

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SZOLEM MANDELBROJT

**Le rôle des fonctions monogènes de M. Borel dans la
théorie des séries de Dirichlet**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 51 (1934), p. 373-397

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__373_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

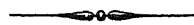
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE ROLE
DES
FONCTIONS MONOGÈNES DE M. BOREL

DANS LA THÉORIE DES SÉRIES DE DIRICHLET

PAR M. S. MANDELBROJT.



1. Le célèbre théorème de M. Hadamard sur la composition des singularités peut être énoncé de la manière suivante : Soient $f(s)$, $\varphi(s)$ et $\Phi(s)$ les fonctions obtenues par prolongement analytique des séries respectives $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-ns}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n e^{-ns}$. Si γ est un point singulier de $\Phi(s)$, deux cas sont possibles : 1^o $\gamma = \alpha + \beta$, où α est une singularité de $f(s)$ et β une singularité de $\varphi(s)$; 2^o sur toute courbe à distance finie, liant γ à un point donné s_0 situé dans le demi-plan de convergence de $\sum a_n c_n e^{-ns}$, il existe un point de la forme $\alpha + \beta$ (1).

Ce théorème cesse d'être vrai lorsqu'on cherche à substituer aux séries de Taylor les séries de Dirichlet générales. On s'en rend immédiatement compte en posant $f(s) = \varphi(s) = \zeta(s)$. Les deux fonctions sont données par les séries $\sum a_n e^{-\log n \cdot s} = \sum c_n e^{-\log n \cdot s} = \sum \frac{1}{n^s}$ ($a_n = c_n = 1$). La fonction $\Phi(s)$ donnée par $\sum a_n b_n e^{-\log n \cdot s}$ est donc elle-même la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Comme la seule singularité de $\zeta(s)$ (à distance finie) est le point d'affixe un, on voit que si le théorème de M. Hadamard était vrai pour les séries de Dirichlet, la fonction $\Phi(s) = \zeta(s)$

(1) MANDELBROJT, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. LIV, 1932, p. 18. Les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont supposées uniformes.

ne pourrait admettre d'autres singularités que le point d'affixe $1 + 1 = 2$, d'où la contradiction.

En substituant à l'énoncé précédent, concernant la composition des singularités des séries de Taylor, un énoncé qui lui est au fond équivalent, nous avons pu, en 1928, généraliser profondément ce nouvel énoncé, en établissant un théorème valable cette fois-ci dans le domaine des séries de Dirichlet très générales (1).

Le théorème que nous avons donné est plus général que celui qui suit. Dans son beau livre, consacré aux récents progrès de la théorie des séries de Dirichlet, M. V. Bernstein a donné, malgré la difficulté du sujet, une exposition maniable d'un cas étendu de notre théorème.

C'est cet énoncé que nous donnons dans ce numéro (2). Soit $\varphi(s)$ une fonction analytique, supposée uniforme (3), prolongement de la série $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ ($s = \sigma + it$) possédant un axe de convergence simple. Nous écrirons $\varphi(s) = \Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$. Désignons par \mathbf{S}_φ l'ensemble des points singuliers de $\varphi(s)$. Nous dirons que $\varphi(s)$ est, aux singularités près, d'ordre k dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > \alpha$ lorsque, à chaque couple de nombres positifs ε et ω , on peut faire correspondre une constante $P = P(\varepsilon, \omega)$ telle que l'inégalité

$$|\varphi(\sigma + it)| < P |t|^{k+\omega}$$

ait lieu en tout point du demi-plan $\mathcal{R}(s) > \alpha$, extérieur à l'ensemble obtenu en traçant un cercle de rayon ε autour de chaque point de \mathbf{S}_φ .

Nous désignons par H_φ l'abscisse d'holomorphie de $\varphi(s)$, c'est-à-dire la borne supérieure des abscisses des points de \mathbf{S}_φ .

En posant $\varphi_1(s) = \Sigma l_n e^{-\lambda_n s}$, $\varphi_2(s) = \Sigma m_n e^{-\mu_n s}$, nous désignons par $\mathbf{S}_{\varphi_1, \varphi_2}$ l'ensemble des points qui peuvent être mis sous la forme de la somme d'un point quelconque de \mathbf{S}_{φ_1} et d'un point quelconque de \mathbf{S}_{φ_2} .

Désignons par $\overline{\mathbf{S}}_{\varphi_1, \varphi_2}$ l'ensemble que l'on obtient en ajoutant à l'ensemble $\mathbf{S}_{\varphi_1, \varphi_2}$ tous ses points limites.

Le théorème cité plus haut s'énonce de la manière suivante :

(1) MANDELBROJT, *Acta Mathematica*, t. 53, 1929, p. 1.

(2) V. BERNSTEIN, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*. Collection Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1933.

(3) Ceci pour faciliter l'exposition. Pour la même raison, les séries qui interviennent dans la suite sont supposées uniformes.

