

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur les intégrales dépendant d'un paramètre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 50 (1933), p. 371-392

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50_371_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

PAR M. ÉMILE COTTON



INTRODUCTION. — Soit $I(u)$ une intégrale curviligne dépendant d'un paramètre u de la façon suivante :

La courbe d'intégration S tracée dans un plan xOy varie avec u , soit $f(x, y, u) = 0$ son équation ; la fonction $g(x, y, u)$ sous le signe \int dépend elle aussi du paramètre u , et y est une fonction implicite de la variable d'intégration x et du paramètre u définie par l'équation $f = 0$; enfin les limites de l'intégrale peuvent elles aussi être fonction de u .

Dans un article antérieur ⁽¹⁾, j'ai étudié les singularités des intégrales $I(u)$ en supposant les variables réelles, la fonction g et les limites analytiques, lorsque la courbe S elle-même analytique acquiert pour une valeur numérique (soit $u = 0$) un point double à tangentes distinctes ou confondues.

Je reprends ici cette étude en la généralisant : g est le quotient $\frac{\psi}{\varphi}$ de deux fonctions analytiques, les variables x, y, u sont des nombres complexes, le point singulier que peut présenter pour $u = 0$ la courbe S est d'un ordre de multiplicité quelconque. Le cas particulier où f, φ, ψ sont des *polynomes* avait été considéré par Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 71, 1870, p. 91; t. 73, 1871, p. 324) et par M. Picard (*Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. 1, 1897, Chap. IV, Section IV; *Quelques applications analytiques de la théorie*

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. 49, 1932, p. 351 à 382. Les renvois à cet article sont désignés ici par les lettres *A. E. N.*

des courbes et des surfaces algébriques, 1931, Chap. V, Section II). Fuchs a démontré que les périodes de l'intégrale abélienne considérées comme fonctions du paramètre u étaient des solutions régulières d'une équation différentielle linéaire à points singuliers isolés; M. Picard a montré l'importance d'une détermination directe du groupe de monodromie pour l'étude plus approfondie de ces singularités.

Ces travaux m'ont servi de guide dans la présente recherche. Pour les adapter au cas actuel, où f , φ , ψ sont des *séries entières* et non plus des polynômes, j'ai considéré d'abord les diverses déterminations des fonctions implicites $y(x, u)$; ce sont là des fonctions *algébroides* de x et de u , en donnant à ce mot le sens que Poincaré lui avait attribué dans sa Thèse (*Œuvres*, t. 2, p. LI). On les étudie (n^{os} 1 à 3) au voisinage d'un ensemble de valeurs (tel que $x = y = u = 0$) au moyen de *cercles de Riemann*, en appelant ainsi une partie d'une surface de Riemann ordinaire pour laquelle $|x|$ reste inférieur à un nombre fixe r . Ces cercles, les lignes de ramification qui unissent leurs feuillets se modifient avec la valeur de u . On les rend simplement connexes par le tracé de contours convenables. Les fonctions $\varpi(x, u) = \frac{\psi(x, y, u)}{\varphi(x, y, u)}$ s'étudient alors (n^{os} 4, 5), en ce qui concerne la nature de leurs zéros et de leurs pôles locaux (c'est-à-dire de ceux qui tendent vers $x = y = 0$ quand u tend vers zéro), comme on le fait pour les éléments analogues des fractions rationnelles d'un point analytique d'une surface de Riemann. On peut, en utilisant les théorèmes de Weierstrass (*Werke*, t. 2, p. 135) et de M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 36, 1908, p. 209) obtenir pour l'étude locale de ces fonctions des formes réduites, analogues à celles de la théorie élémentaire des différentielles algébriques (Picard, *Traité d'Analyse*, t. 1, Chap. II).

Les intégrales $I(u) = \int \frac{\psi}{\varphi} dx$ que j'appelle *abéloïdes*, à cause de leur analogie avec les intégrales abéliennes, admettent (n^o 6) des *périodes locales* de diverse nature, correspondant à des contours fermés tracés sur les cercles de Riemann. Considérant alors (n^o 7) les diverses déterminations $I_k(u)$ d'une intégrale abéloïde prise entre des limites dont les abscisses x_1, x_2 sont fixes, on établit que ces fonctions $I_k(u)$ (et par suite les périodes locales) sont solutions régulières d'une équation différentielle du type de Fuchs au voisinage du point singu-

lier $u = 0$. A ce point correspond un groupe local de monodromie, il est étudié (n° 8) dans le cas particulier où les séries $f(0, y, 0)$, $f(0, 0, u)$ commencent respectivement par des termes du second degré en y et du premier degré en u et où $\varphi = 1$.

La méthode de M. Picard permet ainsi de retrouver et de préciser les résultats antérieurement obtenus (*A. E. N.*, n°s 8 à 13). Ils ne concernaient que des éléments réels, mais c'est néanmoins en pénétrant dans le domaine complexe qu'on arrive à les mieux voir.

1. *Fonctions algébroides.* — Soit $f(x, y, u)$ une fonction holomorphe; $f(0, 0, 0)$ étant nul; nous supposons que la série entière $f(0, y, 0)$ n'est pas identiquement nulle, appelons m le degré minimum de ses termes. Considérons seulement les fonctions implicites $y(x, u)$ définies par l'équation

$$(1) \quad f(x, y, u) = 0$$

infiniment petites avec x et u ; ce sont des fonctions *algébroides* de ces deux variables, en attribuant à ces mots le sens que Poincaré leur a donné dans sa Thèse (*Œuvres*, t. 1, p. LI à LXV).

L'illustre géomètre avait notamment retrouvé (*voir* lemmes II et III) une partie d'un théorème que Weierstrass donnait dans son enseignement depuis 1860, mais n'a publié qu'en 1879 (*Werke*, t. 2, p. 135, n° 10) (1).

