une fonction inconnue (et présentant, par rapport à cette inconnue et à ses dérivées, la forme linéaire et homogène à coefficients constants) sera dit *taxique*, s'il se trouve résolu par rapport à diverses dérivées de l'inconnue, et si l'on peut trouver pour les variables indépendantes un ordre tel, que chaque second membre ne contienne, outre l'inconnue, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.

Un pareil système est nécessairement orthonome. (Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 215, I.)

V. Revenons à notre énoncé général.

Désignant par Σ le système proposé, où se trouve engagée l'in-

connue u , et considérant la suite taxique, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations de Σ , nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes : nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système, Σ' , contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée ni aucune des dérivées situées à sa gauche dans la suite taxique. Nous considérerons, parmi les dérivées restantes, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans Σ' , nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de Σ' où elle figure, et nous en porterons la valeur tant dans les équations restantes que dans la première formule de résolution, ce qui nous donnera, outre les deux formules obtenues par résolutions successives, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En d'autres termes, nous déduirons des équations données, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique, et il arrivera alors de deux choses l'une : ou bien on finira par tomber sur la relation $u = 0$, auquel cas le système Σ sera impossible; ou bien le système Σ se trouvera remplacé par un système taxique, \mathfrak{C} .

Si le système \mathfrak{C} n'est point passif, on considérera, parmi les conditions de passivité, celles qui ne se réduisent pas à des identités, et l'on observera qu'elles constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé Σ doivent nécessairement satisfaire. De ces relations on déduira alors, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique; si, au cours de ce calcul, on tombe sur la relation $u = 0$, le système proposé est impossible; dans le cas contraire, on adjoindra au système \mathfrak{C} les formules dont il vient d'être question, et l'on substituera au système global ainsi formé, où les équations sont toutes normales, un système taxique, \mathfrak{C}' , composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres (II). Si le système \mathfrak{C}' n'est point passif, on le traitera comme le système \mathfrak{C} , et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on tombe, soit sur la relation $u = 0$, indiquant l'impossibilité du système proposé, soit sur un système passif :

or, l'une ou l'autre de ces deux dernières circonstances ne pourra manquer de se produire après un nombre limité d'opérations. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, le mécanisme du calcul engendrerait une suite *illimitée* de systèmes taxiques et non passifs; en comparant entre eux deux systèmes consécutifs de cette suite, on trouverait dans le second deux groupes : l'un composé d'équations en nombre égal à celles du premier système et ayant respectivement les mêmes premiers membres, l'autre résolu par rapport à des dérivées paramétriques du premier. En vertu de l'alinéa III, toutes les dérivées de l'inconnue u finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne pourraient plus fournir alors que la relation $u = 0$, ce qui est contradictoire.

Cette alternative une fois établie, un mot suffit pour achever la démonstration de notre énoncé général.

Si, au cours du calcul, on tombe sur la relation $u = 0$, le système proposé Σ est impossible.

Dans le cas contraire, le système Σ se trouve finalement remplacé par un certain système taxique passif; dans ce dernier système d'ailleurs, la simple connaissance des premiers membres fournit, à l'aide d'un calcul élémentaire, la forme schématique de la détermination initiale de l'intégrale : suivant que, dans la détermination initiale ainsi calculée, figure un nombre limité ou illimité de constantes arbitraires, le système possible Σ sera de première ou de deuxième espèce.

Intégration restreinte d'un système quelconque de première espèce.

18. Désignant par u la fonction inconnue et par x, y, \dots les n variables indépendantes, nous avons nommé *intégration restreinte* d'un système possible la recherche des solutions *immédiates*, c'est-à-dire des solutions de la forme

$$(1) \quad u = v e^{rx+sy+\dots},$$

où r, s, \dots, v désignent $n + 1$ constantes, la dernière, v , étant expressément assujettie à *n'être pas nulle*.

L'intégration restreinte d'un système possible revient évidemment

à celle d'un système taxique passif qui lui soit équivalent au point de vue de l'intégration générale : nous nous bornerons ici au cas d'un système taxique passif de première espèce, et, désignant par g le nombre des constantes arbitraires dont dépend son intégrale générale, nous établirons la proposition suivante :

1° *L'intégration restreinte d'un système taxique passif de première espèce se ramène à l'intégration restreinte d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre (linéaire, homogène, et à coefficients constants) impliquant g fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes.*

2° *Les systèmes de valeurs de r, s, \dots figurant dans les solutions immédiates des deux systèmes respectifs (voir la définition rappelée ci-dessus et celle que nous avons posée au n° 11) sont les mêmes de part et d'autre.*

I. Dans la démonstration ci-après exposée, nous désignerons par Σ le système taxique passif donné, et par S le système total passif du premier ordre qu'on se propose de lui substituer; les diverses équations de S devront être écrites, conformément aux équations du n° 10, dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, et nous ne nous occuperons tout d'abord que des premiers membres.

