

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. STOÏLOW

Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 45 (1928), p. 347-382

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1928_3_45__347_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
LES TRANSFORMATIONS CONTINUES
ET
LA TOPOLOGIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR M. S. STOÏLOW

Introduction et considérations générales.

Dans le plan des variables x et y considérons une *région* : r . D'une façon précise, nous entendrons par ce terme un ensemble ouvert, tel que deux quelconques de ses points puissent être joints par un chemin continu dont tout point appartienne à l'ensemble. C'est ce que l'on appelle quelquefois un domaine ouvert. Pour abréger le discours, ainsi que pour éviter toute confusion possible, nous préférons réserver le nom *domaine* (qui reviendra souvent dans la suite) à la notion que l'on désigne quelquefois par domaine fermé, c'est-à-dire à l'ensemble formé par une région et sa frontière. A ce propos rappelons que les points frontière (dont l'ensemble constitue la frontière) sont les points limites de la région qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la région (parmi ces points pouvant se trouver le point à l'infini).

Cette dernière expression a ici la même signification que dans la théorie des fonctions analytiques. Toute région non bornée, c'est-à-dire non comprise à l'intérieur d'un cercle fini, a le point à l'infini pour point frontière.

1. Soient

$$(1) \quad X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

deux fonctions définies et continues en tout point de la région r .

La transformation qu'elles définissent sera dite une *transformation intérieure* si elle satisfait aux deux conditions :

1° Tout point intérieur d'un domaine quelconque compris dans r se transforme par (1) en un point intérieur du transformé de ce domaine dans le plan (X, Y) .

2° Tout continu compris dans r se transforme par (1) en un continu (c'est-à-dire jamais en un point unique).

Cela revient à dire que les transformations intérieures sont complètement caractérisées par leurs deux invariants : la région et le continu. De la première condition il résulte, en effet, que toute région comprise dans r se transforme par (1) en région du plan (X, Y) . Nous désignerons par R la région transformée de r même.

Le domaine borné est aussi un invariant pour les transformations intérieures. Mais l'invariance de ce concept est une condition plus large que l'invariance de la région. Par exemple la transformation $X = x^2$, $Y = y$ conserve les domaines et ne conserve pas les régions traversées par oy .

Une transformation continue qui ne satisfait qu'à la première condition de plus haut ne peut jamais transformer en un point (ou même en courbe simple) un continu superficiel. Mais il se pourrait qu'une telle transformation fit correspondre un point à un continu linéaire. Nous en donnerons un exemple à la fin de ce Mémoire.

2. Les fonctions analytiques : $X + iY = f(x + iy)$ sont, dans leur région de régularité, des transformations intérieures. Les transformations biunivoques et bicontinues sont également des transformations intérieures ⁽¹⁾ que nous appellerons dans la suite transformations *topologiques*.

Une propriété quelconque d'une transformation donnée sera dite topologique si elle subsiste pour les transformations obtenues en faisant subir aux variables x, y et X, Y des transformations topolo-

(1) Cela résulte d'un théorème de SCHOENFLIESS (*Goettinger Nachrichten*, 1899, p. 282). Voir aussi une Note de M. J. HADAMARD, *Sur l'indice de Kroneker* dans le tome II de *l'Introduction à la théorie des fonctions* de J. TANNERY.

giques quelconques. Dans ces propriétés n'intervient donc aucune considération de mesure. Leur étude constitue la *topologie* ou l'*Analysis situs*. En particulier les propriétés exprimées par chacune des conditions qui entrent dans la définition des transformations intérieures sont d'ordre topologique; de plus elles se conservent par substitution de ces transformations l'une dans l'autre de sorte que *les transformations intérieures forment un groupe*.

Les fonctions analytiques régulières dans une région en forment un sous-groupe. Nous verrons, et ce sera le but principal de ce travail que de le montrer, comment plusieurs propriétés topologiques de ce sous-groupe subsistent sans changements ou avec quelques modifications, pour le groupe général des transformations intérieures.

3. Une première remarque tirée immédiatement de la définition même des transformations intérieures (1) est déjà de nature à nous suggérer l'idée de cette analogie.

Soit $F(X, Y)$ une fonction continue définie dans R et n'y ayant jamais de maximum (au sens large), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point (X_0, Y_0) dans R tel qu'au voisinage de ce point on ait

$$(2) \quad F(X_0, Y_0) \geq F(X, Y).$$

Je dis que (1) étant une transformation intérieure, la fonction $F[x(x, y), Y(x, y)]$ définie et continue dans r n'y a de maximum (au sens large) en aucun point. Ce sera même une conséquence de la première condition seule. En effet, si en (x_0, y_0) la fonction atteignait son maximum, il existerait un petit cercle ayant ce point pour centre, situé dans r et à l'intérieur duquel on aurait

$$F[X(x_0, y_0), Y(x_0, y_0)] \geq F[X(x, y), Y(x, y)].$$

Soit (X_0, Y_0) le transformé de (x_0, y_0) . Le cercle se transforme en un domaine pour lequel (X_0, Y_0) est point intérieur. Il y aurait donc un cercle ayant ce point pour centre dans lequel la relation (2) serait satisfaite, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela signifie que si δ est un domaine compris dans r la fonction $F[X(x, y), Y(x, y)]$ atteint son maximum sur la frontière de δ . Si l'on prend pour $F(X, Y)$ la fonction $+\sqrt{X^2 + Y^2}$, on obtient le principe

bien connu du maximum du module qui subsiste donc pour les transformations intérieures.

Il est clair que l'on peut remplacer le maximum par le minimum. Si l'on prend une fonction $F(X, Y)$ n'ayant ni maximum ni minimum, la fonction obtenue par substitution de (1) atteindra son maximum aussi bien que son minimum, seulement sur la frontière de δ . Prenons alors pour $F(X, Y)$ la fonction X et la fonction Y ; on aura la généralisation d'une propriété bien connue des fonctions harmoniques.

Les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ d'une transformation intérieure ne peuvent donc être choisies arbitrairement. De plus, deux fonctions possédant chacune la propriété rappelée des fonctions harmoniques, ne peuvent être associées arbitrairement si l'on veut qu'elles définissent une transformation intérieure.

4. Dans la première partie de ce travail j'établis le théorème fondamental des transformations intérieures dont se déduiront, directement ou par l'intermédiaire d'autres considérations, la plus grande partie des résultats suivants. J'en fais immédiatement deux premières applications.

La deuxième partie est consacrée au problème de l'inversion. On verra que l'ensemble des points de r qui se transforment en un même point de R est formé de points isolés. De même les points autour desquels l'inversion de (1) conduit à plusieurs transformations, d'ailleurs toujours en nombre fini, sont encore isolés dans r , tout comme les zéros des dérivées des fonctions analytiques. D'une manière générale, les propriétés étudiées dans cette partie ont un caractère local.

Il en sera tout autrement des questions qui feront l'objet de la troisième partie. Tout ce Chapitre est consacré à des propositions qui ont leur origine dans le théorème de M. Picard sur les fonctions entières, mais la région r étant supposée ici seulement à connexion simple, ce sont les propriétés communes aux fonctions holomorphes définies dans une telle région, d'ailleurs quelconque, qui seront visées. Des résultats de la plus haute importance ont été obtenus ces dernières années dans cet ordre d'idées (1), résultats qui sont presque exclusi-

(1) Voir par exemple : A. BLOCH, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité* (Memorial des Sciences mathématiques).

vement d'ordre métrique. Nous verrons qu'on peut dire certaines choses concernant des faits purement topologiques. Il y a d'ailleurs, à ce point de vue, identité complète entre le plan entier et une région quelconque simplement connexe, de sorte que la notion de fonction entière ne sera pas plus spécialement envisagée ici.

Nous établirons, entre autres, que les valeurs (représentées par les points de R) qui ne sont pas asymptotiques sont prises dans r un nombre infini de fois si la transformation satisfait à certaines conditions qui rappellent ce qui se passe dans le cas des fonctions entières. Il en sera ainsi, par exemple, si R n'est pas simplement connexe, ou bien si à l'intérieur de R il existe une valeur asymptotique. Ce sont, comme on sait, des cas qui ne peuvent se présenter si la fonction entière est un polynome.

Dans le cas où aucune de ces conditions ne serait satisfaite l'on peut encore dire quelque chose sur le nombre maximum de fois qu'est prise une valeur quelconque de R si l'on connaît ce nombre pour deux valeurs particulières.

5. Il est nécessaire cependant d'attirer l'attention sur un point : tous les résultats obtenus dans la dernière partie exigent — du moins quant aux démonstrations — une restriction concernant la nature de la distribution des valeurs asymptotiques dans R . Il sera suffisant de supposer, par exemple, que cet ensemble est ponctuel; c'est ce que j'ai fait, quoique la portée des démonstrations aille souvent bien au delà de ce cas. Je ne saurais dire si les résultats subsistent dans le cas d'un ensemble de valeurs asymptotiques quelconque, comme il en est dans le cas particulier des fonctions entières (dont on sait que les valeurs asymptotiques peuvent couvrir tout le plan).

Une partie des résultats contenus dans ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences (1).

I. — Le théorème fondamental.

1. Comme jusqu'ici, nous allons toujours désigner dans la suite par les lettres majuscules les transformés dans R des domaines ou

(1) *Comptes rendus*, séance du 18 juillet 1927 et du 5 mars 1928.

des points de r . Par transformé d'un élément quelconque de r nous entendrons toujours l'élément qui lui correspond dans R par une transformation intérieure (1).

La région r sera toujours supposée simplement connexe, c'est-à-dire telle qu'on puisse l'obtenir par une transformation topologique du plan (x, y) tout entier. Faisons toutefois remarquer d'avance que, parmi les résultats que l'on obtiendra ainsi, ceux qui auront un caractère local seront indépendants de cette hypothèse : on peut, en effet, dans une région quelconque autour d'un point quelconque, découper toujours une région simplement connexe. Toute région qui n'est pas simplement connexe sera dite à *connexion multiple*.