Si l'abscisse de convergence uniforme U_f (1) de la série

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

et l'abscisse de convergence simple C_g de la série

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\mu_m s},$$

sont toutes les deux finies;

Si les sommes de ces séries sont respectivement, aux singularités près, d'ordre fini k et l dans les demi-plans $\Re(s) > \gamma$ et $\Re(s) > \delta$;

Si l'on pose

$$b_n^{(r)} = \sum_{\mu_m < \lambda_n} (\lambda_n - \mu_m)^r b_m,$$

où r désigne un entier positif supérieur à $k + l$; si, enfin, A_{fg} désigne le plus grand des nombres $H_f + \delta$, $\gamma + \delta$, $H_g + \gamma$, où H_f et H_g sont les abscisses d'holomorphie de $f(s)$ et de $g(s)$.

Alors la série de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{(r)} e^{-\lambda_n s}$$

converge dans le demi-plan $\Re(s) > U_f + C_g$ et sa somme peut être prolongée dans le demi-plan $\Re(s) > A_{fg}$ suivant chaque courbe qui ne contient aucun point de l'ensemble \overline{S}_{fg} , ni aucun point de l'ensemble S_f . Les points de ce dernier ensemble qui n'appartiennent pas à l'ensemble \overline{S}_{fg} ne peuvent d'ailleurs être singuliers pour la fonction $F(s)$ que lorsque $\delta < 0$ et, de plus, la fonction $sg(s)$ est holomorphe à l'origine et y possède un zéro dont l'ordre de multiplicité ne dépasse pas $\gamma + 1$; dans ce cas, on peut ajouter que ces points ne sont certainement plus singuliers pour la différence

$$F(s) - I(s),$$

où

$$I(s) = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} g^{(r-\nu)}(0) f^{(\nu)}(s).$$

(1) Dans notre énoncé original l'abscisse U_f est remplacé par l'abscisse de convergence absolue, ce qui est plus restrictif.

Faisons maintenant une remarque fort simple, mais importante pour l'explication du but de ce Mémoire.

Lorsque $\lambda_n = \mu_n = n$ ($n = 1, 2, \dots$) l'ensemble \mathbf{S}_{fg} est fermé, il est donc confondu avec l'ensemble $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$.

Dans le cas des séries de Taylor ($\lambda_n = \mu_n = n$), l'énoncé précédent se traduit de la manière suivante :

En posant

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}, \\ g(s) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{-ms}, \\ F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{(1)} e^{-ns}, \end{aligned}$$

où

$$b_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{m=n-1} (n-m) b_m,$$

la fonction $F(s)$ peut être prolongée suivant chaque courbe qui ne contient aucun point de l'ensemble \mathbf{S}_{fg} ⁽¹⁾ ni aucun point de l'ensemble \mathbf{S}_f . Les points de \mathbf{S}_f qui ne font pas partie de \mathbf{S}_{fg} ne peuvent être singuliers pour $F(s)$ que si la fonction $sg(s)$ est holomorphe à l'origine et y possède, soit un zéro simple, soit un zéro double.

A partir de cet énoncé, on retrouve facilement le théorème de M. Hadamard, cité dès le début de ce Mémoire, et concernant les séries

$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$, $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-ns}$ et $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n e^{-ns}$. Il suffit d'appliquer cet énoncé aux séries

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}, \\ g(s) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{-ms} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{e^{-s}} \varphi(s). \end{aligned}$$

(1) D'après la remarque que nous venons de faire, on substitue cet ensemble à $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$ qui lui est dans ce cas-ci équivalent.

Remarquons que, dans le cas des séries de Dirichlet générales, on ne peut pas affirmer que l'ensemble $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$ coïncide avec l'ensemble \mathbf{S}_{fg} . Il importe de constater qu'on peut former deux séries de Dirichlet $f(s)$ et $g(s)$ (par exemple du type $\lambda_n = \log n$), telles que les propriétés suivantes aient lieu :

1° L'ensemble $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$ contient des points qui ne sont pas contenus dans l'ensemble \mathbf{S}_{fg} , c'est-à-dire on a

$$\mathbf{S}_{fg} \subset \overline{\mathbf{S}}_{fg},$$

sans que

$$\overline{\mathbf{S}}_{fg} \subset \mathbf{S}_{fg};$$

2° La fonction composée $F(s)$ admet dans le demi-plan $\Re(s) > A_{fg}$, tous les points de $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$ comme points singuliers (¹);

3° $\delta = 0$;

4° $F(s)$ n'a pas dans le demi-plan $\Re(s) > A_{fg}$ d'autres points singuliers que les points de l'ensemble $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$.

Nous indiquons un tel exemple au n° 4.

On voit donc que dans le cas des séries de Dirichlet générales, on est obligé d'ajouter à l'ensemble \mathbf{S}_{fg} les points limites de cet ensemble (sans oublier les points de \mathbf{S}_f) pour avoir l'ensemble éventuel des points singuliers de $F(s)$. Dans le cas des séries de Taylor ($\lambda_n = n$) cette opération est inutile, car les deux ensembles $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$ et \mathbf{S}_{fg} sont confondues.