Cette importante proposition permet de substituer à (1) une équation algébrique en y :

$$(2) \quad F(x, y, u) = y^m + a_1(x, u)y^{m-1} + \dots + a_m(x, u) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x et de u s'annulant toutes pour $x = u = 0$. Cette substitution est valable lorsque

(1) Les lemmes de Poincaré montrent que les fonctions $y(x, u)$ satisfaisant à l'équation $f(x, y, u) = 0$ et infiniment petites avec x et u vérifient l'équation $F(x, y, u) = 0$, algébrique en y ; le théorème de Weierstrass apprend, de plus, que le rapport $\frac{f}{F}$ est une fonction $f_1(x, y, u)$ holomorphe en x, y, u , $f_1(0, 0, 0)$ étant différent de zéro.

les modules des variables satisfont à certaines inégalités :

$$(3) \quad |y| < R,$$

$$(4) \quad |x| < r,$$

$$(5) \quad |u| < \rho.$$

R étant convenablement choisi, on détermine ensuite r et ρ .

Nous pourrons, dans la suite, remplacer les nombres R , r , ρ par des nombres plus petits.

Si $m = 1$, l'équation (2) définit une seule fonction holomorphe $y(x, u)$; supposons ⁽¹⁾ $m \geq 2$, l'équation (2) a une racine multiple lorsque x et u vérifient l'équation

$$(6) \quad \delta(x, u) = 0,$$

où δ est le résultant des deux équations algébriques en y :

$$F(x, y, u) = 0, \quad F'_y(x, y, u) = 0,$$

c'est un polynôme en $a_1(x, u), \dots, a_n(x, u)$ sans terme constant; par suite $\delta(0, 0) = 0$.

Supposons $\delta(x, 0)$ différent de zéro; pour $|u|$ assez petit, l'équation (6) admet des racines $x = e_i(u)$ auxquelles correspondent respectivement des racines multiples $y = h_i(u)$ de l'équation (2); l'ensemble $e_i(u), h_i(u)$ définit un point critique algébrique ou *point de ramification* de (2) considéré comme équation en x et y dépendant du paramètre u .

Le théorème de Weierstrass-Poincaré, appliqué à (6), nous permet encore d'isoler les racines $e_i(u)$ infiniment petites avec u ; elles vérifient une équation algébrique

$$(7) \quad D(x, u) = x^n + b_1(u)x^{n-1} + \dots + b_n(u) = 0$$

à coefficients holomorphes en u s'annulant tous pour $u = 0$.

Nous supposons r et ρ assez petits pour que les inégalités $|e_i(u)| < r$ ne soient vérifiées que par les racines de (7); autrement dit, *interviennent désormais seuls les points de ramification infiniment voisins du*

(1) Le point $x = y = 0$ n'est pas nécessairement dans ces conditions un point singulier de la courbe $f(x, y, 0) = 0$; pour qu'il le soit il faut que la série entière $f(x, 0, 0)$ n'ait pas de terme du premier degré.

point $O(x = y = 0)$ lorsque u est infiniment petit. Nous les appellerons *points de ramification locaux*. Admettons, de plus, que l'équation (7) n'ait, si $|u| < \varrho$, de racines multiples que pour $u = 0$.

2. *Cercles de Riemann*. — Regardant u comme un paramètre auquel est attribuée une valeur d'abord constante de module positif inférieur à ϱ , il nous est possible de distinguer pour $|x| < r$ les fonctions algébroides $y(x, u)$ et de préciser la façon dont elles s'échangent. On représente d'abord la variable x sur la partie d'un plan simple intérieure à la circonférence $|x| = r$ ou circonférence Γ ; on utilise avec Puiseux des lignes L_i réunissant les points critiques locaux e_i à cette circonférence et que nous pouvons ensuite prolonger à l'extérieur jusqu'à l'infini, ces lignes ne se croisant pas entre elles. Nous substituons ensuite au plan simple m plans superposés en les soudant les uns aux autres, comme dans la théorie des fonctions algébriques; on obtient soit une seule surface de Riemann T , soit plusieurs surfaces analogues. En ne conservant que les parties de leurs feuillets se projetant à l'intérieur de Γ nous avons ainsi un ou plusieurs morceaux connexes que nous appelons *cercles de Riemann*. A tout point analytique, ensemble de valeurs x, y vérifiant la relation (2) et les inégalités (3), (4), (5) correspond un point d'un cercle de Riemann Σ relatif à la même valeur de u et inversement.

En regardant u comme fixe, on rend simplement connexe ⁽¹⁾ une surface de Riemann T formée de m' ($m' \leq m$) feuillets plans indéfinis et convenablement soudés entre eux, par le tracé de p rétrosections ou couples de coupures $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$ qu'on peut unir par des coupures auxiliaires c_1, \dots, c_{p-1} de façon à obtenir une sorte de chaîne $K : (a_1, b_1)c_1(a_2, b_2)c_2, \dots, c_{p-1}(a_p, b_p)$; on suppose K tout entière intérieure au cercle de Riemann. On rend celui-ci simplement connexe par le tracé de nouvelles coupures d_i joignant un point P du contour K aux diverses *circonférences limites* Γ_i . Nous appelons ainsi les lignes qui se projettent sur le plan simple suivant la circonférence Γ mais qui sont soit des circonférences ordinaires tracées dans un seul

(1) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 2, Chap. XIII; APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, t. 1, Chap. V.

feuillet de T ne rencontrant aucune ligne de soudure de ce feuillet et des feuillets voisins, soit un ensemble d'arcs de circonférences; chacun d'eux est alors tracé dans un seul feuillet, ses extrémités sont sur des lignes de soudure, et l'ensemble des arcs constituant Γ_i peut être parcouru tout entier par un mobile marchant dans le même sens. Bref, le tracé d'un contour limite total H rendant simplement connexe un cercle de Riemann est tout à fait analogue à celui du contour permettant de déduire d'une surface ordinaire T une surface T'' simplement connexe, de façon qu'une intégrale abélienne devienne une fonction uniforme sur T'' ⁽¹⁾ : les circonférences limites Γ_i remplaçant ici les circonférences de rayon très petit ou très grand isolant les pôles de la fonction rationnelle sur laquelle porte l'intégrale abélienne.