Considérons, dans r , un chemin continu tendant vers la frontière de r . D'une façon précise, nous entendrons par là une courbe continue située dans r , définie au moyen de deux fonctions continues d'un paramètre, telles que, si la valeur de ce paramètre est assez grande, les points correspondants de la courbe restent à l'extérieur d'un domaine borné arbitrairement donné d'avance, compris avec sa frontière à l'intérieur de r . Il n'est donc pas exigé que le point variable sur la courbe s'approche indéfiniment d'un point déterminé de la frontière de r , mais seulement de cette frontière elle-même. Si alors le point transformé tend vers un point bien déterminé, nous dirons que ce point est une *valeur asymptotique* de la transformation et que la courbe en est un chemin de détermination. Une valeur asymptotique pourra être intérieure à R ou bien sur la frontière de R . Nous aurons à envisager surtout les premières. Les points intérieurs à R seront dits des *valeurs prises* par la transformation; les points frontière de R , des *valeurs exceptionnelles* de la transformation.

Toute cette terminologie est comme on voit empruntée à la théorie des fonctions entières.

2. Considérons un domaine Δ , borné et *situé dans* R (1). Soient A un point intérieur de Δ et a un point de r qui se transforme en A . L'ensemble des points de r , accessibles par des chemins continus

(1) Cette expression signifiera toujours que le domaine, *y compris sa frontière*, est situé à l'intérieur de R .

partant de a , intérieurs à r et tels que les chemins transformés restent à l'intérieur de Δ , cet ensemble forme une région faisant partie de r .

Si l'on ajoute à cette région sa frontière, on forme un domaine que j'appellerai *domaine maximum* de Δ par rapport à a et que je désignerai par (Δ, a) . Si le domaine (Δ, a) est borné et situé dans r , nous dirons que ce domaine maximum est *normal*. Nous n'aurons dans la suite à envisager que des domaines maxima normaux ⁽¹⁾. Faisons immédiatement trois remarques sur ces domaines, qui seront utiles un peu plus loin.

Première remarque. — Tout domaine maximum normal se transforme en Δ tout entier. En effet, puisque chacun de ses points est intérieur à r , chacun possède un transformé dans R . Le domaine transformé de (Δ, a) ne peut évidemment pas contenir des points extérieurs à Δ . Si ce transformé n'occupait qu'une partie de Δ , il y aurait certainement un point frontière K de ce transformé qui serait intérieur à Δ . K provient de la transformation d'un point k de (Δ, a) . k ne peut être sur la frontière de (Δ, a) , car alors ce dernier ne serait plus domaine maximum pouvant être étendu au delà de k . D'autre part k ne peut être intérieur à (Δ, a) car K est un point frontière du transformé de (Δ, a) et alors la transformation ne serait pas intérieure. Le point K ne peut donc exister à l'intérieur de Δ et le transformé de (Δ, a) s'étend par conséquent sur tout Δ , car ce transformé est aussi un domaine. Les frontières de (Δ, a) et de Δ se correspondent donc par la transformation.

Deuxième remarque. — Si b est un point intérieur quelconque de (Δ, a) le domaine (Δ, b) se confond avec (Δ, a) . En effet, le transformé B de b est alors dans Δ et la remarque est évidente d'après la définition du domaine maximum.

Troisième remarque. — Quel que soit le point a dans r , il existe, dans R , un cercle Γ_a de centre A et de rayon assez petit, tel que le domaine maximum par rapport à a de n'importe quel domaine compris dans ce cercle soit un domaine normal. En effet, d'après la

⁽¹⁾ De même tout *domaine* envisagé à partir de maintenant sera *borné*.

deuxième condition des transformations intérieures il n'existe pas de continu se transformant en A. Il est donc possible de décrire, dans r , autour de a , une courbe fermée simple telle qu'aucun de ses points ne se transforme en A. Soit alors ρ la distance minima de A à la transformée de cette courbe. Il suffira de prendre le rayon de Γ_a inférieur à ρ .

Ces remarques préliminaires faites nous allons maintenant aborder le théorème fondamental.

3. Le cercle ⁽¹⁾ Γ_a tel qu'il a été choisi possède lui-même un domaine maximum normal (Γ_a, a) . Soient B un second point intérieur à Γ_a et Σ un arc de courbe simple entièrement situé à l'intérieur de Γ_a et ayant les extrémités A et B. *Il existe, alors, un arc simple σ ayant pour extrémité le point a (et un certain point b de (Γ_a, a) se transformant en B), arc entièrement situé à l'intérieur de (Γ_a, a) , et se transformant par (1) en Σ d'une manière biunivoque et bicontinue.*

Soit $(0, 1)$ l'intervalle dans lequel varie le paramètre t de l'arc Σ ($t=0$ en A et $t=1$ en B). Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en 2^n parties égales, n étant un entier positif quelconque. Soient Σ_n^i ($i=1, 2, 3, \dots, 2^n$) les arcs ainsi déterminés comme parties de Σ , et ε_n un nombre positif plus petit que $\frac{1}{n}$. Autour de chaque point de Σ_n^i comme centre, décrivons des cercles de rayon ε_n , ces quantités étant choisies assez petites pour que tous ces cercles soient intérieurs à Γ_a . Soit Δ_n^i le domaine formé par l'ensemble de ces cercles. On pourra évidemment prendre ε_n assez petit pour que deux domaines Δ_n^i (correspondant à la même valeur de n) n'aient de point commun que si les arcs Σ_n^i correspondants ont une extrémité commune. Nous ferons la même chose pour toute valeur de n ayant soin de prendre encore ε_{n+1} assez petit par rapport à ε_n pour que, en plus des conditions de plus haut, chaque Δ_{n+1}^i soit entièrement compris dans Δ_n^i si l'arc Σ_{n+1}^i correspondant au premier est une partie de l'arc Σ_n^i qui correspond au second. Quand on fait tendre n vers l'infini, Δ_n^i tend ainsi vers zéro dans toutes ses

(1) Par *cercle* nous entendrons toujours le *domaine* (l'intérieur du cercle et la circonférence).

dimensions et une suite de domaines Δ_n^i , emboîtés les uns dans les autres, aura pour partie commune un seul point de Σ . Réciproquement, tout point de Σ pourra être obtenu de cette façon.

Les domaines Δ_n^i , où n a une valeur fixe et i prend toutes les valeurs de 1 à 2^n , forment ce que nous appellerons une *chaîne*. Toutes ces chaînes sont situées à l'intérieur de Γ_a . Nous allons leur faire correspondre, dans (Γ_a, a) , d'autres chaînes de domaines δ_n^i dont chacun sera maximum pour le Δ_n^i de même n et de même i . A cet effet nous construisons d'abord le domaine maximum (Δ_n^i, a) relatif au point a et au premier domaine de la chaîne des Δ_n^i , chaîne que nous désignerons par $\{\Delta_n^i\}$. Il y aura dans ce domaine (normal d'après la troisième remarque de plus haut) un point a_1 au moins (d'après la première remarque) qui se transformera en le point $t = \frac{1}{2^n}$ de Σ , car celui-ci est intérieur à Δ_n^1 . Il y aura en général plusieurs points tels que a_1 , c'est-à-dire correspondant au même point de Σ , mais l'ensemble de ces points sera fermé. Construisons tous les domaines (Δ_n^i, a_1) relatifs à Δ_n^i (qui contient le point $t = \frac{2^n}{1}$) et à tous les points a_1 de (Δ_n^1, a) . Je dis qu'il n'y aura qu'un nombre fini de domaines (Δ_n^i, a_1) , même si les a_1 sont en nombre infini. On peut, en effet, décrire autour de chaque a_1 un cercle ayant cet a_1 pour centre et se transformant en un domaine intérieur à Δ_n^i . D'après le théorème de Borel-Lebesgue on peut remplacer cette infinité de cercles par un nombre fini d'entre eux de façon que chaque a_1 soit intérieur à l'un de ces derniers cercles. On voit alors, d'après la deuxième remarque de plus haut, que les domaines maximums relatifs aux points a_1 qui sont dans le même cercle se confondent et que par conséquent ces domaines sont en nombre fini.

Dans chaque (Δ_n^i, a_1) il y aura au moins un point a_2 se transformant en le point $t = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n}$ de Σ . Nous construirons relativement à chaque a_2 , de chaque (Δ_n^i, a_1) , le domaine maximum (Δ_n^i, a_2) qui — pour la même raison que plus haut — seront en nombre fini, et nous continuerons ainsi jusqu'à ce que l'indice supérieur de Δ_n^i atteigne la valeur 2^n . On obtient ainsi un nombre fini de domaines disposés en branches, et dont chacun se transforme en l'un des domaines Δ_n^i . Nous appellerons chaîne $\{\delta_n^i\}$ une suite de domaines ainsi formée : (Δ_n^1, a) ; un (Δ_n^i, a_1)

déterminé; un (Δ_n^3, a_2) déterminé choisi parmi ceux dont le a_2 est dans le domaine précédent, et ainsi de suite jusqu'à la valeur 2^n de l'indice supérieur. Une chaîne $\{\partial_n^i\}$ sera donc composée de 2^n domaines dont un, et un seul, se transforme en Δ_n^i où i a l'une quelconque des valeurs $1, 2, \dots, 2^n$. Ce ∂_n^i sera pour son Δ_n^i un domaine maximum normal. Remarquons que deux ∂_n^i de la chaîne ont des points communs si les Δ_n^i correspondants en ont et seulement dans ce cas. Cette remarque nous sera utile plus loin.

Pour le même n il pourra y avoir plusieurs chaînes $\{\partial_n^i\}$ mais, à cause de ce qui a été dit, leur nombre sera fini.