On peut donc se poser la question suivante :

Les points de $\overline{\mathbf{S}}_{fg} - \mathbf{S}_{fg}$ (c'est-à-dire les points de $\overline{\mathbf{S}}_{fg}$ qui ne sont pas points de \mathbf{S}_{fg}) jouent-ils un rôle particulier pour la fonction $F(s)$?

Nous nous sommes demandé si l'on ne pourrait pas, même lorsque les points de l'ensemble $\overline{\mathbf{S}}_{fg} - \mathbf{S}_{fg}$ sont tous singuliers pour $F(s)$, prolonger $F(s)$ à travers cet ensemble, autrement que par le prolongement de Weierstrass.

Ne pourrait-on pas effectuer, à travers ces points, un prolongement par l'intermédiaire des fonctions monogènes de M. Borel ?

(¹) Comme d'habitude nous appelons point singulier d'une fonction uniforme $\varphi(s)$, tout point où le prolongement analytique de la série définissant $\varphi(s)$ n'est pas possible.

La réponse à cette question est, dans des cas assez généraux, affirmative.

Ce fait, outre l'intérêt qu'il peut présenter en lui-même, nous semble important à deux points de vue différents :

1° Les fonctions monogènes de M. Borel s'introduisent d'une manière, sinon simple, du moins assez naturelle.

2° L'analogie entre le théorème de M. Hadamard concernant les séries du type $\lambda_n = n$ et notre théorème concernant la composition des singularités des séries de Dirichlet, du type général, paraît encore plus étroite : Dans le cas des séries de Taylor, seuls les points de \mathbf{S}_{fg} peuvent être singuliers pour $F(s)$; dans des cas fréquents de séries de Dirichlet, seuls les points de \mathbf{S}_{fg} peuvent être singuliers au double point de vue, celui de Weierstrass et celui de M. Borel, les points de $\overline{\mathbf{S}}_{fg} - \mathbf{S}_{fg}$ n'étant pas singuliers au point de vue de M. Borel (1).

Nous venons d'exposer le but de ce Mémoire.

Le numéro qui suit est consacré au rappel des notions importantes de la théorie des fonctions monogènes de M. Borel (2).

2. Soit \mathbf{S} un ensemble dénombrable de points. Nous donnons à chaque élément de \mathbf{S} un indice bien déterminé (3).

Soient

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$$

les éléments de \mathbf{S} .

Soit

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

une suite de nombres positifs vérifiant les conditions suivantes :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \log \log \frac{1}{r_n}} = 0, \\ \sum_{h=n+1}^{\infty} r_h < \frac{r_n}{4} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

(1) Ce que nous venons de dire est peu précis, mais nous avons tenu à rendre les faits mentionnés plus suggestifs.

(2) BOREL, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*. Collection Borel. Gauthier-Villars, 1917.

(3) C'est-à-dire que les numéros des éléments de \mathbf{S} sont fixés une fois pour toutes.

(Toute suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ intervenant dans ce Mémoire jouira de ces deux propriétés.)

h étant un entier positif, de chaque point e_n comme centre, avec un rayon $\frac{r_n}{2^h}$, décrivons un cercle $s_n^{(h)}$.

Nous définissons maintenant les cercles $s_n^{(h)}$ de la manière suivante : on peut déterminer une quantité $r_1^{(h)}$, $\frac{r_1}{2^{h+1}} < r_1^{(h)} < \frac{r_1}{2^h}$, telle que le cercle de rayon $r_1^{(h)}$ autour du point e_1 ne coupe aucun cercle $s_2^{(h)}, s_3^{(h)}, \dots$. Désignons par $s_1^{(h)}$ le cercle de rayon $r_1^{(h)}$ autour du point e_1 .

Nous désignons par $s_2^{(h)}$ un cercle de rayon $r_2^{(h)}$, $\frac{r_2}{2^{h+1}} < r_2^{(h)} < \frac{r_2}{2^h}$, autour du point e_2 ne coupant aucun cercle $s_3^{(h)}, s_4^{(h)}, \dots$. Et ainsi de suite : tout cercle $s_n^{(h)}$ a comme centre le point e_n , son rayon $r_n^{(h)}$ vérifie l'inégalité

$$\frac{r_n}{2^{h+1}} < r_n^{(h)} < \frac{r_n}{2^h},$$

les cercles $s_n^{(h)}$ ne se coupent pas deux à deux ⁽¹⁾.

Nous appelons « entourage de M. Borel, d'indice h (et relatif à la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$) de l'ensemble \mathbf{S} », l'ensemble de tous les points intérieurs (au sens strict) aux cercles $s_n^{(h)}$.