Remarque. — Le cercle de Riemann Σ et le tracé du contour limite total H qui le rend simplement connexe doivent être modifiés lorsqu'on change la valeur attribuée au paramètre u ; mais il est bien évident que le tracé de H peut être fait de telle façon que deux cercles de Riemann correspondant à deux valeurs différentes u', u'' de u soient *applicables* l'un sur l'autre, le mot applicable étant entendu au sens de la géométrie de situation. Ceci suppose toutefois que les points de ramification restent distincts, c'est-à-dire que les deux valeurs u', u'' sont différentes de zéro.

3. *Exemples.* — I. Soit d'abord

$$F(x, y, u) = y^2 - a(x, u) = 0,$$

a étant holomorphe et $a(0, 0) = 0$; ici l'équation (6) se réduit à $a(x, u) = 0$, d'où l'on déduit, comme plus haut, une équation algébrique en x :

$$D(x, u) = x^n + b_1(u)x^{n-1} + \dots + b_n(u) = (x - e_1)(x - e_2)\dots(x - e_n) = 0.$$

La surface de Riemann T est ici à deux feuillets; en posant

$$n = 2p + 1 \quad \text{ou} \quad n = 2p + 2,$$

suivant la parité de n , il y a $p + 1$ lignes de passage ou de soudure;

(1) Voir APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, t. 1, Chap. V.

les p premières peuvent être prises suivant des segments de lignes, droites ou courbes, dont les extrémités sont les points de ramification

$$(e_1, e_1), (e_2, e_2), \dots, (e_{2p-1}, e_{2p})$$

la dernière est un segment analogue e_{2p+1}, e_{2p+2} si n est pair, et lorsque n est impair, un segment joignant e_{2p+1} à un point ε de la circonférence Γ et prolongé au delà de ce point.

Le tracé du contour K se fait d'après un procédé connu ⁽¹⁾; de la surface T' simplement connexe ainsi obtenue on déduit ensuite un cercle de Riemann Σ . Si n est pair, il y a deux circonférences limites distinctes Γ_1, Γ_2 qu'on joindra par deux coupures auxiliaires d_1, d_2 à un point de K (ou qu'on joindra par une coupure si $n=2$). Si n est impair, on a une seule circonférence limite Γ_1 constituée par deux circonférences ordinaires tracées dans les deux feuillets, mais quand un mobile parcourant l'une d'elles arrive au point ε il doit abandonner cette première circonférence, faire le tour complet de la seconde et reprendre ensuite sa marche sur la première.

II. Lorsque l'équation (2) est du troisième degré nous pouvons la ramener à la forme

$$F(x, y, u) = y^3 + a_2(x, u)y + a_3(x, u) = 0.$$

Le développement de

$$\delta(x, u) = 4a_2^3 + 27a_3^2$$

commence par des termes du second degré au moins; il existe au moins deux racines $x = e_1, x = e_2$ infiniment petites avec u ; s'il y en a exactement deux, $a_3(x, 0)$ contient un terme du premier degré x , et l'on a un cercle de Riemann à trois feuillets réunis par deux lignes de ramification unissant le premier feuillet au second et le second au troisième ⁽²⁾.

La surface de Riemann est simplement connexe, il n'est pas néces-

⁽¹⁾ APPELL et GOURSAT, *Fonctions algébriques*, Chap. III.

⁽²⁾ L'hypothèse d'un cercle de Riemann à deux feuillets réunis par une ligne de ramification et complété par un cercle simple est à écarter, car en suivant une circonférence de centre $x = 0$ de rayon voisin de r on peut passer de l'une des déterminations de y aux deux autres, pour $u = 0$ et par suite pour u voisin de zéro.

saire de tracer un contour K . On a une seule circonférence limite composée de deux circonférences tracées dans les feuillets extrêmes et de deux arcs de circonférence tracés dans le feuillet intermédiaire.

Dans ce cas, l'origine est pour la courbe $f(x, y, 0) = 0$ un point d'inflexion à tangente parallèle à Oy ; il provient de la réunion de deux points ordinaires de la courbe $f(x, y, u) = 0$ où les tangentes ont la même direction.

4. Zéros locaux d'une fonction holomorphe sur un cercle de Riemann.

— Soit

$$(8) \quad f(x, y, u) = 0,$$

$$(9) \quad \varphi(x, y, u) = 0$$

le système obtenu en adjoignant à l'équation antérieure (8) une nouvelle équation dont le premier membre est une fonction holomorphe x, y, u et s'annule pour $x = y = u = 0$, $\varphi(0, 0, 0)$ n'étant pas identiquement nul. Pour l'étude des fonctions $x = \xi(u)$, $y = \eta(u)$ vérifiant ce système et s'annulant avec u , nous pouvons, comme plus haut, remplacer chacune de ces équations par une équation algébrique en y à coefficients holomorphes en x et u s'annulant pour $x = u = 0$, soit

$$(10) \quad F(x, y, u) = y^m + a_1(x, u)y^{m-1} + \dots + a_m(x, u) = 0,$$

$$(11) \quad \Phi(x, y, u) = y^p + z_1(x, u)y^{p-1} + \dots + z_p(x, u) = 0$$

et égalier à zéro le résultant de ces polynomes en y

$$(12) \quad R(x, u) = 0,$$

équation que doivent vérifier les fonctions $\xi(u)$.