Si l'on augmente n on aura pour chaque rang un nombre fini de chaînes $\{\partial_n^i\}$. Je vais montrer que chacune des chaînes $\{\partial_{n+1}^i\}$ est comprise dans une chaîne $\{\partial_n^i\}$. En effet, le premier domaine ∂_{n+1}^1 est (Δ_{n+1}^1, a) et, comme Δ_{n+1}^1 est compris dans Δ_n^1 , le domaine ∂_{n+1}^1 est compris dans (Δ_n^1, a) que nous prenons pour ∂_n^1 . Soient a'_1 les points de ∂_{n+1}^1 correspondant au point $t = \frac{1}{2^{n+1}}$. Le domaine ∂_{n+1}^2 est le domaine maximum relatif à un certain a'_1 et à Δ_{n+1}^2 . Mais a'_1 est dans (Δ_n^1, a) , c'est-à-dire dans ∂_n^1 et Δ_{n+1}^2 dans Δ_n^1 . Donc ∂_{n+1}^2 est dans ∂_n^1 . Soient a'_2 les points de ∂_{n+1}^2 qui correspondent à $t = \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^{n+1}}$. Le domaine ∂_{n+1}^3 est le domaine maximum relatif à Δ_{n+1}^3 et à un certain a'_2 . Mais ces a'_2 s'obtiennent par des chemins continus partant du a'_1 de ∂_{n+1}^2 , chemins dont les transformés restent dans Δ_{n+1}^2 , c'est-à-dire dans Δ_n^1 . Comme d'autre part ∂_{n+1}^3 est dans ∂_n^1 on voit que les a'_2 sont tous parmi les a_1 , c'est-à-dire parmi les points de ∂_n^1 qui se transforment en le point $t = \frac{1}{2^n}$.

Nous sommes donc vis-à-vis de Δ_n^2 exactement dans les conditions dans lesquelles nous étions plus haut à l'égard de Δ_n^1 et nous pourrions démontrer — comme nous l'avons fait pour ∂_{n+1}^1 et ∂_{n+1}^2 — que ∂_{n+1}^3 et ∂_{n+1}^4 sont dans (Δ_n^2, a_1) comme les deux précédents étaient dans (Δ_n^1, a) . Les domaines (Δ_n^1, a) et (Δ_n^2, a_1) ont en commun le point a_1 qui est choisi parmi les a'_2 . Comme on avait pris le premier de ces deux domaines pour ∂_n^1 on prendra le dernier pour ∂_n^2 . En continuant ainsi on arrivera, en répétant 2^n fois le raisonnement de plus haut, à construire une chaîne $\{\partial_n^i\}$ qui comprend la chaîne $\{\partial_{n+1}^i\}$ donnée.

Des considérations tout à fait analogues montrent, d'une façon plus générale, que toute chaîne $\{\delta_{n+p}^i\}$ donnée, où $p \geq 1$, est comprise dans une chaîne $\{\delta_n^i\}$. D'autre part il est facile de voir qu'une chaîne $\{\delta_{n+p}^i\}$ donnée ne peut être comprise dans deux chaînes $\{\delta_n^i\}$ distinctes de même rang n . En effet, les 2^{n-p} domaines δ_{n+p}^i forment, dans l'ordre des i croissants, 2^n groupes à 2^p domaines chacun, tels que le $k^{\text{ième}}$ groupe ($k = 1, 2, \dots, 2^n$) doit être compris dans δ_n^k . Or dans deux chaînes $\{\delta_n^i\}$ distinctes et de même rang n , les deux premiers δ_n^i distincts et de même indice i ne peuvent avoir aucun point commun; ce qui démontre l'affirmation ci-dessus.

Il résulte de tout ce que l'on vient de dire que si une chaîne $\{\delta_{n+p}^i\}$ est comprise dans une chaîne $\{\delta_n^i\}$ déterminée, il existe (q étant un entier quelconque compris entre 0 et p) une chaîne $\{\delta_{n+q}^i\}$ qui, à la fois, comprend $\{\delta_{n+p}^i\}$ et est comprise dans $\{\delta_n^i\}$.

Ceci étant, choisissons parmi les chaînes de rang $n = 1$, l'une de celles qui contiennent une infinité de chaînes de rangs supérieurs. Il y en aura toujours au moins une satisfaisant à cette condition car il n'y a qu'un nombre fini de chaînes de rang 1 et d'autre part il existe des chaînes de tout rang supérieur à 1. Dans la chaîne de rang 1 ainsi choisie, il y aura certainement au moins une chaîne de rang 2, d'après ce qui vient d'être dit, et parmi celles-ci l'une au moins qui contiendra une infinité de chaînes de rangs supérieurs. Choisissons-en une parmi ces dernières; elle contiendra au moins une chaîne de rang 3 qui contiendra une infinité de chaînes de rangs supérieurs et ainsi de suite.

On formera donc ainsi une suite de chaînes, chacune comprise dans la précédente, les rangs de ces chaînes croissant indéfiniment. Chacune de ces chaînes est un continu. La partie commune à tous ces continus se transformant en Σ ne peut être un point unique; ce sera donc un continu, soit σ .

Reste à démontrer que la correspondance ainsi établie entre σ et Σ est biunivoque, car de σ à Σ cette correspondance étant continue et, d'autre part, σ étant borné, elle sera alors nécessairement bicontinue (voir par exemple JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 53). De ce fait même σ sera un arc simple comme Σ .

Pour établir ce dernier point considérons, dans le continu σ , deux points p_1 et p_2 distincts qui se transformeraient en le même point P

de Σ . Quel que soit le nombre n , le point P est à l'intérieur d'un domaine Δ_n^i au moins et à l'intérieur de deux domaines Δ_n^i voisins (c'est-à-dire dont les i diffèrent d'une unité) au plus. Les points p_1 et p_2 se trouvent donc, d'après la remarque faite un peu plus haut, dans le même ∂_n^i , ou dans deux ∂_n^i ayant des points communs, c'est-à-dire voisins. Ce domaine unique, aussi bien que ces deux domaines réunis, forment un continu; quand on fait alors tendre n vers l'infini, la partie commune de cette infinité de continus sera un continu π , car cette partie commune contient p_1 et p_2 .

D'autre part, les continus formés par les deux Δ_n^i qui contiennent P (ou le Δ_n^i unique qui contient P) auront en commun, quand n prend toutes les valeurs, le point unique P car les Δ_n^i tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions avec $\frac{1}{n}$. Le continu π devra donc se transformer en le point unique P, ce qui est contraire à la deuxième condition des transformations intérieures. Les points p_1 et p_2 ne peuvent donc être distincts et l'énoncé du début de ce paragraphe est ainsi complètement démontré.

4. La proposition du paragraphe précédent constitue la première partie du théorème fondamental que nous allons énoncer plus loin. Nous allons maintenant montrer par un exemple que la propriété démontrée n'appartient pas à des transformations non intérieures même très simples. Prenons pour région r le plan (x, y) entier et fixons un point quelconque de ce plan par ses coordonnées polaires ρ et φ . Nous définirons une correspondance univoque et continue de (x, y) à (X, Y) par les conditions suivantes :

I. $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$.

II. Φ désignant l'angle du rayon vecteur du point (X, Y) avec l'axe positif des X on prendra :

1°	$\Phi = 2\varphi$	si	$0 \leq \varphi \leq \pi$;
2°	$\Phi = 3\pi - \varphi$	si	$\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$;
3°	$\Phi = \varphi$	si	$\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$.

On voit immédiatement que la transformation ainsi définie est continue et qu'elle ne satisfait pas à la première condition des transformations intérieures pour tous les points où $\varphi = \pi$, ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Si l'on prend alors le point A du paragraphe précédent tel que Φ soit compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π , il y aura dans le plan (x, y) trois points se transformant en A. Prenons pour Σ le segment AB, B étant un point tel que $\pi < \Phi < \frac{3\pi}{2}$, et choisissons pour point a celui pour lequel $\frac{3\pi}{2} < \Phi < 2\pi$ parmi les trois points qui se transforment en A. Au point B choisi ne correspond qu'un seul point b qui est dans le demi-plan supérieur de (x, y) . Si σ existait dans les conditions exigées, il faudrait donc qu'il traversât l'axe des x . Or l'axe des x se transforme en celui de X positifs, dont le segment AB ne contient aucun point. D'où impossibilité que σ existe.

5. Remarquons que si deux arcs σ_1 et σ_2 (simples) ont mêmes extrémités et se transforment tous deux en Σ d'une manière biunivoque et bicontinue, ces deux arcs se confondent. En effet σ_1 et σ_2 (ou une partie de chacun de ces arcs) forment ensemble une courbe simple fermée. Le théorème de Jordan montre alors qu'il existe un domaine dont toute la frontière est formée par les points de ces arcs (ou de ces parties d'arcs). La région r est à connexion simple, le domaine en question est donc dans r . Il se transforme par (1) en un domaine dont toute la frontière est formée par des transformés de points de σ_1 et de σ_2 . Ces transformés étant sur Σ , qui est ouvert, cela est impossible.

Ceci étant, nous allons compléter comme il suit la proposition du n° 3 : l'arc Σ d'extrémités A et B étant donné dans Γ_a , *il ne peut exister qu'un nombre fini d'arcs σ , partant de a et se transformant en Σ d'une manière biunivoque et bicontinue.*

D'abord il est évident que tous les arcs σ devront être à l'intérieur de (Γ_a, a) car ils ne peuvent en franchir la frontière, celle-ci se transformant en la frontière de Γ_a dont aucun point n'est sur Σ . D'après la remarque qu'on vient de faire plus haut, si le nombre des σ était infini il devrait nécessairement en être de même du nombre des points b extrémités de ces Σ et se transformant en B.

Comme B est intérieur à Γ_a on peut prolonger Σ par un arc Σ' situé à l'intérieur de Γ_a , aboutissant en B' et tel que l'ensemble de Σ et Σ' forme un arc simple. À Σ' correspondent des arcs σ' en nombre infini partant des différents b extrémités de σ . Nous ne prendrons qu'un seul σ' à partir de chaque extrémité de σ . L'existence de tels σ' résulte de la proposition du n° 3 car tout cercle de centre B et compris dans Γ_a peut servir de Γ_b pour un point b quelconque de (Γ_a, a) . La remarque faite plus haut montre encore que deux quelconques de ces σ' ne peuvent avoir de point commun s'ils partent de deux extrémités b distinctes. Soit b_0 un point limite des extrémités b .