Supposons maintenant que l'ensemble \mathbf{S} ait tous ses points dans un domaine D_1 ⁽²⁾. Nous désignons par $B^{(h)}$ l'ensemble des points du domaine D_1 duquel on a exclu l'entourage de M. Borel, d'indice h (et relatif à la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$) de l'ensemble \mathbf{S} . L'ensemble $B^{(h)}$ contient certainement des points de D_1 pour h assez grand. *Il est d'un seul tenant* ⁽³⁾.

$B^{(h)}$ est un ensemble parfait.

Nous appelons « domaine B » l'ensemble des points dont chacun

(1) Pour la démonstration de l'existence des cercles $s_n^{(h)}$, voir le livre cité de M. Borel (nous substituons la notation $B^{(h)}$ à la notation $C^{(h)}$ introduite par M. Borel).

(2) Comme d'habitude nous appelons domaine tout ensemble connexe de points intérieurs, sauf toutefois lorsqu'il s'agit d'un « domaine B » qui, au contraire, peut ne pas posséder du tout de points intérieurs.

(3) Pour la définition des domaines $B^{(h)}$, et par conséquent du « domaine B », on suppose en général que \mathbf{S} est partout dense dans une partie de D_1 . Mais il est évident que ceci n'est pas indispensable. Rien n'empêche, d'ailleurs, le lecteur de faire cette hypothèse dans la suite.

appartient à un $B^{(h)}$ correspondant à une certaine valeur de h ; d'une façon précise, un point P sera dit intérieur à B , si pour une certaine valeur h_1 de h , et par conséquent pour toutes les valeurs $h > h_1$, P appartient à $B^{(h)}$. Un « domaine B » n'est pas parfait.

Rappelons maintenant la définition des fonctions monogènes.

La fonction $f(z)$ sera dite monogène dans le « domaine B », si :

1° $f(z)$ est continue dans B (c'est-à-dire continue sur tout $B^{(h)}$; comme $B^{(h)}$ est parfait, cette continuité est alors uniforme sur $B^{(h)}$).

2° z_1 étant un point de B , l'expression

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

tend *uniformément* vers une limite $f'(z_1)$ lorsque z_2 appartenant à $B^{(h)}$, z_2 tend vers z_1 tout en restant dans $B^{(h)}$; c'est-à-dire quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut lui faire correspondre un nombre δ tel que l'inégalité $|z_2 - z_1| < \delta$ entraîne

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_1) \right| < \varepsilon,$$

z_1 et z_2 étant dans $B^{(h)}$.

La valeur de $f'(z_1)$ est évidemment indépendante du domaine $B^{(h)}$ envisagé, car tout point de $B^{(h)}$ appartient à $B^{(h_1)}$ avec $h_1 > h$.

On suppose que $f'(z)$ est continue dans B .

Les fonctions monogènes, au sens de M. Borel, jouissent des propriétés tout à fait analogues à celles des fonctions holomorphes. Mentionnons les faits importants suivants :

Les fonctions monogènes admettent dans B une formule de Cauchy semblable à la formule de Cauchy de la théorie des fonctions analytiques.

La monogénéité entraîne l'existence des dérivées de tous les ordres ⁽¹⁾.

3. Avant de répondre aux questions que nous nous sommes posées dans le n° 1, introduisons la définition suivante :

(1) Voir le livre de M. Borel.

Soit \mathbf{S}_φ l'ensemble des points singuliers de la fonction $\varphi(s) = \sum d_n e^{-\lambda_n s}$.

Soit \mathbf{S}'_φ un sous-ensemble dénombrable de \mathbf{S}_φ dont les éléments sont numérotés dans un ordre bien déterminé (1).

Nous dirons que $\varphi(s)$ est, à l'entourage B (relatif à la suite

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$$

de $[\mathbf{S}'_\varphi; \mathbf{S}_\varphi]$ près, d'ordre k dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > \alpha$, lorsque, à chaque couple de nombres positifs ε et ω , et à chaque entier positif h , on peut faire correspondre une constante $P = P(\varepsilon, \omega, h)$, telle que l'inégalité

$$(m) \quad |\varphi(\sigma + it)| < P |t|^{k+\omega}$$

ait lieu en tout point du demi-plan $\mathcal{R}(s) > \alpha$ extérieur à l'entourage de M. Borel d'indice h (relatif à la suite r_1, r_2, \dots) de l'ensemble \mathbf{S}'_φ , et extérieur à l'ensemble des cercles de rayon ε autour de tous les points de $\mathbf{S}_\varphi - \mathbf{S}'_\varphi$ (2).

Nous n'excluons pas le cas où les deux ensembles \mathbf{S}_φ et \mathbf{S}'_φ coïncident, c'est-à-dire lorsque l'ensemble $\mathbf{S}_\varphi - \mathbf{S}'_\varphi$ est vide.

Des fonctions $\varphi(s) = \sum d_n e^{-\lambda_n s}$ possédant la propriété indiquée (avec k fini) existent, comme nous le verrons au n° 4.