L'économie des conditions initiales ayant été fixée dans le système taxique passif Σ , soit $\frac{\partial^{\alpha+r+\dots} u}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta\dots}}$ l'un des premiers membres figurant dans les conditions dont il s'agit. Cela étant, nous prendrons, dans S , pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta\dots}}$, que nous désignerons par $u_{\alpha,\beta,\dots}$; puis, dans les cases successives, $(x), (y), \dots$, de la colonne $(u_{\alpha,\beta,\dots})$ nous écrirons les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x} = \dots, \quad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial y} = \dots, \quad \dots$$

Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales, nous le ferons pour toutes les autres. Notre quadrillage rectangulaire ne contiendra ainsi que des cases pleines, et, quelques seconds membres que nous y écrivions ultérieurement, on voit dès maintenant que si l'on considère, d'une part, dans l'ancien système, l'ensemble formé

par l'inconnue u et ses dérivées paramétriques, d'autre part, dans le nouveau, l'ensemble formé par les inconnues, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours aux notations près, *l'économie des conditions initiales sera la même dans les deux systèmes*. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, aux notations près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système S.

Si, pour fixer les idées, on considère l'équation qui, dans S, a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x}$, ce premier membre coïncide, à la notation près, avec une dérivée ancienne, $\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta \dots}}$, qui est nécessairement identique, soit (si elle est paramétrique) au premier membre de quelque condition initiale de Σ , soit (dans le cas contraire) à quelque dérivée principale de Σ . Dans le premier cas, elle coïncide, à la notation près, avec quelque inconnue adjointe de S, et nous égalons alors $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x}$ à cette inconnue adjointe. Dans le second cas, elle admet une expression (unique) présentant la forme linéaire et homogène, à coefficients constants, par rapport à l'ensemble que forment, dans le système Σ , l'inconnue u et ses dérivées paramétriques; nous remplacerons, dans cette expression, toutes les dérivées paramétriques de Σ par les fonctions inconnues de S qui leur correspondent respectivement, et nous égalons $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée.

Tel est le système différentiel total du premier ordre, linéaire, homogène, et à coefficients constants, auquel fait allusion notre énoncé. Dans les deux systèmes Σ et S, l'économie des conditions initiales est, comme nous l'avons dit, identique aux notations près; d'autre part, à toute solution de Σ en correspond une de S, qui s'en déduit par la simple adjonction aux inconnues de Σ de leurs dérivées paramétriques; finalement, il résulte de nos hypothèses sur le système Σ que ce dernier est complètement intégrable: or le simple rapprochement de ces trois faits montre que le système S est bien, comme le dit notre énoncé,

complètement intégrable, et que l'intégration générale de Σ se ramène à celle de S.

Cette conclusion s'applique d'ailleurs aussi, comme nous allons le voir, à l'intégration restreinte.

Supposons en effet que le système Σ admette la solution immédiate $u = \upsilon e^{r'x + sy' + \dots}$, où υ est différent de zéro. En vertu même du mécanisme à l'aide duquel S a été déduit de Σ , si l'on désigne par

$$\dots, u_{\alpha, \beta, \dots}, \dots$$

les inconnues adjointes de S, ce dernier système admettra la solution

$$u = \upsilon e^{r'x + sy' + \dots}, \dots, u_{\alpha, \beta, \dots} = \frac{\partial^{\alpha + \beta + \dots} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \dots} = \upsilon r'^{\alpha} s^{\beta} \dots e^{r'x + sy' + \dots}, \dots,$$

où, par suite de l'hypothèse relative à υ , les constantes

$$\upsilon, \dots, \upsilon r'^{\alpha} s^{\beta} \dots, \dots$$

ne sont pas toutes nulles.

Inversement, supposons que le système S admette la solution immédiate

$$u = \upsilon e^{r'x + sy' + \dots}, \dots, u_{\alpha, \beta, \dots} = \upsilon_{\alpha, \beta, \dots} e^{r'x + sy' + \dots}, \dots,$$

où les constantes

$$\upsilon, \dots, \upsilon_{\alpha, \beta, \dots}, \dots$$

ne sont pas toutes nulles. Pour la même raison que ci-dessus, le système Σ admettra la solution $u = \upsilon e^{r'x + sy' + \dots}$, et l'on aura en outre les relations

$$\dots, u_{\alpha, \beta, \dots} = \frac{\partial^{\alpha + \beta + \dots} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \dots}, \dots,$$

c'est-à-dire

$$\dots, \upsilon_{\alpha, \beta, \dots} e^{r'x + sy' + \dots} = \upsilon r'^{\alpha} s^{\beta} \dots e^{r'x + sy' + \dots}, \dots,$$

d'où l'on tire, finalement,

$$\dots, \upsilon_{\alpha, \beta, \dots} = \upsilon r'^{\alpha} s^{\beta} \dots, \dots$$