On pourra construire un cercle γ de centre b_0 et tel que tous les points du transformé de γ soient à une distance moindre que ε (quantité positive quelconque) de B . Cela résulte de la continuité de la transformation puisque le transformé de b_0 est évidemment B . Il y aura dans γ une infinité d'extrémités b . Soient b' les extrémités se transformant en B' des σ partant de ces b de γ . Il y aura une infinité de b' et autour d'un de leurs points-limite b'_0 on pourra construire un cercle γ' dans les mêmes conditions que γ a été construit pour b_0 . On pourra alors choisir deux arcs σ' , soit σ'_1 et σ'_2 , distincts et ayant leurs extrémités b dans γ et leurs extrémités b' dans γ' . Ces arcs n'ont pas de points communs.

Joignons par des segments de droite l'extrémité b'_1 de σ'_1 à l'extrémité b'_2 de σ'_2 et les deux extrémités b_1 et b_2 de même arc. Soient c' le point de σ'_2 , le premier rencontré par le segment $b'_1 b'_2$ quand on part de b'_1 , et c le point analogue du segment $b_1 b_2$. Il est évident que les segments $b'_1 c'$, et $b_1 c$ seront respectivement dans γ' et dans γ . Considérons alors la courbe fermée simple constituée par l'arc σ'_1 , le segment $b'_1 c'$, la portion de σ'_2 comprise entre c' et c , le segment $c b_1$. Toute la frontière du transformé du domaine limité par cette courbe devra être formée par les transformées des quatre parties de celle-ci. Ce sont l'arc Σ' et deux arcs de courbes dont les points sont à des distances moindres que ε de B ou de B' . L'arc Σ' étant fixe et ε pouvant être pris aussi petit que l'on voudra, il est clair que cet ensemble d'arcs ne peut former la frontière complète d'un domaine.

Il est donc impossible que les extrémités b soient en nombre infini et la proposition est démontrée.

Le théorème que nous avons en vue s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Étant donnée une transformation intérieure définie et continue dans une région r , un point quelconque a de r se transformant en A , et un arc de courbe simple Σ ayant une extrémité en A et situé dans un cercle Γ_a assez petit :*

1° *Il existe un arc de courbe simple σ situé dans r ayant une extrémité en a et se transformant en Σ par la transformation donnée, d'une manière biunivoque et bicontinue.*

2° *Il ne peut exister dans r qu'un nombre fini d'arcs tels que σ correspondant au même arc Σ et au même point a .*

6. Nous nous sommes placés jusqu'ici à un point de vue local, l'arc Σ devant être pris à l'intérieur du cercle Γ_a de centre A et de rayon assez petit. Nous allons essayer maintenant de nous affranchir de cette hypothèse en prenant un arc Σ quelconque dans R , mais toujours sans points multiples. Les extrémités de Σ étant toujours désignées par A et B , choisissons dans r un point a qui se transforme en A . D'après ce que nous avons vu il est possible de déterminer un cercle Γ_a de centre A dont le domaine (Γ_a, a) est normal et par conséquent dans lequel le théorème fondamental énoncé au paragraphe précédent reste valable. Mais si nous n'avions pas eu besoin de préciser le choix de ce cercle tant qu'il s'agissait d'un problème local il en va tout autrement maintenant. Considérons donc le cercle $\bar{\Gamma}_a$ de centre A , dont le rayon est la borne supérieure ⁽¹⁾ des rayons des cercles tels que Γ_a [c'est-à-dire dont le domaine maximum (Γ_a, a) est normal]. Tout cercle Γ_a , compris à l'intérieur de $\bar{\Gamma}_a$, possède un domaine maximum normal. Si l'on désigne par Γ_a^1 le cercle dont le rayon est égal, par exemple, à la moitié du rayon de $\bar{\Gamma}_a$, le théorème fondamental sera vrai dans Γ_a^1 pour un arc Σ quelconque dont des points pourront être même sur la circonférence de Γ_a^1 . A chaque point a correspond un cercle Γ_a^1 bien déterminé.

Ceci étant, considérons le cercle Γ_a^1 du point a choisi et soit σ_0 l'arc correspondant, d'après le théorème fondamental, à la portion de Σ

(1) Si cette borne supérieure était infinie il est évident que le théorème fondamental serait vrai pour Σ quelconque.

comprise dans Γ'_n . D'une façon précise nous entendons par là la partie de Σ comprise entre le point A et le premier point de Σ rencontré sur la circonférence de Γ'_n quand on parcourt Σ de A vers B. Soient B_0 ce point et b_0 l'extrémité de σ_0 qui lui correspond. De b_0 l'arc σ_0 pourra être prolongé par un arc σ_1 correspondant à la portion de Σ qui est dans Γ'_{b_0} entre B_0 et le premier point B_1 où Σ rencontre la circonférence Γ'_{b_0} après avoir passé par B_0 . Soit b_1 l'extrémité de σ_1 qui correspond à B_1 . De b_1 on prolongera de la même façon l'arc σ_1 par un arc σ_2 correspondant à la portion de Σ allant de B_1 au premier point de rencontre, après passage par B_1 , avec Γ'_{b_1} et ainsi de suite. Les arcs $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ forment évidemment un arc simple car ils se transforment en portion de Σ n'ayant que les extrémités successives communes.

Ces extrémités : les points B_0, B_1, \dots , avancent sur Σ de A vers B. Si l'une d'elles se confond avec B le théorème fondamental est évidemment valable pour Σ , au moins dans sa première partie ('). Sinon, B_0, B_1, \dots tendent vers un point limite L sur Σ . A chaque point T de Σ compris entre A et L correspond un point déterminé t sur σ_n si T est compris entre B_{n-1} et B_n ou se confond avec l'un de ces deux points. Lorsque T tend vers L trois hypothèses sont à envisager concernant le point t :

- 1° Ce point ne tend vers aucun point intérieur à r ni vers la frontière de r (au sens indiqué au n° 1);
- 2° Il tend vers le point l intérieur à r ;
- 3° Il tend vers la frontière de r .

Si la première hypothèse est vérifiée il y a certainement à l'intérieur un point l' tel que dans tout cercle l'ayant pour centre il existe des points t . Mais on pourra, d'après l'hypothèse, choisir un cercle fixe γ ayant l' pour centre et tel que, aussi près que soit T de L, il y ait des points t extérieurs à γ . Une courbe fermée simple *quelconque* comprise dans γ et comprenant l' à son intérieur sera donc traversée une infinité de fois par le point t variable avec T, quand ce dernier tendra vers L. Tout point limite de ces points de rencontre se transformera certainement en L. La courbe fermée étant *quelconque*, cela

(') Nous nous occuperons plus loin de la seconde partie du théorème.

impliquerait l'existence d'un continu se transformant en L, ce qui est opposé à la deuxième condition des transformations intérieures.

La première hypothèse ci-dessus peut donc être écartée.

Examinons maintenant la seconde hypothèse. Il existe donc un point l vers lequel tend t , donc aussi b_0, b_1, b_2, \dots , puisque ce sont des positions particulières de t . Puisque l est dans r il existe un domaine (Γ_l', l) , maximum pour le cercle Γ_l' et le point l , domaine à l'intérieur duquel pénètrent les points b_n pour n assez grand tendant vers l , en même temps que les points B_0, B_1, B_2, \dots pénètrent dans Γ_l' tendant vers son centre. A partir d'une certaine valeur de n le rayon de $\bar{\Gamma}_{b_n}$ sera donc supérieur à la moitié de celui de Γ_l' et, par suite, celui de Γ_{b_n}' supérieur au quart de la même quantité fixe positive. Il est clair que dans ces conditions les points B_0, B_1, \dots ne peuvent tendre vers L, car ils le dépasseront.

Reste la troisième hypothèse qui peut être vérifiée. D'après une définition donnée, le point L est alors une valeur asymptotique intérieure à R. La première partie du théorème fondamental n'est plus valable en ce cas pour un point a quelconque et une position de Σ comprise entre A et un point qui est entre L et B.

Nous pouvons donc donner à la première partie du théorème fondamental la forme suivante quand Σ est quelconque :

Si un arc simple Σ situé dans R ne contient aucune valeur asymptotique sauf peut-être l'extrémité A, il existe dans r un arc simple σ partant du point a choisi et se transformant en Σ , par la transformation donnée, d'une manière biunivoque et bicontinue.

Cette proposition nous sera très utile dans la troisième partie tandis que le théorème sous sa forme première trouvera surtout son application directe dans la deuxième partie.

7. Nous allons maintenant rechercher ce que devient la seconde partie du théorème fondamental pour Σ étendu sur une portion quelconque de R. Considérons sur Σ le point variable T et supposons que (sauf peut-être A) aucun point de Σ ne soit une valeur asymptotique. Je dirai que T appartient à la première classe si à la portion de Σ qui

va de A à T ne correspondent qu'un nombre fini d'arcs σ partant du point a choisi et satisfaisant aux conditions de la première partie du théorème. Tout autre point T sera dit de seconde classe. Il est clair que les T de la première classe formeront une portion de Σ ayant une extrémité en A et l'autre en un point de Σ ; soit L ce point. Je dis que, si L n'est pas en B, il ne peut appartenir à la première classe. En effet, s'il en était ainsi, il y aurait un nombre fini d'extrémités l_1, l_2, \dots, l_k des K arcs σ correspondant à la portion comprise entre A et L. Soit L' un point de la seconde classe. Tous les σ correspondant à la portion AL' comprise entre A et L' devraient passer par l'un des l_1, l_2, \dots, l_k . Mais si L' est assez près de L sur Σ [c'est-à-dire à l'intérieur de tous les cercles Γ_i^1 ($i = 1, 2, \dots, k$), ainsi que tous les points de Σ compris entre L et L'], le théorème fondamental montre que de chaque l_i ne partent qu'un nombre fini d'arcs σ correspondant à la portion LL'. Ceci signifie que L' est de la première classe; d'où contradiction. Le point L est donc bien de la seconde classe, s'il n'est pas en B.