Cette notion généralisée de l'ordre d'une série de Dirichlet, dans un demi-plan, étant introduite, on peut, en conservant les notations du théorème de la page 375, le compléter de la manière suivante :

(1) C'est-à-dire que l'on suppose, comme à la page 378, qu'on a fixé, d'une manière définitive, les indices des éléments de \mathbf{S}'_φ . Soient e_1, e_2, \dots ces éléments.

(2) La constante P doit être la même, lorsque ε, ω et h sont donnés, quel que soit l'entourage de M. Borel d'indice h (relatif à la suite r_1, r_2, \dots) de \mathbf{S}'_φ .

C'est-à-dire que, la suite r_1, r_2, \dots , vérifiant les deux conditions (a), de la page 378, étant donnée, l'inégalité (m) doit avoir lieu avec la même constante P (ω, h et ε étant donnés) quels que soient les cercles $s_n^{(h)}$, des rayons $r_n^{(h)}$ autour des points e_n , définissant l'entourage d'indice h de M. Borel (à condition, bien entendu, que ces cercles ne se coupent pas et que leurs rayons $r_n^{(h)}$ vérifient les inégalités

$$\frac{r_n}{2^{h+1}} < r_n^{(h)} < \frac{r_n}{2^h}.$$

Si l'abscisse de convergence uniforme U_f de la série

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

et l'abscisse de convergence simple C_g de la série

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\mu_m s},$$

sont toutes les deux finies;

S'il existe deux sous-ensembles dénombrables $\mathbf{S}'_f(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ et $\mathbf{S}'_g(\beta_1, \beta_2, \dots)$ respectivement des ensembles \mathbf{S}_f et \mathbf{S}_g , tels que les deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$ sont respectivement, à l'entourage B (relatif à la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$) de $[\mathbf{S}'_f; \mathbf{S}_f]$ et de $[\mathbf{S}'_g; \mathbf{S}_g]$ près, d'ordre k et l dans les demi-plans $\Re(s) > \gamma$ et $\Re(s) > \delta \geq 0$;

Si l'égalité

$$\alpha_i + \beta_i = \alpha_j + \beta_j$$

n'a lieu que si $i = j$;

Si

$$p = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log r_n}{\log |\beta_n|} < +\infty;$$

Si D est un domaine borné contenu dans le demi-plan $\Re(s) > A_{fg}$, s'il contient un point du demi-plan $\Re(s) > U_f + C_g$ et ne contient pas d'autres points de Σ_{fg} que ceux de l'ensemble Σ_{fg} composé des points $\alpha_i + \beta_i$;

Alors, la fonction

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{(r)} e^{-\lambda_n s},$$

où r est un entier positif supérieur à $k + l + 3p$, est monogène, au sens de M. Borel, dans le « domaine B » formé dans D avec les points de Σ_{fg} qui y sont situés et avec la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ (1).

(1) C'est-à-dire que le « domaine B » en question est formé en enlevant de D les points intérieurs aux cercles dont les centres sont les points de Σ_{fg} situés dans D . Le rayon d'un tel cercle autour de chaque point $\alpha_n + \beta_n$, faisant partie de D , est $r_n^{(k)}$. L'ensemble des points de Σ_{fg} contenus dans D et le domaine D jouent dans cette construction le

Remarquons que les points de Σ_{f_g} peuvent constituer un ensemble partout dense dans un domaine D_1 contenu dans D . Le domaine D_1 est donc, *a priori*, d'après le théorème de la page 375, interdit au prolongement analytique de $F(s)$. Par le théorème que nous venons d'énoncer on voit que, de toute manière, on peut prolonger $F(s)$ dans un « domaine B » faisant partie de D , par l'intermédiaire d'une fonction monogène de M. Borel.

Nous avons posé dans le théorème que nous venons d'énoncer $\delta \geq 0$, uniquement pour ne pas faire intervenir, comme singularités possibles de $F(s)$, dans le demi-plan $\Re(s) > A_{f_g}$, les points de \mathbf{S}_f . Le fait que ces points n'interviennent pas, dans le sens précisé, résulte du théorème de la page 375.

Ceci ne constitue d'ailleurs pas une restriction.

Démonstration du théorème 1. — Soit Δ un domaine complètement intérieur au domaine D , et soit d la plus petite distance d'un point quelconque de Δ à un point quelconque de la frontière de D .

Désignons par $\underline{\mathbf{S}}_g = \mathbf{S}_g - \mathbf{S}_g^1$ l'ensemble des points de \mathbf{S}_g qui ne sont pas contenus dans \mathbf{S}_g^1 .

Soit D_g un ensemble composé de domaines jouissant des propriétés suivantes :

1° Chaque point de la frontière de D_g est à une distance inférieure ou égale à $\frac{d}{2}$ soit d'un point, au moins, de $\underline{\mathbf{S}}_g$ soit d'un point de la droite $\sigma = \delta$.

2° Tout point de la frontière de D_g est à une distance supérieure à $\frac{d}{10}$ de tout point de $\underline{\mathbf{S}}_g$ et de tout point de la droite $\sigma = \delta$.