Ce résultant est une fonction holomorphe de x et de u s'annulant pour $x = u = 0$. Écartons le cas où R serait identiquement nul (F et Φ seraient alors divisibles par un polynome de même nature) et celui où $R(x, 0)$ serait identiquement nul, et où les deux courbes

$$F(x, y, 0) = 0, \quad \Phi(x, y, 0) = 0$$

du plan x, y auraient une partie commune; on peut remplacer alors (12) par une équation algébrique en x :

$$(13) \quad \mathcal{R}(x, u) = x^n + b_1(u)x^{n-1} + \dots + b_n(u) = 0,$$

dont les coefficients, holomorphes en u s'annulent pour $u = 0$; ses racines sont les fonctions $\xi(u)$ cherchées. On sait qu'elles se répartissent en systèmes circulaires, les racines d'un même système circulaire étant développables en séries entières sans termes constants

dont la variable est $u^{\frac{1}{N}}$, N est un nombre entier. La théorie des racines communes à deux équations algébriques donne les valeurs $y = \tau_i(u)$ qu'il faut associer aux valeurs trouvées pour x ; ces fonctions $\tau_i(u)$ tendent vers zéro avec u et sont développables en séries entières en $u^{\frac{1}{M}}$ (M entier) sans terme constant. Soient

$$x = \xi_i(u), \quad y = \tau_i(u) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les solutions ainsi obtenues pour les systèmes (8), (9) et (10), (11). Nous dirons qu'à chacune d'elles ξ_i, τ_i correspond un *zéro local* de la fonction φ sur l'un des cercles de Riemann associés à l'équation (10).

L'ordre de ce zéro se définit comme dans la théorie des fonctions algébriques, en considérant le développement de $\varphi(x, y, u)$ suivant les puissances de $x - \xi$ [$y - \tau_i$ est supposé déduit de (10)] et en distinguant deux cas suivant que $\xi(u), \tau_i(u)$ n'est pas un point de ramification ou coïncide avec un point de cette nature.

Observons à cet égard que les équations exprimant la coïncidence d'un zéro et d'un point de ramification

$$\xi(u) - e(u) = 0, \quad \tau_i(u) - h(u) = 0$$

ont pour premiers membres des fonctions holomorphes d'une variable auxiliaire $v = u^{\frac{1}{P}}$ (P entier); remarquons que $u = 0$ ne peut être un point limite pour les racines d'une équation de cette nature.

Nous pourrions donc admettre que, *pour $|u|$ positif et assez petit*, on a, pour un zéro déterminé ξ, τ_i le choix entre deux hypothèses seulement; *le zéro n'est pas point de ramification ou l'est constamment*.

En examinant, dans les deux cas, la suite des calculs donnant l'ordre d'un zéro, et en utilisant la même remarque, on voit que *l'ordre d'un zéro local $\xi(u), \tau_i(u)$ ne change pas pour $|u| > 0$ et assez petit*.

Pour le calcul de la fonction composée de la variable x et du paramètre u définie par la substitution, dans $\varphi(x, y, u)$, à y d'une fonction

algébroides définie par (10), on peut, d'après le théorème de M. Goursat, mentionné dans l'Introduction, sans diminuer la généralité, remplacer $\varphi(x, y, u)$ par un polynôme en y , $\Phi_1(x, y, u)$, de degré $m - 1$ au plus, dont les coefficients sont fonctions holomorphes de x et de u .

5. *Fonctions analogues aux fonctions rationnelles.* — Donnons-nous maintenant une fraction

$$(14) \quad g(x, y, u) = \frac{\psi(x, y, u)}{\varphi(x, y, u)},$$

dont les deux termes sont holomorphes en x, y, u et substituons à y les fonctions algébroides définies par l'équation (10), soit $\varpi(x, u)$ le résultat de cette substitution.

Si le dénominateur ne s'annule pas pour $x = y = u = 0$, $\frac{1}{\varphi}$ est développable en série entière par rapport à ces trois variables; il en est de même de $g(x, y, u)$ et nous sommes ramenés au cas où g est holomorphe.

Nous supposons donc $\varphi(0, 0, 0) = 0$ et $\varphi(0, y, 0)$ non identiquement nul. La fonction g peut admettre alors, sur les cercles de Riemann, des zéros locaux provenant de ψ et des pôles ⁽¹⁾ locaux (tendant vers $x = 0$ lorsque u tend vers zéro), provenant des zéros de φ et dont les ordres se définissent comme pour les fonctions algébriques; ici encore, l'ordre ne se modifie pas pour $|u|$ positif et assez petit.

Comme plus haut, nous pouvons encore, pour définir $\varpi(x, u)$, substituer à φ et à ψ deux polynômes Φ, Ψ en y à coefficients holomorphes en x et u ; on ne diminue donc pas la généralité en prenant

$$(15) \quad g(x, y, u) = \frac{\Psi(x, y, u)}{\Phi(x, y, u)} = \frac{\beta_0(x, u)y^{m-1} + \beta_1(x, u)y^{m-2} + \dots}{\alpha_0(x, u)y^{m-1} + \alpha_1(x, u)y^{m-2} + \dots}.$$

On peut même obtenir que le dénominateur soit indépendant de y en utilisant un théorème d'Algèbre utilisé dans la transformation des différentielles algébriques ⁽²⁾. Soit $R(x, u)$ le résultant des deux poly-

(1) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 2, Chap. XIII. APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, t. 1, Chap. IV.