Ceci étant, soient B_0, B_1, \dots, B_n une suite de points sur Σ allant de A vers L et s'approchant indéfiniment de ce dernier. A la portion AB_0 correspondent un nombre fini de σ , mais puisqu'il en correspond un nombre infini à la portion AL, l'un au moins des σ de AB_0 devra se ramifier en un nombre infini de branches. Soit σ_0 l'un de ces σ . De l'extrémité b_0 de σ_0 partent un nombre fini de σ correspondant à la portion B_0B_1 de Σ , dont l'un au moins, soit σ_1 , se ramifiera en un nombre infini de branches. De son extrémité b_1 partiront encore un nombre fini de σ correspondant à B_1B_2 et ainsi de suite. Sur la courbe fixe formée par les σ_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) ainsi choisis considérons comme plus haut une portion variable ayant une extrémité en a et une autre variable en t qui parcourt la courbe. Lorsque le point correspondant T parcourt la position AL de A vers L, t ne peut tendre vers un point fixe l intérieur à r . En effet ce point l , dont le transformé serait nécessairement L à cause de la continuité, serait à l'intérieur de (Γ_l^1, l) , domaine dans lequel les b_n , à partir d'un certain n , pénétreraient en même temps que les B_n correspondants pénétreraient dans Γ_l^1 tendant vers son centre L. Dès que $\Gamma_{b_n}^1$ serait à l'intérieur de Γ_l^1 et comprendrait le point L on verrait donc qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'arcs σ partant des b_n respectifs et correspondant

à $B_n L$, ce qui contredit la propriété de b_n résultant du choix fait pour les arcs σ_n . Mais d'autre part les mêmes raisons que celles exposées au paragraphe précédent montrent que t ne peut ne pas tendre vers aucun point intérieur à r sans s'approcher indéfiniment de la frontière de r . Ce dernier cas est exclu puisque L n'est pas valeur asymptotique. Le point L ne peut donc être de la seconde classe. On a vu plus haut qu'il ne peut être de la première classe s'il n'est pas en B . Il faut donc que L soit en B et de la première classe. La seconde partie du théorème fondamental devient donc dans le cas de Σ quelconque :

S'il n'y a pas de valeur asymptotique sur Σ , sauf peut-être le point A, il ne peut exister qu'un nombre fini d'arcs σ partant du point a choisi.

En résumé, quand on ne fait pas d'hypothèse sur la portion de R dans laquelle on prend Σ , le théorème énoncé au n° 5 subsiste, à condition que sur Σ il n'y ait pas de valeur asymptotique, sauf peut-être le point A.

Nous allons passer maintenant aux applications de ces principes et en donner tout de suite quelques conséquences immédiates.

8. Nous avons appelé exceptionnelle toute valeur qui est un point frontière de R . Soit E une telle valeur et supposons qu'on puisse y arriver de l'intérieur de R par un chemin continu Σ ne contenant entre ces deux extrémités aucune valeur asymptotique. Nous allons montrer que *la valeur exceptionnelle E est une valeur asymptotique.*

Considérons comme plus haut le point T variable sur Σ et une suite de points T_1, T_2, \dots , allant dans la direction de E sur Σ et tendant vers ce point. A la première portion $T_1 T_2$ correspond un arc σ_1 partant d'un certain point t_1 . Soit t_2 son extrémité qui se transforme en T_2 ; de t_2 part un arc σ_2 correspondant à la portion $T_2 T_3$ et ainsi de suite, comme plus haut. Il y aura donc une courbe formée par $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, sur laquelle à chaque T correspondra un point t et un seul. Je dis que lorsque t tend vers E , le point t tend vers la frontière de r et ceci sera évidemment la démonstration de la proposition énoncée. En effet, si t ne tendait pas vers cette frontière, il y aurait dans r un cercle c à l'intérieur duquel se trouveraient des points t correspondant à des T aussi près que l'on voudra de E sur Σ . Il y aurait donc un point limite

au moins dans c , qui se transformerait en E . Or ceci est contraire à l'hypothèse de E exceptionnelle.

9. Nous allons encore montrer que si A est une valeur que la transformation prend dans r un nombre infini de fois, toute autre valeur B , choisie dans R et accessible par un chemin simple continu, partant de A , situé dans R et ne passant par aucune valeur asymptotique; une telle valeur B est prise encore en nombre infini de fois dans r . En effet, de chaque point a où la transformation prend la valeur A , part alors un arc simple σ dans les conditions des théorèmes démontrés. Si dans r il n'y avait qu'un nombre fini de points b se transformant en B , il devrait nécessairement y avoir une infinité de σ aboutissant au même point b , ce qui est contraire à la proposition du n° 7. Si donc on suppose que tout point de R est accessible par un chemin situé dans R , à partir de A (non asymptotique), chemin ne passant par aucune valeur asymptotique, on peut affirmer que, *sauf peut-être les valeurs asymptotiques, toute valeur de R est prise un nombre infini de fois si A est pris un nombre infini de fois.*

10. Les deux propositions des deux paragraphes précédents (quoique établies avec des hypothèses sur la distribution des valeurs asymptotiques dans R) peuvent être rapprochées des résultats de M. Iversen concernant les fonctions méromorphes (¹). D'après cet auteur, en effet, les valeurs exceptionnelles, aussi bien que les valeurs qui ne sont prises qu'un nombre fini de fois par une fonction méromorphe (qui n'est pas une fonction rationnelle), sont toujours des valeurs asymptotiques. On sait que le cas des fonctions méromorphes n'est pas essentiellement distinct de celui des fonctions entières. On pourrait de même, sans difficulté, considérer des transformations intérieures devenant infinies à la façon des fonctions méromorphes : il suffirait de remplacer les plans par des sphères.

II. — Inversion des transformations intérieures.

L'extension des propriétés topologiques des fonctions analytiques

(¹) IVERSEN, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Thèse, Helsingfors, 1914, p. 23).

aux transformations intérieures n'offre pas que l'intérêt d'une simple généralisation : elle fait voir où réside le fait essentiel qui entraîne certains résultats obtenus généralement au moyen d'un système surabondant d'hypothèses.

1. Nous allons montrer d'abord que — tout comme dans le cas des fonctions analytiques — les points a , qui se transforment par une transformation intérieure en un même point A , sont isolés. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et soit a_0 un point limite des points a , intérieur à r . Il est évident que a_0 sera lui-même un point a . Décrivons autour de A le cercle $\Gamma_{a_0}^1$ considéré dans la première partie de ce Mémoire. Prenons un arc simple quelconque, par exemple le rayon AB de $\Gamma_{a_0}^1$. Dans le domaine maximum $(\Gamma_{a_0}^1, a_0)$ qui a le point a_0 pour point intérieur, il y aura donc une infinité de points a et il en sera de même dans tout cercle de centre a_0 et de rayon aussi petit que l'on voudra. Soit σ_0 un arc partant de a_0 et correspondant, dans les conditions du théorème fondamental, à AB ; soit b_0 l'autre extrémité de σ_0 . Je dirai qu'un point a de ceux qui sont dans un cercle c de centre a_0 et de rayon ε (quantité positive quelconque donnée) est de première classe pour σ_0 si aucun des arcs σ partant de ce point et correspondant à AB n'a de point commun avec σ_0 . D'après la seconde partie du théorème fondamental il ne pourra y avoir qu'un nombre fini de points a qui ne soient pas de la première classe. En effet, dans le cas contraire, il partirait du point b_0 une infinité de σ correspondant à BA ⁽¹⁾. On pourra donc choisir un a_1 de la première classe et un σ_1 partant de ce point qui n'aura aucun point commun avec σ_0 . Parmi tous les a il n'y en aura qu'un nombre fini qui ne seront pas de la première classe à la fois pour σ_0 et pour σ_1 . On choisira alors un point a_2 de première classe et un arc σ_2 partant de a_2 tel que σ_0 et σ_2 d'une part, σ_1 et σ_2 d'autre part, n'aient pas de points communs. On aura donc, en continuant ainsi, une suite d'arcs $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$ partant des points a_0, a_1, a_2, \dots qui sont tous dans c , tels que deux quel-

(1) Dans la démonstration du théorème fondamental on n'a fait usage que de cette seule propriété de Γ_a que son domaine maximum (Γ_a, a) est normal. Si Δ est un domaine compris dans $\overline{\Gamma_{a_0}}$ et contenant BA , le domaine (Δ, b_0) est normal.

conques de ces arcs n'aient aucun point commun. En particulier, les points b_0, b_1, b_2, \dots , extrémités des $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$, seront distincts, et comme ils sont tous dans le domaine borné (Γ_{a_0}, a_0) ils auront un point limite au moins. On pourra donc choisir, parmi les σ_n de plus haut, deux arcs σ_x et σ_β tels que les points b_x et b_β soient à une distance moindre que ε l'un de l'autre. Mais puisque ces deux arcs se transforment, chacun, en AB et que, d'autre part, ε peut être pris aussi petit qu'on le voudra, le raisonnement fait dans la première partie (n° 5) montre que cela est impossible. On en conclut que le nombre des a ne peut être infini dans c et nous avons établi que *tout point a est tel qu'il existe un cercle de centre a et ne contenant plus aucun autre point a .*

Dans tout domaine (borné comme toujours) situé dans r , le système d'équations

$$\begin{aligned} X_0 &= X(x, y), \\ Y_0 &= Y(x, y), \end{aligned}$$

où (X_0, Y_0) représente un point de R , ne peut donc avoir qu'un nombre fini de solutions en (x, y) .

2. Nous allons maintenant aborder le problème de l'inversion d'une transformation intérieure autour d'un point donné a .

Considérons un cercle Γ_a de centre A et de rayon au plus égal à celui du Γ'_a considéré au paragraphe précédent. Nous prendrons, de plus, ce rayon assez petit pour que :

1° Dans le domaine (Γ_a, a) il n'y ait qu'un seul point a , le point donné;

2° Au rayon choisi AB de Γ_a correspondent dans (Γ_a, a) des arcs σ tels que deux quelconques d'entre eux n'aient d'autres points communs que a .

La première condition est réalisable d'après le paragraphe précédent. La seconde l'est également d'après le théorème fondamental et si l'on remarque que (Γ_a, a) doit tendre vers a si Γ_a tend vers A .

Considérons le contour K ainsi constitué : le segment AB, la circonférence de Γ_a , le segment BA ; à AB correspond un arc σ dans (Γ_a, a) .