3° D_g ne contient que des points du demi-plan $\Re(s) > \delta$, cet ensemble contient tous les points du demi-plan $\Re(s) > H_g + \frac{d}{2}$.

même rôle que \mathbf{S} et D_1 jouaient, à la page 379, pour la construction du « domaine B » qui y intervient.

$e'_i = \alpha_{n_i} + \beta_{n_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) étant les points de Σ_{f_g} situés dans D , la suite $r'_1 = r_{n_1}$, $r'_2 = r_{n_2}$, \dots , $r'_i = r_{n_i}$, \dots joue dans la construction du « domaine B » de l'énoncé le même rôle que la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, à la page 379, jouait dans celle du « domaine B » qui y intervient.

4° En désignant par L_n la longueur totale de la partie de la frontière de D_g , comprise dans la bande $n - 1 \leq t \leq n$, on a

$$L_n < M \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

où M est une constante indépendante de n .

Un tel domaine existe, comme on s'en rend facilement compte (1).

Traçons autour de chaque point β_i de S_g^1 un cercle de rayon $\frac{r_i}{2^{h+2}}$. Soit $\omega(h, i)$ ce cercle.

Soit Γ_h la courbe, qui peut être composée de plusieurs branches, constituant la frontière de l'ensemble \bar{D}_g , obtenu en excluant de l'ensemble D_g les points de tous les cercles $\omega(h, i)$.

Soit E_h la partie de Γ_h qui est la frontière du domaine faisant partie de \bar{D}_g et contenant les points du demi-plan $\mathcal{R}(s) > H_g + \frac{d}{2}$ (2).

On constate facilement, en vertu du théorème de Cauchy, que si c est une quantité positive supérieure à C_g , alors

$$(f) \quad \frac{r!}{2\pi i} \int_{E_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}} = \frac{r!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}},$$

dès que $\mathcal{R}(s) > U_f + c$.

Soit, en effet, $\bar{D}_g(T)$ la partie de \bar{D}_g comprise dans la demi-bande $-T < t < T$, $\sigma < c$, formant un domaine, et dont la droite $\sigma = c$ ($-T < t < T$) constitue une partie de la frontière; en désignant par $K(T)$ la frontière de $\bar{D}_g(T)$, on a évidemment, pour $\mathcal{R}(s) > U_f + c$,

$$\int_{K(T)} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}} = 0.$$

Il suffit maintenant de remarquer, qu'étant donné l'ordre de croissance des modules des fonctions $f(s)$ et $g(s)$, et la grandeur du nombre r , la partie de l'intégrale étendue le long des segments $t = -T$, $t = T$, formant partie éventuelle de $K(T)$, tend vers zéro avec $\frac{1}{T}$. D'où la formule (f).

(1) Voir par exemple le livre cité de M. Bernstein, page 208.

(2) Nous supposons que l'entier positif h est suffisamment grand et que la quantité positive d est suffisamment petite, pour que les raisonnements employés au cours de cette démonstration soient valables.

On a, d'autre part, pour $\mathcal{R}(s) > U_f + c$,

$$\begin{aligned} \frac{r!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}} &= \frac{r!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(u)}{u^{r+1}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(s-u)} du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \left(\frac{r!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(u) e^{\lambda_n u} \frac{du}{u^{r+1}} \right); \end{aligned}$$

comme $c > C_g$, on a, d'après une formule connue,

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(u) e^{\lambda_n u} \frac{du}{u^{r+1}} = \sum_{\mu_m < \lambda_n} (\lambda_n - \mu_m)^r b_m = b_n^{(r)},$$

et, par conséquent, pour $\mathcal{R}(s) > U_f + c$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{(r)} e^{-\lambda_n s} = \frac{r!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}}.$$

Le prolongement *analytique* de $F(s)$ (1) est donc donné, en dernier lieu, par l'intégrale

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{E_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}}.$$

C'est l'étude de cette intégrale qui nous fournira la démonstration de notre théorème.

Envisageons l'ensemble de tous les points s de Δ , vérifiant toutes les inégalités

$$|s - \gamma_m| = |s - \alpha_m - \beta_m| \geq r_m^{(h)} > \frac{r_m}{2^{h+1}}; \quad (\gamma_m = \alpha_m + \beta_m).$$

D'ailleurs, quel que soit le point α de $\mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f^1$, quel que soit le point β de $\mathbf{S}_g - \mathbf{S}_g^1$ et quels que soient les entiers i et j , on a, lorsque s est un point quelconque de Δ ,

$$|s - \alpha - \beta| > d, \quad |s - \alpha_i - \beta_j| > d, \quad |s - \alpha_i - \beta| > d.$$

De même, si $i \neq j$, on a, quel que soit le point s de Δ ,

$$|s - \alpha_i - \beta_j| > d.$$

Soit u' un point de la courbe E_h . Étant donné les propriétés de la

(1) Dans une partie, au moins, de son domaine d'existence.