(2) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 1, Chap. II.

nomes en y :

$$\begin{aligned} F(x, y, u) &= y^m + z_1(x, u)y^{m-1} + \dots, \\ \Phi(x, y, u) &= z_0(x, u)y^{m-1} + z_1(x, u)y^{m-2} + \dots, \end{aligned}$$

il existe deux polynomes en y , Φ_1 et F_1 donnant l'identité

$$F\Phi_1 + \Phi F_1 = R(x, u),$$

les coefficients de F_1 et Φ_1 se déduisent de ceux de F et Φ par des additions et multiplications; ils sont donc encore fonctions holomorphes de x et de u . Comme

$$g(x, y, u) = \frac{\Psi}{\Phi} = \frac{F_1\Psi}{F_1\Phi}$$

et que y est défini par la relation (10) on remplacera g par

$$g_1(x, y, u) = \frac{F_1\Psi}{R(x, u)}.$$

D'autre part, le théorème de Weierstrass permet, si $R(0, 0)$ est nul et $R(x, 0)$ non identiquement nul, d'écrire

$$R(x, u) = \mathcal{R}(x, u)S(x, u),$$

\mathcal{R} étant un polynome en x dont les coefficients holomorphes en u s'annulent pour $u = 0$:

$$\mathcal{R}(x, u) = x^n + b_1(u)x^{n-1} + \dots$$

et S une fonction holomorphe de x et de u . $S(0, 0)$ est différent de zéro.

$\frac{F_1\Psi}{S}$ est donc une fonction holomorphe $H(x, u)$ et

$$g_1(x, y, u) = \frac{F_1\Psi H}{\mathcal{R}}.$$

Nous remplacerons, comme plus haut, le numérateur par un nouveau polynome Ψ_1 , de degré $m - 1$ en y à coefficients $\gamma(x, u)$ holomorphes et substituerons en définitive à g le quotient

$$(16) \quad g_2(x, y, u) = \frac{\Psi_1}{\mathcal{R}} = \frac{\gamma_0(x, u)y^{m-1} + \gamma_1(x, u)y^{m-2} + \dots}{x^n + b_1(u)x^{n-1} + \dots}$$

et nous mettrons même en évidence les abscisses $\xi(u)$ des pôles

locaux de $g(x, y, u)$ en écrivant

$$(17) \quad x^n + b_1(u)x^{n-1} + \dots = [x - \zeta_1(u)][x - \zeta_2(u)] \dots [x - \zeta_n(u)].$$

La forme réduite (16) sera utilisée plus loin.

Remarque. — Dans certains cas, il est intéressant de mettre en évidence les points de ramification $e_i(u)$ comme pôles possibles; on y parvient en écrivant

$$g(x, y, u) = \frac{\Psi F'_y}{\Phi} \frac{1}{F'_y},$$

on transforme ensuite le premier facteur $\frac{\Psi F'_y}{\Phi}$ comme on vient de l'indiquer, en remplaçant son dénominateur par un polynôme en x .

6. *Intégrales abéloïdes et périodes locales.* — Les fonctions précédentes g sont, pour une valeur donnée de u , analogues aux fonctions rationnelles d'un point analytique sur une surface de Riemann considérées dans la théorie des fonctions algébriques.

Les intégrales

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} g(x, y, u) dx,$$

prises le long d'une ligne L tout entière intérieure à un cercle de Riemann correspondant, pour cette valeur de u , à l'équation (2) définissant la fonction algébroïde y sont par suite analogues aux intégrales abéliennes; nous les appellerons *intégrales abéloïdes*. Parmi les propriétés que ce rapprochement amène à reconnaître, nous signalerons les suivantes, qu'il suffit d'énoncer :

1° Considérée comme fonction de sa borne supérieure, c'est-à-dire du point analytique x_2, y_2 , une intégrale abéloïde est régulière en tous les points du cercle de Riemann, sauf en un nombre fini de points singuliers, pôles locaux de la fonction $g(x, y, u)$, qui, pour l'intégrale, sont des pôles ou des points critiques logarithmiques.

2° Il ne suffit pas d'indiquer la fonction g et les limites $x_1, y_1; x_2, y_2$ d'une intégrale abéloïde pour la bien définir : il faut encore connaître sinon exactement le chemin L d'intégration, du moins sa

disposition par rapport aux points de ramification $e_i(u)$, $h_i(u)$. Toutes les déterminations de l'intégrale correspondant aux différents chemins L se déduisent de l'une d'elles par addition de multiples de certaines périodes. Nous les appellerons des *périodes locales* en rappelant ainsi que les chemins L sont tout entiers intérieurs à un cercle de Riemann. (Si f , φ , ψ étaient des polynômes en x , y , l'intégrale abéloïde pourrait être considérée comme une intégrale abélienne définie dans un domaine plus étendu que le cercle de Riemann, et pour laquelle il pourrait y avoir des périodes d'une autre provenance.)

Comme pour les intégrales abéliennes, on peut considérer parmi les périodes locales des périodes cycliques et des périodes polaires; les premières proviennent des contours fermés tracés sur le cercle de Riemann et qu'on ne peut réduire à des points par déformation continue et se ramènent à $2p$ d'entre elles correspondant aux coupures a_i , b_i ; les périodes polaires sont les valeurs de l'intégrale abéloïde prises le long de petites circonférences entourant les points singuliers logarithmiques.

Mais il faut ajouter une troisième classe de périodes locales données par les valeurs de l'intégrale prises le long des circonférences limites Γ_i (n° 2).