Soit b son extrémité finale. A la circonférence correspond dans (Γ_a, a) un arc simple σ' , ouvert ou fermé, partant de b et finissant en b' . En effet, on peut décomposer cette circonférence en deux arcs simples et leur appliquer successivement le théorème fondamental⁽¹⁾. Enfin à BA correspond un arc σ'' partant de b' et aboutissant nécessairement en a , seul point de (Γ_a, a) qui se transforme en A. Soit k le contour formé par σ , σ' et σ'' . La première condition imposée plus haut à Γ_a nous a donc montré que le contour k est fermé; la seconde condition nous permet d'affirmer que, si b et b' sont distincts, ce contour est simple.

3. Supposons d'abord que b et b' soient confondus. L'arc σ' sera alors, à lui seul, une courbe simple fermée et σ et σ' seront confondus. Soit γ le domaine limité par σ' . Il est dans r , la région r étant à connexion simple. Toute la frontière de γ est σ' . Toute la frontière du domaine qui est le transformé de γ sera donc sur la circonférence de Γ_a . Ce domaine transformé ne pourra donc être que le cercle Γ_a . La correspondance entre les frontières de γ et de Γ_a indique d'ailleurs que γ est domaine maximum pour Γ_a . Je dis que γ n'est autre que le domaine (Γ_a, a) . En effet, l'arc σ' , frontière de γ , appartient à l'intérieur du domaine (Γ'_a, a) de tout cercle Γ'_a de rayon plus grand que celui de Γ_a et satisfaisant aux conditions de ce dernier. γ fait donc partie de (Γ'_a, a) et comme dans celui-ci il n'y a qu'un seul point a se transformant en A, les deux domaines γ et (Γ_a, a) , tous deux intérieurs à (Γ'_a, a) et tous deux maximums de Γ_a , ont le point intérieur a en commun. Ces domaines se confondent donc. Ceci étant, je dis que *la correspondance que la transformation donnée établit entre γ et Γ_a est une correspondance biunivoque.*

Soit P un point intérieur quelconque de Γ_a et soient p_1 et p_2 deux points distincts dans γ qui se transformeraient en P. Considérons le rayon de Γ_a passant par P et soit P' son point d'intersection avec la circonférence. Au segment PA correspond dans γ un arc σ_1 partant de p_1 et un arc σ_2 partant de p_2 . De même au segment PP' correspondent les

(1) Ces deux arcs sont compris dans Γ'_a , donc à l'intérieur d'un domaine dont le domaine maximum par rapport à b est normal (voir la note précédente).

deux arcs analogues σ_1 et σ_2 partant des mêmes points. L'arc formé par l'ensemble de σ_1 et de σ_1' , que je désignerai par $(\sigma_1 + \sigma_1')$, est un arc simple, comme l'arc $(\sigma_2 + \sigma_2')$. Ces deux arcs ayant autour de p_1 et de p_2 deux portions distinctes et, d'autre part, les extrémités communes (P' n'a qu'un correspondant et a est unique dans γ), on peut détacher de $(\sigma_1 + \sigma_1')$ et de $(\sigma_2 + \sigma_2')$ deux portions n'ayant entre elles que les extrémités communes. Ces deux portions d'arcs forment une courbe simple fermée qui limite un domaine. Le transformé de ce domaine devant avoir pour toute frontière une partie du rayon AP', un raisonnement déjà fait conduit à une impossibilité. On en conclut que p_1 et p_2 sont confondus et ceci démontre la proposition énoncée.

4. Supposons maintenant que b et b' soient distincts. L'arc σ' est alors ouvert et k est une courbe fermée simple, d'après la deuxième condition imposée à Γ_a . Appelons γ_1 le domaine limité par k . Les points frontière du transformé de γ_1 provenant de k , et ce transformé étant borné, on voit que le domaine γ_1 se transforme encore en Γ_a . Mais ici une partie de la frontière du premier se transforme en points intérieurs du second (les parties σ et σ''), toute la frontière de Γ_a provenant de σ' , partie de k . Cette circonstance prouve seulement que γ_1 n'est pas domaine maximum pour Γ_a , mais il est compris dans le domaine maximum (Γ_a, a) , car il se transforme tout entier en Γ_a . D'autre part la correspondance entre σ' et la circonférence est biunivoque, sauf pour le point B de celle-ci. Si donc on prend un point P qui n'est pas sur le rayon AB, à P' correspond un point unique comme plus haut et le raisonnement s'applique. La correspondance établie par la transformation entre γ_1 et Γ_a est donc encore biunivoque quant aux points de Γ_a qui ne sont pas sur le rayon AB. Les points de AB ont sur la frontière de γ_1 deux correspondants : l'un sur σ , l'autre sur σ'' .

Considérons maintenant l'arc σ' qui se transforme en la circonférence de Γ_a et ses deux extrémités distinctes b et b' . Si l'on remplace b par b' on aura un autre arc tel que σ' mais partant de b' au lieu de b . Soit b'' son autre extrémité. En remplaçant b' par b'' on aura un troisième arc de la même espèce dont la nouvelle extrémité sera b''' et ainsi de suite. Le premier arc σ' était simple et ouvert, mais en le prolongeant ainsi par d'autres arcs, qui tous se transforment en la même

circonférence, parcourue toujours dans le même sens, on arrivera nécessairement au bout d'un nombre fini d'opérations à une courbe fermée. En effet, les points : b, b', b'', \dots se transforment tous en B , ces points sont en nombre fini dans (Γ_a, a) comme nous l'avons vu (n° 1). On aura donc une courbe simple fermée g , se transformant en la circonférence de Γ_a de telle manière que lorsque l'on part d'un point b de cette courbe et qu'on la parcourt dans un sens déterminé, le point transformé parcourt n fois la circonférence, toujours dans le même sens. La courbe g se divise donc en n parties non empiétantes, telles que chacune corresponde d'une manière biunivoque à la circonférence, si l'on néglige l'une des extrémités de cette partie de g . La courbe g limite dans γ un domaine qui se transforme en un domaine dont la frontière est la circonférence de Γ_a ; ce domaine transformé est donc Γ_a . La correspondance des frontières indique d'ailleurs comme plus haut que le domaine limité par g n'est autre que (Γ_a, a) . Le point a est à l'intérieur de ce domaine. Sur g il y a exactement n points qui se transforment en B . Soient b_α et b'_α deux de ces points rencontrés consécutivement dans le parcours de g . De chacun d'eux part un arc simple correspondant à BA . Ces arcs aboutissent tous deux en a , sont compris dans (Γ_a, a) et n'ont pas d'autres points communs que a . Le domaine limité par ces deux arcs simples et par l'arc simple de g compris entre b_α et b'_α , domaine que nous appellerons γ_α , est le même que celui appelé plus haut γ_1 , ou du même type.

Entre γ_α et Γ_a il y a, comme on l'a vu, correspondance biunivoque établie par la transformation, sauf en ce qui concerne les points de AB . Désignons par γ'_α l'ensemble des points de γ_α moins ceux qui (autres que a) sont sur l'arc σ''_α partant de b'_α et se transformant en BA . Entre γ'_α et Γ_a il y a alors correspondance biunivoque.

A chaque couple de points comme b_α et b'_α , qui se transforment en B , on peut faire correspondre un ensemble γ'_α . Ces γ'_α n'empiéteront pas car aucun point frontière d'un γ'_α ne peut être intérieur à un autre γ'_α . En effet, seuls les points frontière de ces ensembles se transforment en points de K et aucun d'eux ne se transforme en point hors de K (1).

(1) En choisissant convenablement l'arc σ'' que l'on déduit de γ_α pour former γ'_α on voit que les γ'_α n'ont même aucun point commun sauf a .

Les ensembles γ'_α formeront le domaine (Γ_α, a) complet et seront au nombre de n . On a donc finalement la proposition suivante : *la transformation de (Γ_α, a) en Γ_α a pour transformations inverses n transformations univoques, chacune définie et continue dans Γ_α , et faisant correspondre à ce cercle l'un des ensembles γ'_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$).*

Remarquons qu'à tout point de Γ_α correspondent n points dans (Γ_α, a) , sauf à A auquel ne correspond que le seul point a . Si $n = 1$, la transformation, comme on l'a vu au n° 3, est *localement* topologique.

Il résulte encore de là que les points a , auxquels correspond un nombre $n > 1$ de transformations inverses locales, sont isolés. Ces points doivent être considérés comme les analogues des zéros de la dérivée d'une fonction analytique.

5. Considérons encore un domaine δ quelconque situé dans r . On pourra diviser δ en un nombre fini d'ensembles mesurables (B) sans points communs et tels que chacun de ces ensembles E_1, E_2, \dots, E_m corresponde par la transformation (1) biunivoquement à son transformé.

En effet, les points où $n > 1$ sont en nombre fini dans δ , et l'on pourra autour de chacun d'eux construire le domaine (Γ_α, a) divisé en n ensembles γ'_α [tous mesurables (B)] et satisfaisant à la propriété demandée ici. Quant aux autres points ($n = 1$), on pourra enfermer chacun d'eux dans un domaine assez petit tel que la condition exigée y soit vérifiée. Le lemme de Borel-Lebesgue permet alors de remplacer tous ces domaines par un nombre fini d'entre eux. En supprimant les parties communes et en faisant de ces parties de nouveaux ensembles E_i , on aura un nombre fini d'ensembles mesurables (B), sans points communs et satisfaisant à la condition demandée comme les domaines dont ils font partie. Soient donc E_i ($i = 1, 2, \dots, m$) les ensembles résultant de cette division de δ . Chaque E_i se transforme en un ensemble mesurable [ensemble (A) de M. Lusin]; soit M la somme des mesures de ces transformés, dont chacun est borné. Considérons d'autre part une autre division de δ , absolument quelconque, en ensembles mesurables (B) sans points communs. Soient $E'_1, E'_2, \dots, E'_{m'}$ ces ensembles. Soit M' la somme des mesures des transformés de E'_i ($i = 1, 2, \dots, m'$). On peut décomposer chaque E'_i en un nombre

fini de parties, toutes ensembles mesurables (B), telles que chacune de ces parties ne soit comprise que dans un seul E_i . Soient $E_i'' (i = 1, 2, \dots, \mu)$ les ensembles résultant ainsi de la sous-division des E_i . On aura évidemment, si M'' désigne la somme des mesures des transformés des E_i'' , l'inégalité

$$M'' \geq M'.$$

Or il est évident que $M'' = M$. Donc

$$M' \leq M.$$

quelle que soit la division E_i' , c'est-à-dire que M' est bornée pour toute division de δ en ensembles mesurables (B) sans points communs. C'est la propriété caractéristique des transformations que M. Banach a étudiée sous le nom de transformations à variation bornée (1). *Les transformations intérieures sont donc des transformations à variation bornée.*

Remarquons, dans cet ordre d'idées, que la propriété du n° 1 appartient, d'après M. Banach (1), à toutes les transformations à variation bornée si l'on néglige un ensemble de A de mesure nulle.