courbe Γ_h et celles de sa partie E_h , on voit qu'il existe, soit un point β_p , tel que

$$|u' - \beta_p| = \frac{r_p}{2^{h+2}} < \frac{1}{2} r_p^{(h)},$$

soit un point β de $\mathbf{S}_g - \mathbf{S}_g^1$, tel que

$$|u' - \beta| \leq \frac{d}{2},$$

soit, enfin, un point τ de la droite $\sigma = \hat{\delta}$, tel que

$$|u' - \tau| \leq \frac{d}{2}.$$

Il en résulte que tout point s , appartenant à Δ et envisagé plus haut, vérifie les conditions suivantes :

1° $\Re(s - u') > \sigma,$

2° quel que soit l'entier q

$$|s - u' - \alpha_q| \geq \frac{r_q}{2^{h+2}} > r_q^{(h+2)},$$

et, enfin, 3° quel que soit le point α de $\mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f^1$, on a

$$|s - u' - \alpha| \geq \frac{d}{2} \quad (1).$$

En tenant alors compte du fait que les fonctions $f(s)$ et $g(s)$ sont respectivement d'ordre généralisé k et l dans les demi-plans $\Re(s) > \gamma$ et $\Re(s) > \delta$ (2), on voit que, pour toutes les valeurs de s vérifiant l'ensemble d'inégalités,

$$|s - \gamma_i| = |s - \alpha_i - \beta_i| > \frac{r_i}{2^{h+1}} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

et pour toutes les valeurs de u intervenant dans l'intégrale

$$\int_{E_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}}.$$

On a

$$|f(s-u) g(u)| < A |u|^{k+l+\varepsilon},$$

où A est une constante indépendante de u et de s .

(1) Si $|u' - \tau| \leq \frac{d}{2}$, alors $\Re(s - u') > A_{fg} + d - \delta - \frac{d}{2} \geq H_f + \delta + d - \delta - \frac{d}{2} = H_f + \frac{d}{2}$.

(2) Voir l'énoncé du théorème page 382.

Quelle que soit la quantité positive ν , on constate, d'après la relation

$$\overline{\lim} \frac{\log r_n}{\log |\beta_n|} < \infty,$$

que la série

$$\sum \frac{1}{|\beta_n|^\nu}$$

converge, et à plus forte raison que les points β_n sont isolés.

En désignant alors par $E_{h,n}$ la partie de la courbe E_h comprise dans la bande $n - 1 < t < n$, et composée uniquement des points de la frontière de D_g , et par T_h l'ensemble des courbes E_h ne contenant de points d'aucun ensemble $E_{h,n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{E_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{E_{h,n}} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}} + \int_{T_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n + B; \end{aligned}$$

et on voit que les inégalités suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} |A_n| &< \frac{AL_n}{|n \pm 1|^{r+1-k-l-\varepsilon}} < \frac{AM}{|n \pm 1|^{3p}} \quad (|n| > 1) \quad (1), \\ |B| &< \frac{2\pi A}{2^{h+2}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{r_q}{\left(|\beta_q| - \frac{r_q}{2^{h+2}}\right)^{r+1-k-l-\varepsilon}} < C \sum_{q=1}^{\infty} \frac{r_q}{|\beta_q|^{3p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent l'intégrale $\int_{E_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}}$ peut être envisagée comme la limite d'une suite de fonctions continues de la variable s tendant uniformément vers cette limite lorsque s , restant dans Δ , vérifie toutes les inégalités

$$|s - \alpha_m - \beta_m| > r_m^{(h)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

La fonction $F(s)$ est donc continue dans cet ensemble parfait de points.

Soient $i_1, i_2, \dots, i_m, \dots$ les indices des points $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ de Σ_{fg} qui sont situés à l'intérieur de Δ . Soit Σ'_Δ l'ensemble de ces points.

(1) On prend le signe $-$ si $n > 0$ et le signe $+$ si $n < 0$.

On voit facilement que si $n \neq m$, alors

$$|\alpha_{i_m} - \alpha_{i_n}| \geq d,$$

car si le contraire avait lieu, comme $\gamma_{i_m} = \alpha_{i_m} + \beta_{i_m}$ se trouve dans Δ , le point

$$\alpha_{i_m} + \beta_{i_m}$$

se trouverait dans D , ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur D .

Soit Δ_1 un domaine, contenu dans Δ , de diamètre au plus égal à $\frac{d}{2}$ et dont la distance d'un point quelconque à un point quelconque de la frontière de Δ est au moins égale à d . Si α' et β' ne sont pas tels qu'on a à la fois

$$\alpha' = \alpha_{i_m}, \quad \beta' = \beta_{i_m} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

alors, α' étant un point de \mathbf{S}_f et β' un point de \mathbf{S}_g , on a

$$|s - \alpha' - \beta'| > d.$$

Soit Δ_2 l'ensemble des points de Δ_1 , vérifiant les inégalités suivantes :

$$|s - \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}| > r_{i_m}^{(h)} > \frac{r_{i_m}}{2^{h+1}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Comme plus haut, on peut voir que si u' est un point quelconque de E_h , on a pour tout point s de Δ_2

$$\mathcal{R}(s - u') > r + \frac{d}{2},$$

$$|s - u' - \alpha_{i_m}| \geq \frac{r_{i_m}}{2^{h+2}} < r_{i_m}^{h+2};$$

et

$$|s - u' - \alpha'| \geq \frac{d}{2},$$

pour tout autre point de α' de \mathbf{S}_f .