Ces diverses périodes ne sont pas nécessairement indépendantes; quelques-unes peuvent ne pas exister, tel est le cas des périodes polaires lorsqu'il n'y a pas de points singuliers logarithmiques, ou celui des périodes cycliques lorsque la surface de Riemann T se trouve simplement connexe sans contour K (voir exemple II, n° 3).

3° Faisons maintenant varier le paramètre u , et supposons même que x_1 , x_2 soient fonctions analytiques de u mais restent distinctes des coordonnées des points de ramification et des autres points singuliers; le chemin d'intégration L se déformant de façon continue mais sans jamais passer par un point singulier. L'intégrale abéloïde est alors une fonction analytique de u (*A. E. N.*, n° 12).

La restriction peut être impossible à réaliser pour certains chemins et pour $u = 0$, car les points singuliers viennent alors se réunir tous au point $x = 0$; le chemin doit lui-même passer en ce point; il convient donc d'étudier cette valeur singulière.

Cette étude a été faite par Fuchs et par M. Picard dans le cas des intégrales abéliennes où f, φ, ψ sont des polynômes en x, y, u ; nous allons adapter leurs méthodes et leurs résultats au cas où f, φ, ψ sont fonctions holomorphes.

4^o *Étude du point singulier $u=0$.* Nous supposerons que les abscisses x_1, x_2 des points analytiques limites de l'intégrale abéoloïde

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} g(x, y, u) dx$$

sont toutes deux égales à r ; les ordonnées sont fonctions analytiques de u ; les autres cas se ramènent à celui-là par additions de fonctions holomorphes de u . Considérons les divers chemins tracés sur le cercle de Riemann joignant $r, y_1(r, u)$ et $r, y_2(r, u)$; les intégrales correspondantes sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles, soit

$$I = m_1 I_1 + m_2 I_2 + \dots + m_k I_k,$$

les coefficients m sont des entiers (positifs, négatifs ou nuls). Les périodes locales de l'intégrale sont également données par de telles combinaisons linéaires.

Intégrales et périodes appartiennent donc à la famille de fonctions de u définie par

$$(18) \quad \eta = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \dots + \alpha_k I_k,$$

où les α sont des constantes arbitraires.

Elles vérifient une équation différentielle linéaire qu'on obtient en éliminant les constantes α entre la relation (18) et celles qu'on en déduit en la dérivant

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{du} &= \alpha_1 \frac{dI_1}{du} + \dots + \alpha_k \frac{dI_k}{du}, \\ \frac{d^2\eta}{du^2} &= \alpha_1 \frac{d^2I_1}{du^2} + \dots + \alpha_k \frac{d^2I_k}{du^2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et en s'arrêtant dès qu'on trouve une forme linéaire en $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ qui n'est plus indépendante de celles qui la précèdent, soit $\frac{d^l \eta}{du^l}$.

commun $|u|^\lambda$, l'exposant λ étant un nombre supérieur aux exposants des termes de moindre degré des séries donnant les développements des différences $\xi_i(u) - \xi_j(u)$, $\xi_i(u) - e_n(u)$, $e_i(u) - e_n(u)$ suivant les puissances (à exposants entiers ou fractionnaires) de u . (Si quelques-unes de ces différences sont identiquement nulles on les écarte.)

Les cercles c_1, \dots, c_n sont extérieurs les uns aux autres; pour $|u|$ suffisamment voisin de zéro on peut donc éviter que les chemins L_1, L_2, \dots, L_k suivant lesquels sont prises les intégrales I_1, I_2, \dots, I_k ne pénétrant à l'intérieur de ces cercles, par suite

$$|x - \xi_1| > |u|^\lambda, \quad \dots, \quad |x - \xi_n| > |u|^\lambda$$

et

$$|g(x, y, u)| < \mu |u|^{-N}, \quad N = n\lambda.$$

On peut évidemment trouver un nombre Λ surpassant la longueur de tous les chemins d'intégration ⁽¹⁾ et l'on a bien

$$|I_j| < \Lambda |u|^{-N}, \quad \Lambda = \Lambda\mu \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Des inégalités analogues s'appliquent aux solutions $\gamma_1, \dots, \gamma_h$ formant le groupe (20), on en conclut de proche en proche que $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ ne peuvent admettre $u = 0$ comme point singulier essentiel; c'est l'extension du théorème de Fuchs que nous devons établir.

8. *Groupe local de monodromie.* — Lorsque le point représentant la variable u décrit dans son plan une courbe fermée en tournant autour de l'origine et revenant à sa position primitive, les chemins L_1, \dots, L_k et les intégrales I_1, \dots, I_k se modifient; les valeurs I'_1, \dots, I'_k qu'elles ont au retour sont évidemment des fonctions linéaires à coefficients entiers des valeurs I_1, \dots, I_k qu'elles avaient au départ. Les substitutions linéaires ainsi définies forment évidemment un groupe que nous appellerons *groupe local de monodromie*.

M. Picard ⁽²⁾ a donné, à propos des intégrales abéliennes des exemples de détermination directe de ce groupe; cette détermination

⁽¹⁾ On suppose ici que le point représentatif de la variable u ne tourne pas indéfiniment autour de $u = 0$, ce qu'on peut évidemment obtenir.

⁽²⁾ Voir notamment son Ouvrage récent : *Quelques applications de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, Chap. V, Section II, p. 136.

est intéressante parce qu'elle donne les exposants caractéristiques r relatifs au point singulier $u = 0$ de l'équation (19) et permet de préciser la nature des intégrales $I_j(u)$.

Nous appliquerons sa méthode en supposant l'équation (2) de la forme

$$y^2 = R(x, u) = Ax^n + \dots$$

R étant un polynôme de degré n en x , à coefficients holomorphes en u s'annulant pour $u = 0$, sauf le coefficient A de x^n qui est supposé constant.