III. — Les transformations intérieures et le théorème de M. Picard.

Le théorème de M. Picard sur le nombre maximum possible des valeurs exceptionnelles exprime une propriété topologique des fonctions entières. Si l'on effectue une transformation topologique quelconque du plan de la variable z et une telle transformation de la région infinie que couvrent les valeurs prises par la fonction, on aura une transformation intérieure définie et continue dans une région simplement connexe r . Le théorème de M. Picard consiste alors à affirmer que pour une telle transformation intérieure la région R est de connexion simple ou double, mais jamais d'un ordre supérieur de multiplicité. L'exemple de la fonction modulaire montre déjà que le même maximum n'est pas valable pour toutes les transformations intérieures définies et continues dans r . On sait que ce nombre dépend,

(1) BANACH, *Fundamenta Mathematicæ*, t. VII, p. 225.

dans le cas des fonctions analytiques, de l'allure de la fonction au voisinage de la frontière de r . Dans ces profondes recherches sur les fonctions méromorphes, M. R. Nevanlinna a introduit une fonction qui caractérise dans chaque cas la croissance quand on approche de la frontière, fonction qui rend de très grands services dans l'étude des fonctions méromorphes dans un cercle ou dans le plan entier (1). Au moyen de sa fonction M. R. Nevanlinna a pu déterminer, dans un récent travail, les classes pour lesquelles ce nombre de valeurs exceptionnelles a un maximum quelconque (2).

Comme nous ne faisons ici aucune hypothèse d'ordre métrique comme le mode de croissance, nos résultats seront applicables à toutes les fonctions méromorphes (*voir* première partie, n° 10). Nous verrons que plusieurs faits étroitement liés au théorème de M. Picard se retrouvent dans les transformations intérieures : ce sont des propriétés purement topologiques des fonctions analytiques. Le théorème de M. Picard, interprété comme plus haut, exprime une propriété topologique, mais la classe de transformations auxquelles cette propriété se rapporte n'est pas encore définie topologiquement.

1. Supposons que l'ensemble R des valeurs prises par une transformation intérieure quelconque, définie et continue dans r , ne soit pas à connexion simple. Alors l'ensemble des valeurs exceptionnelles pourra former plusieurs continus distincts. Soit toujours A un point de R . On pourra faire passer par A une courbe simple fermée qui ne puisse être réduite à un point par déformation continue à l'intérieur de R . Soit C une telle courbe et soit a l'un des points de r qui se transforment en A . Si l'on décrit C , à partir de A , dans un sens déterminé il existe, on a vu, dans r un arc σ partant de a et correspondant, par la transformation, d'une manière biunivoque et bicontinue à l'arc AM de C ; du moins aussi longtemps que M , qui décrit C , est assez près (sur C) de A . Si M arrive en une valeur asymptotique, l'arc σ pourra s'approcher de la frontière de r , indéfiniment.

(1) Voir notamment les travaux de M. R. Nevanlinna et de M. G. Valiron.

(2) R. NEVANLINNA : *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes dans un cercle* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1927, p. 92).

Supposons que — sauf peut-être A — il n'y ait sur C aucune valeur asymptotique, alors σ ne pourra tendre vers la frontière que si C est décrite au moins une fois entièrement.

Faisons à M décrire C une infinité de fois, toujours dans le même sens. On pourra tourner ainsi indéfiniment en ce qui concerne l'existence de σ , ou être arrêté au bout d'un nombre fini de tours. Ce dernier cas ne peut évidemment se produire que si A est une valeur asymptotique. Deux hypothèses sont à envisager.

1° On peut tourner indéfiniment sur C sans jamais être arrêté, au moins dans un sens.

2° On est arrêté dans les deux sens.

Examinons d'abord la première hypothèse. Je dis que, dans ce cas, aussi grand que soit le nombre de fois que l'on tourne dans le sens (ou dans l'un des sens) dans lequel il est permis de tourner indéfiniment, σ sera toujours un arc simple ouvert. En effet dans le cas contraire, il y aura une courbe fermée, formée par une portion de σ , courbe qui se transformerait en C plusieurs fois enroulée sur elle-même et décrite toujours dans le même sens. Puisque r est à connexion simple, cette courbe fermée peut se réduire à un point par déformation continue dans r . Il devrait donc en être de même de C, ce qui est contre l'hypothèse faite sur cette courbe. On en déduit que *les points a, qui, dans r correspondent à A, sont en nombre infini.*

Passons maintenant à la seconde hypothèse de plus haut. Dans ce cas il y a une courbe simple σ dans r dont les deux branches tendent chacune vers la frontière de r . Quand on décrit σ en suivant l'une de ses branches, le point transformé tourne sur C, toujours dans le même sens, un nombre fini de fois et tend vers A au dernier tour. Quand on décrit σ sur l'autre branche, ce sens sur C de la marche du transformé change; mais on tend toujours au dernier tour vers A. La courbe σ se transforme donc en C plusieurs fois enroulée sur elle-même. Dans r , la courbe σ sépare deux régions : r_1 et r_2 . Je dis qu'en aucune de ces régions on ne peut avoir convergence uniforme vers A, quand on s'approche indéfiniment de la frontière de r . En effet, s'il en était ainsi, on pourrait déterminer un domaine δ dans r_1 tel que tout point de r_1 extérieur à δ se transforme en un point de R situé dans un cercle

de centre A et de rayon ε aussi petit que l'on voudra. Soit alors σ' un arc simple joignant deux points situés sur les deux branches de σ , extérieur à δ et intérieur à la région r_1 . Si ε est pris assez petit, on voit que la courbe fermée de R, qui est la transformée de la courbe fermée de r constituée par σ' et la portion de σ comprise entre les extrémités de σ' , est irréductible à un point par déformation dans R. Comme plus haut, on voit que cela est impossible. De l'hypothèse 2° on peut donc conclure *l'impossibilité de la convergence uniforme vers A dans l'une quelconque des régions déterminées par σ dans r .*

Pour le cas des fonctions entières et méromorphes M. Iversen a établi, en suivant un ordre d'idées de M. Lindelöf, que le fait précédent entraîne l'existence dans r_1 d'un nombre infini de points a , se transformant en un point A quelconque du plan (X, Y) sauf peut-être pour deux points A exceptionnels (dont l'un est l'infini dans le cas des fonctions entières) (1). Dans le cas général des transformations intérieures au contraire, il peut y avoir un nombre (infini même) de valeurs prises chacune seulement un nombre fini de fois dans r , à plus forte raison dans r_1 . Il suffit de considérer l'exemple très simple suivant, pour s'en rendre compte. Prenons pour r le plan (x, y) moins les deux demi-droites $x = 0, y \geq 2\pi$ et $x = 0, y \leq -2\pi$. La transformation intérieure définie dans r par $X = e^x \cos y$ et $Y = e^x \sin y$ possède une région R formée de tout le plan (X, Y) moins l'origine. Elle prend dans r un nombre fini de fois seulement toute valeur A située sur la circonférence $X^2 + Y^2 = 1$; elle prend les autres valeurs de R un nombre infini de fois.

Remarquons toutefois que tout point de $X^2 + Y^2 = 1$ est une valeur asymptotique pour notre transformation.

2. Appelons transformation intérieure de *première espèce* celle dont l'ensemble des valeurs asymptotiques intérieures à R est *ponctuel* (2).

Quel que soit le point A, valeur non asymptotique, on peut alors faire passer par A une courbe C qui satisfasse aux conditions exigées

(1) IVERSEN, *loc. cit.*, p. 29, et LINDELÖF, *Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, t. 35, 1908.

(2) Un ensemble ponctuel est un ensemble dont le dérivé ne contient aucun continu.

dans le paragraphe précédent et ne passe par aucune valeur asymptotique. On sera donc toujours dans les conditions de la première hypothèse et l'on pourra en conclure la proposition suivante :

Toute transformation intérieure de première espèce définie et continue dans une région à simple connexion prend une infinité de fois toute valeur non asymptotique qu'elle prend au moins une fois, si l'ensemble des valeurs prises forment une région à connexion multiple.

Une proposition analogue a été obtenue dans la première partie (n° 9). La condition de l'existence d'une valeur prise un nombre infini de fois est remplacée ici par la multiple connexion de R .

Quant aux valeurs asymptotiques on a vu dans l'exemple du paragraphe précédent qu'elles peuvent n'être prises qu'un nombre fini de fois même quand l'une des conditions précédentes est vérifiée.

3. Nous allons voir maintenant que la condition relative au mode de connexion de R peut encore être remplacée par une autre, qui fournira des renseignements sur le cas où R est à connexion simple comme r . La proposition que nous allons établir est la suivante :

S'il existe, dans R_1 , au moins une valeur asymptotique, toute valeur non asymptotique de R est prise un nombre infini de fois dans r par la transformation intérieure donnée, supposée de première espèce.

Par un point quelconque de r menons une courbe simple tendant vers la frontière de r , chemin de détermination pour la valeur asymptotique qui existe (d'après l'hypothèse) à l'intérieur de R . Par le même point menons un second chemin de détermination pour la même valeur asymptotique (courbe simple n'ayant avec la première en commun que le point de départ), assez voisin du premier pour que, à l'intérieur de l'une des deux régions déterminées, dans r , par l'ensemble de ces deux chemins de détermination, il y ait convergence uniforme vers la valeur asymptotique quand on approche de la frontière de r . Soit γ la courbe simple formée par les deux chemins de détermination et soit d l'ensemble formé par γ et la région où il y a convergence uniforme. Soient encore φ la région obtenue en retranchant d de r , et D le domaine (borné) situé dans R qui est le transformé de d . Si dans φ la

transformation ne prend pas une certaine valeur P de la région R , cette valeur ne peut être que dans D . Puisque D est situé dans R et que l'ensemble des valeurs asymptotiques intérieures à R est ponctuel, on peut décrire une courbe fermée simple C , située dans R , comprenant D à son intérieur et ne passant par aucune valeur asymptotique.