Si donc la constante υ , qui figure dans la solution de Σ , était nulle, les constantes

$$\upsilon, \dots, \upsilon_{\alpha, \beta, \dots}, \dots,$$

(où υ , conformément à une définition posée, désigne une constante non nulle, évidemment arbitraire). Et ainsi, *la recherche des solutions numériques du système algébrique (1) se ramène à l'intégration restreinte du système différentiel partiel (2), et réciproquement.*

Opérons en effet dans le système (2) la substitution (4) : comme on a

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} [\upsilon e^{\alpha X+\beta Y+\dots}]}{\partial X^\alpha \partial Y^\beta \dots} = \upsilon x^\alpha y^\beta \dots e^{\alpha X+\beta Y+\dots},$$

le résultat de cette substitution peut manifestement s'obtenir en introduisant dans le système (1) l'hypothèse numérique (3), et multipliant chacune des relations obtenues par le facteur différent de zéro $\upsilon e^{\alpha X+\beta Y+\dots}$. On en déduit immédiatement notre énoncé.

20. *Si donc le système (2) est possible, et que son intégrale générale dépende d'un nombre limité, g , de constantes arbitraires, la résolution numérique du système (1) se ramène au cas remarquable de l'intégration restreinte qui fait l'objet du n° 18, et, par suite (n° 16), à la résolution numérique d'un système de n équations algébriques de degré g , impliquant respectivement n inconnues différentes.*

Cas général.

21. *La recherche des solutions numériques d'un système quelconque d'équations algébriques entières, à un nombre quelconque, n , d'inconnues, se ramène à la considération exclusive du cas fondamental, formulé au numéro précédent.*

I. *La proposition est vraie pour $n = 1$.*

Soit

$$(1) \quad \begin{cases} A_0 x^a + A_1 x^{a-1} + \dots + A_{a-1} x + A_a = 0, \\ B_0 x^b + B_1 x^{b-1} + \dots + B_{b-1} x + B_b = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

le système proposé.

Si les constantes A, B, ... sont toutes nulles, le système (1) est vérifié pour toute valeur numérique de l'inconnue x .

Si quelqu'une des constantes A, B, ... est différente de zéro, on fait correspondre au système (1), par l'application du mécanisme indiqué au n° 19, le système des équations différentielles simultanées

$$(2) \quad \begin{cases} A_0 \frac{d^a u}{dX^a} + A_1 \frac{d^{a-1} u}{dX^{a-1}} + \dots + A_{a-1} \frac{du}{dX} + A_a u = 0, \\ B_0 \frac{d^b u}{dX^b} + B_1 \frac{d^{b-1} u}{dX^{b-1}} + \dots + B_{b-1} \frac{du}{dX} + B_b u = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

impliquant la fonction inconnue *u* de la variable indépendante X. Cela étant, de deux choses l'une :

Ou bien le système (2) est impossible, et n'admet, par suite, aucune intégrale de la forme $u = \nu e^{\nu X}$ ($\nu \neq 0$); le système (1) n'admet alors aucune solution numérique;

Ou bien, le système (2) étant possible, son intégrale générale dépend d'un nombre limité de constantes arbitraires; on se trouve alors ramené, pour la résolution numérique du système (1), au cas fondamental.

II. *Si la proposition est vraie pour n - 1 inconnues, elle l'est encore pour n inconnues, x, y, ...*

Effectivement, le système proposé, S, peut s'écrire sous la forme (1), où les A, B, ... désignent des fonctions algébriques entières de y, ... L'élimination de *x* (Chap. I) effectuée entre les N équations de S, fournit divers systèmes de conditions nécessaires et suffisantes, dans chacun desquels ne peuvent figurer que les *n - 1* inconnues y, ..., à l'exclusion de *x* : soit σ l'un de ces systèmes de conditions. En vertu de ce qui est provisoirement admis pour *n - 1* inconnues, le système σ est résoluble par le seul recours au cas fondamental; si on le suppose vérifié pour $y, \dots = y', \dots$, et que l'on fasse $y, \dots = y', \dots$ dans les coefficients A, B, ... du système (1), on tombe sur un système algébrique (nécessairement possible) à la seule inconnue *x*, résoluble, en vertu de I, par le seul recours à ce même cas.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à mettre en évidence l'exactitude générale de la proposition formulée.