Pour une étude complète, il conviendrait de faire diverses hypothèses concernant la répartition en systèmes circulaires des racines $e_1(u), \dots, e_n(u)$ du polynôme

$$R(x, u) = A(x - e_1) \dots (x - e_n),$$

nous nous limiterons au cas le plus simple, celui où le développement en série entière de $R(0, u)$ commence par un terme du premier degré en u ; e_1, \dots, e_n sont donnés par des séries entières en $u^{\frac{1}{n}}$ commençant par des termes du premier degré.

Nos intégrales abéoloïdes sont ici de la forme $\int P(x, y, u) \frac{dx}{y}$, P étant le quotient de deux fonctions holomorphes; on peut (n° 5) substituer à P le quotient d'un binôme $\gamma_0(x, u)y + \gamma(x, u)$ à coefficients holomorphes en x et u par un polynôme en x , $x^n + b(u)x^{n-1} + \dots$ à coefficients holomorphes; nous restreindrons encore notre étude au cas où ce polynôme se réduit à une constante; en d'autres termes, nous admettons que les seuls points critiques locaux de la fonction $g = \frac{P}{y}$ sont les points de ramification et sont des pôles du premier ordre. L'intégrale est alors de la forme

$$\int \frac{\gamma(x, u)}{y} dx + \int \gamma_0(x, u) dx.$$

Le second terme est fonction analytique de u ; nous étudierons donc

$$(22) \quad I(u) = \int \frac{\gamma(x, u) dx}{y}.$$

Nous utiliserons la méthode des lacets, plus simple ici que l'emploi des cercles de Riemann; nous prenons les limites de l'intégrale toutes

deux égales à r ; les diverses valeurs de l'intégrale s'obtiendront en ajoutant celles qui correspondent aux divers lacets que nous allons définir.

Représentons dans le plan de la variable x les points e_1, e_2, \dots, e_n qui diffèrent évidemment peu des sommets d'un polygone régulier, de centre $O(x=0)$, de petit rayon, $|u|$ étant supposé petit; ces points sont numérotés dans l'ordre où les rencontre une demi-droite issue de O tournant dans le sens direct autour de O et partant de la demi-droite OA , en appelant A le point $x=r$.

Le lacet L_s sera constitué par une ligne λ_s partant de A , aboutissant en un point ε_s très voisin de e_s , mais ne traversant aucun des segments rectilignes Oe_1, \dots, Oe_n , par un petit cercle c_s de centre e_s sur lequel on fera un tour, et enfin par le chemin λ_s parcouru en sens inverse du sens primitif.

On peut prendre, par exemple, λ_s constitué par l'arc AE_s de la circonférence $\Gamma(|x|=r)$ parcourue dans le sens direct de rotation autour de O et par un segment rectiligne $E_s\varepsilon_s$ porté par la droite Oe_s .

Soit I_s la valeur de l'intégrale prise le long de ce lacet L_s ; la détermination initiale de γ étant désignée par γ_1 .

La valeur de l'intégrale correspondant à une courbe fermée partant de A et y revenant est de la forme $I = \sum \alpha_s I_s$, les α étant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls. En particulier pour la circonférence de rayon r décrite dans le sens direct, il est facile de voir que l'intégrale a pour valeur

$$C = I_n - I_{n-1} + I_{n-2} - I_{n-3} + \dots \mp I_1,$$

le dernier signe est $-$ pour n pair et $+$ pour n impair.

L'intégrale I admet des périodes locales, qui sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de $n-1$ d'entre elles, par exemple de

$$\Omega_1 = I_2 - I_1, \quad \Omega_2 = I_3 - I_2, \quad \dots, \quad \Omega_{n-1} = I_n - I_{n-1}.$$

Supposons maintenant que u décrive dans son plan un petit cercle $|u| = \varphi' < \varphi$ en tournant une fois dans le sens direct; les points e_1, e_2, \dots, e_n décrivent des courbes voisines d'arcs de cercles de centre O et viennent évidemment occuper les nouvelles positions

Les lacets L se déformant en même temps d'une façon continue, soient L' leurs positions finales; pour les $n - 1$ premiers lacets L'_1, \dots, L'_{n-1} équivalent à L_2, \dots, L_n ; pour le dernier lacet L'_n équivalent à un tour complet sur C autour de O , au lacet L_1 et à un nouveau tour en sens inverse autour de O . On a donc pour les nouvelles valeurs I'_s des intégrales I_s

$$I'_s = I_{s+1},$$

lorsque $s < n$. Pour $s = n$ deux cas sont à distinguer suivant la parité de n :

Lorsque n est pair, après un tour complet de x sur le cercle Γ , y a repris sa détermination initiale, et l'on trouve

$$I'_n = 2C + I_1.$$

Si n est impair, y est remplacé après un tour par $-y$, puis après parcours de L_1 , par y , et les intégrales correspondant aux deux tours sur Γ ont une somme nulle; donc

$$I'_n = -I_1.$$

En définitive, le groupe local de monodromie de l'équation différentielle d'ordre n admettant I_1, \dots, I_n comme solutions est

$$(23) \quad I'_1 = I_2, \quad I'_{n-1} = I_n, \quad I'_n = 2C + I_1 = -I_1 + 2I_2 - 2I_3 + \dots + 2I_n$$

pour n pair

et

$$(24) \quad I'_1 = I_2, \quad I'_2 = I_3, \quad \dots, \quad I'_{n-1} = I_n, \quad I'_n = -I_1 \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

Étudions les équations caractéristiques ⁽¹⁾ correspondant à ces deux cas :

1° Pour n pair, l'équation caractéristique est

$$(25) \quad \Delta(s) = \begin{vmatrix} -s & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & \dots & -2 & 2-s \end{vmatrix} = 0.$$

⁽¹⁾ Voir GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. 2, Chap XX; PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 3, Chap. XI.