Soit Q un point quelconque de C . Les points q qui se transforment en Q sont tous dans ρ . Choisissons-en un q_1 , et construisons l'arc σ correspondant à C et partant de q_1 . Si l'on tourne sur C toujours dans le même sens, σ ne peut se fermer. En effet, la transformée de cette courbe fermée serait C plusieurs fois parcourue dans le même sens, et la réduction par déformation continue dans ρ (qui est à connexion simple comme r) de la portion fermée de σ entraînerait celle de C , qui balayerait toute sa région intérieure, donc aussi le point P . La valeur P serait donc prise dans ρ contrairement à l'hypothèse. La courbe σ , quel que soit le nombre de tours effectués sur C , est donc un arc ouvert et après chaque tour on aboutit à un autre point : q_2, q_3, \dots . Il y a donc dans r une infinité de points qui se transforment en Q et la proposition de la première partie rappelée au paragraphe précédent montre alors que toute valeur non asymptotique est prise un nombre infini de fois. S'il existe donc une valeur de R qui n'est pas prise dans ρ , le théorème énoncé est démontré.

Admettons maintenant que dans ρ toute valeur de R soit prise au moins une fois. Soit alors P_1 une valeur de R prise dans ρ seulement un nombre fini de fois. On peut mener un arc simple γ' , dans ρ , ayant ses extrémités en deux points α et β , situés sur γ et tel qu'avec la portion de γ comprise entre α et β , γ' forme une courbe fermée simple comprenant à son intérieur tous les points de ρ qui se transforment en P_1 . Soient d_1 le domaine formé par cette courbe fermée simple et sa région intérieure, et D_1 son transformé. Le domaine D_1 contient P_1 , et dans la région ρ_1 , obtenue en retranchant d_1 de ρ (région qui est comme ρ et r à connexion simple), la valeur P_1 n'est pas prise. La région ρ_1 est par rapport à D_1 exactement ce que ρ était par rapport à D . Le même raisonnement montre donc qu'il n'est pas possible que P_1 ne soit pas pris dans ρ_1 , c'est-à-dire que P_1 est pris dans ρ un nombre infini de fois.

Le théorème est donc complètement démontré.

4. En résumé, on a donc trois conditions dont chacune est suffisante pour qu'une transformation intérieure de première espèce prenne une infinité de fois toute valeur choisie dans R , qui n'est pas une valeur asymptotique :

- 1° L'existence d'une valeur non asymptotique prise un nombre infini de fois;
- 2° La multiple connexion de R ;
- 3° L'existence d'une valeur asymptotique intérieure à R , au moins.

De ces trois conditions la première est évidemment nécessaire, les deux dernières ne le sont pas.

Il serait intéressant de caractériser les transformations intérieures qui ne prennent qu'un nombre fini de fois leurs valeurs, ce qui peut arriver quand aucune des trois conditions ci-dessus n'est vérifiée.

Pour compléter ce qui a été dit à ce sujet, nous allons établir, en nous servant des principes introduits dans ce travail, la proposition suivante concernant plus particulièrement le cas visé :

Si une transformation intérieure de première espèce prend, dans r , un nombre p de fois la valeur A et q fois la valeur B , ces deux valeurs étant non asymptotiques et distinctes, toute autre valeur de R est prise, dans r , au plus un nombre pq de fois.

Soit, en effet, H une valeur distincte de A et de B prise dans r . Supposons d'abord que H ne soit pas asymptotique et soient $h_i (i = 1, 2, \dots, pq + 1)$, $pq + 1$ points h_i de r qui se transformeraient chacun en H . De A à B en passant par H menons un arc simple dans R qui ne passe par aucune valeur asymptotique, et soient Σ_1 et Σ_2 les deux portions de cet arc comprises entre H et A et entre H et B respectivement. Partant de h_i il y aura un arc simple $\sigma_{1,i}$ correspondant à Σ_1 et un arc $\sigma_{2,i}$ correspondant à Σ_2 . Tous ces arcs $\sigma_{1,i}$ et $\sigma_{2,i}$ ($i = 1, 2, \dots, pq + 1$) aboutissent : les premiers en l'un des p points a se transformant en A , les derniers en l'un des q points B qui se transforment en B . Il y aura donc au plus pq arcs ($\sigma_{1,i} + \sigma_{2,i}$) tels que deux quelconques d'entre eux n'aient pas les deux extrémités communes. Puisque ces arcs sont au nombre de $pq + 1$, il y en aura au moins une paire ayant les deux extrémités communes. Or l'impossibilité de ce

fait résulte d'un raisonnement dont le principe a servi dans ce Mémoire plusieurs fois déjà. Le nombre des h_i ne peut donc dépasser pq si H n'est pas asymptotique.

Cette dernière hypothèse n'a été nécessaire que pour s'assurer de l'existence de Σ_1 et de Σ_2 ne passant par aucune valeur asymptotique. Or le théorème fondamental est valable pour le cas où le point de départ de l'arc Σ est une valeur asymptotique et il est nécessaire seulement que cet arc ne contienne pas de valeurs asymptotiques en dehors du voisinage du point de départ, déterminé par un certain cercle l'ayant pour centre. L'ensemble des valeurs asymptotiques étant ici ponctuel, il est évidemment possible de choisir Σ_1 et Σ_2 dans ces conditions. Le théorème subsiste donc pour H asymptotique.

En particulier, si $p = 1$, on voit que toute autre valeur que A est prise exactement q fois.

5. Reprenons une transformation intérieure de première espèce satisfaisant à l'une des trois conditions énumérées au début du paragraphe précédent. Étant donné un point A quelconque de R et un domaine δ quelconque situé dans r , on pourra toujours trouver dans r , et hors de δ , un point tel que son transformé soit à une distance moindre que toute quantité positive donnée, du point A . En effet, si A est une valeur asymptotique, cela résulte de la définition même de ces valeurs; si A n'est pas asymptotique, les théorèmes démontrés montrent qu'il existe toujours hors de δ des points qui se transforment en A même. On peut dire, plus brièvement, qu'au voisinage de la frontière de r , la transformation s'approche autant qu'on le voudra de toute valeur choisie dans R . La frontière doit donc être considérée comme un point singulier isolé *essentiel* d'une fonction analytique. Si d'ailleurs on effectue une transformation topologique qui ramène r au plan (x, y) tout entier, cette fonction se réduit au point unique à l'infini.

Pour terminer nous allons montrer par un exemple que dans la définition des transformations intérieures la deuxième condition n'est pas superflue : ce n'est pas une conséquence de la première condition.

Soient ρ et θ les coordonnées polaires dans le plan (X, Y) . Nous

prendrons

$$\varphi = e^{-\frac{1}{y^2} + xy^2}, \quad \theta = \frac{2\pi}{y}$$

pour $y \neq 0$ et $\varphi \equiv 0$ pour $y = 0$.

Cette transformation est continue dans tout le plan et l'axe des x se transforme en un point unique, $X = Y = 0$. Nous allons montrer qu'elle satisfait à la première condition des transformations intérieures (voir l'Introduction). Pour les points où $y \neq 0$, les dérivées partielles étant continues et le déterminant fonctionnel différent de zéro, le théorème classique des fonctions implicites le montre de suite. Nous nous occuperons donc seulement des points de l'axe des x .

Prenons pour région r le demi-plan droit où $x > 0$ et soit x_0 l'abscisse d'un point x_0 de r situé sur l'axe des x .

Construisons un carré de côtés parallèles aux axes, de centre x_0 et situé dans r . Soit 2ε la longueur de son côté et soit y_0 une valeur positive inférieure à ε . Le segment compris dans le carré où l'on a $y = y_0$ se transforme en un segment situé sur la demi-droite $\theta = \frac{2\pi}{y_0}$ et défini par

$$e^{-\frac{1}{y_0^2} + (x_0 - \varepsilon)y_0^2} \leq \rho \leq e^{-\frac{1}{y_0^2} + (x_0 + \varepsilon)y_0^2}.$$

Les ordonnées des segments analogues se transformant en segments de la même demi-droite seront $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ liés par

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + y_n},$$

et tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Chacun de ces segments se transforme en un segment de la même demi-droite et défini par

$$e^{-\frac{1}{y_n^2} + (x_0 - \varepsilon)y_n^2} \leq \rho \leq e^{-\frac{1}{y_n^2} + (x_0 + \varepsilon)y_n^2}.$$

Si donc on prouve qu'à partir d'une valeur assez grande de n , on a

$$e^{-\frac{1}{y_n^2} + (x_0 - \varepsilon)y_n^2} < e^{-\frac{1}{y_{n+1}^2} + (x_0 + \varepsilon)y_{n+1}^2},$$

on sera assuré que, sur la demi-droite $\theta = \frac{2\pi}{y_0}$, tous les points pour

lesquels $\rho \leq e^{-\frac{1}{y^2}} + (x_0 + \varepsilon)y^2$ font partie du transformé du carré.

En divisant par y_n^2 et en remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1,$$

l'inégalité ci-dessus s'établit immédiatement pour n assez grand. Remplaçons alors y_0 par une valeur quelconque comprise entre y_0 et y_1 . Puisque $e^{-\frac{1}{y^2}} + (x_0 + \varepsilon)y^2$ décroît avec y , pour $y > 0$ on aura donc, sur *tout* rayon vecteur, un segment partant de l'origine et d'une longueur au moins égale à

$$e^{-\frac{1}{y_1^2}} + (x_0 + \varepsilon)y_1^2,$$

qui fera partie du domaine transformé du carré. Les points de r qui sont sur $y = 0$ se transforment donc aussi en points intérieurs, c'est-à-dire que la transformation satisfait à la première condition.