Ajoutant aux éléments de la dernière ligne ceux des précédentes multipliés respectivement par $-1, +1, -1, \dots, -1$, on met en facteur $s - 1$ dans la dernière ligne et l'on a

$$\Delta(s) = (s - 1) \Delta_1(s),$$

$\Delta_1(s)$ étant un déterminant dont les $n - 1$ premières lignes sont les mêmes que celles de Δ et dont la dernière est

$$1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1.$$

En ajoutant aux éléments de la dernière ligne ceux des lignes de rang impair on met encore $s - 1$ en facteur :

$$\Delta_1(s) = (s - 1)^2 \Delta_2(s),$$

les $n - 1$ premières lignes de Δ_2 sont identiques à celles de Δ et Δ_1 ; la dernière ligne a pour éléments

$$-1, 0, -1, 0, \dots, -1, 0.$$

En développant Δ_2 par rapport aux éléments de cette dernière ligne, on trouve

$$\Delta(s) = (s - 1)^2 (s^{n-2} + s^{n-4} + s^{n-6} + \dots + 1).$$

L'équation caractéristique admet donc la racine double $s = 1$ et des racines simples de la forme $s_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, k prenant les valeurs $1, 2, \dots, n - 1$ à l'exception de $\frac{n}{2}$.

D'après la théorie classique, en posant $r_k = \frac{1}{2i\pi} \log s_k = \frac{k}{n}$ à chaque racine simple s_k correspond une intégrale $u^{\frac{k}{n}} \psi_k(u)$ qui est le produit de $u^{\frac{k}{n}}$ par une fonction uniforme $\psi_k(u)$, fonction pour laquelle $u = 0$ ne peut être qu'une singularité polaire. A la racine double $s = 1$, correspond un groupe de deux intégrales, qu'il faut étudier de plus près. On voit aisément que C est l'une de ces intégrales; et si l'on pose

$$2S = I_1 + I_2 + \dots + I_n,$$

les relations (23) donnent

$$2S' = I_1' + I_2' + \dots + I_n' = 2C + 2S.$$

Donc C et S constituent deux intégrales auxquelles correspond la substitution canonique

$$C' = C, \quad S' = C + S,$$

le nombre $r = \frac{1}{2i\pi} \log s$ est nul pour $s = 1$; et

$$C = \psi(u), \quad S = \psi(u) \log u + \gamma(u);$$

ψ et γ sont uniformes au voisinage de $u = 0$.

2° L'équation caractéristique lorsque n est impair s'écrit

$$\begin{vmatrix} -s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -s & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -s \end{vmatrix} = -(s^n + 1) = 0.$$

Ses racines sont $s_k = e^{\frac{2k+1}{n}i\pi}$, elles sont toutes simples; il leur correspond des exposants $r_k = \frac{2k+1}{2n}$ et des intégrales $u^{\frac{2k+1}{2n}} \psi_k(u)$, (ψ_k uniforme).

En définitive, les intégrales I sont de la forme :

1° n pair,

$$I = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u^{\frac{k}{n}} \psi_k(u) + \beta_1 \psi(u) + \beta_2 [\psi(u) \log u + \gamma(u)],$$

l'accent de Σ' signale que la valeur $k = \frac{n}{2}$ doit être exceptée ;

2° n impair,

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^{\frac{2k+1}{2n}} \psi_k(u).$$

Dans ces formules, les lettres α, β désignent des constantes, les fonctions ψ_k, ψ, γ sont uniformes et $u = 0$ ne peut (n° 7) être qu'un point ordinaire ou un pôle pour ces diverses fonctions.

Appliquons ce résultat à l'intégrale I, relative au lacet L_1 , pour n pair; soient $\alpha'_k, \beta'_1, \beta'_2$ les valeurs des constantes. Quand l'argument de u augmente de 2π on passe de I_1 à I_2 et l'on obtient ainsi les

constantes $\alpha_k^2, \beta_1^2, \beta_2^2$ correspondant à l'intégrale I_2 relative à L_2 :

$$\alpha_k^2 = \alpha_k^1 e^{\frac{2ik\pi}{u}}, \quad \beta_1^2 = \beta_1^1 + 2i\pi\beta_2^1, \quad \beta_2^2 = \beta_2^1.$$

On en conclut que pour la période $\Omega_1 = I_2 - I_1$ la constante β_2 est nulle; on voit de la même façon que *les périodes locales Ω_i ne contiennent pas de terme en $\log u$.*

Lorsque les coefficients des séries entières en x, y, u que nous avons utilisées sont tous réels, quelques-unes des intégrales précédentes se ramènent à des intégrales prises le long de l'axe des quantités réelles du plan de la variable x . On a donc retrouvé et précisé ainsi les résultats ⁽¹⁾ donnés antérieurement (*A. E. N.*, n° 13).

⁽¹⁾ Signalons un lapsus à rectifier dans cet article (p. 379, ligne 5 en remontant) : la série entière qu'il faut considérer à propos de l'expression $\frac{z^m}{\sqrt{z}}$ est toujours formée avec les variables $\frac{1}{z}$ et v , sans qu'il y ait lieu de faire intervenir $\frac{1}{\sqrt{z}}$. Comme $m - \frac{n}{2}$ est entier pour n pair, et ne l'est pas pour n impair, les termes en $\log v$ et $\log u$ ne se présentent que dans le premier cas.

ERRATA

Page 384, ligne 5, au lieu de \mathcal{W} , lire, n° 7.