Soit maintenant D_f un ensemble composé de domaines et construit d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour la construction de D_g , en substituant à l'ensemble $\underline{\mathbf{S}}_g$ l'ensemble $\mathbf{S}_f - \Sigma'_\Delta$ à la quantité d , la quantité $\frac{d}{2}$, et aux nombres δ et H_g respectivement γ et H_f .

Traçons autour de chaque point α_{i_m} de Σ'_Δ un cercle de rayon $\frac{r_{i_m}}{2^{h+3}}$.

Soit $\bar{\omega}(h, m)$ ce cercle. Soit \bar{D}_f l'ensemble obtenu en excluant de D_f tous les points des cercles $\bar{\omega}(h, m)$. Soit R_h la frontière de \bar{D}_f .

Tout point s du demi-plan $\Re(s) > \gamma + \frac{d}{2}$, vérifiant toutes les inégalités

$$(c) \quad |s - \alpha_{i_m}| > \frac{r_{i_m}}{2^{h+2}} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

et, quel que soit le point α' de l'ensemble $S_f - \Sigma'_\Delta$, les inégalités

$$(d) \quad |s - \alpha'| \geq \frac{d}{2},$$

est, évidemment, à une distance supérieure à $\frac{d}{4}$ de tout point de R_h différent d'un point d'une circonférence $\bar{\omega}(h, m)$; il est à une distance supérieure à $\frac{r_{i_m}}{2^{h+2}}$ de tout point R_h faisant partie de la circonférence $\bar{\omega}(h, m)$. Il est, enfin, à une distance supérieure à $\frac{d}{4}$ de tout point de la droite $\sigma = \gamma + \frac{d}{4}$.

Si s_1 et s_2 sont deux points d'un domaine connexe R , dont la frontière est la courbe C , et si $f(s)$ est holomorphe dans le domaine R fermé, alors

$$\begin{aligned} (e) \quad & \frac{f(s_1) - f(s_2)}{s_1 - s_2} - f'(s_1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\int_C \frac{f(s)}{s - s_1} ds - \int_C \frac{f(s)}{s - s_2} ds \right) - \int_C \frac{f(s)}{(s - s_1)^2} ds \right] \\ &= \frac{s_2 - s_1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - s_1)^2 (s - s_2)}. \end{aligned}$$

Supposons que s_1 et s_2 sont situés dans un domaine K , contenu, lui-même, dans un des domaines de \bar{D}_f , et dont le diamètre est inférieur à $\frac{d}{2}$. Balayons chaque point de la frontière de K par un cercle de rayon $\frac{d}{8}$. Soit K_1 le domaine ainsi agrandi. Soit enfin K_2 le domaine commun à K_1 et \bar{D}_f et contenant les points s_1 et s_2 . Le diamètre de K_2

ne dépasse certainement pas $\frac{3}{4}d$. Par conséquent, d'après ce que nous avons vu plus haut, la frontière P de K_2 ne peut pas contenir des points de plus d'un cercle $\bar{\omega}(h, m)$, les autres points de P sont donc, soit des points de la frontière de K_1 , soit des points de la frontière de D_f .

Si, en plus, les points de s_1 et s_2 se trouvent dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > \frac{d}{2} + \gamma$ et vérifient les conditions (c) et (d), leurs distances aux points de la courbe P, qui ne sont pas points des circonférences $\bar{\omega}(h, m)$, sont non inférieures à $\frac{d}{8}$, et leurs distances aux points de celui des cercles $\bar{\omega}(h, m)$, dont les points font éventuellement partie de la frontière de K_2 sont non inférieures à $\frac{r_{i_m}}{2^{h+3}}$.

En employant la formule (e), on voit, d'après ce qui précède, que si s_1 et s_2 font partie d'un domaine D dont le diamètre ne dépasse pas $\frac{d}{2}$, et qui est tout entier dans un des domaines de \bar{D}_f ; si ces points font partie du demi-plan $\mathcal{R}(s) > \gamma + \frac{d}{2}$ et vérifient les conditions (c) et (d); si, enfin, il existe au moins un point de Σ'_Δ dont la distance à s_1 ne soit pas supérieure à $2d$ alors, l'inégalité suivante a lieu

$$\left| \frac{f(s_1) - f(s_2)}{s_1 - s_2} - f'(s_1) \right| < P_1 |s_1 - s_2| \left(L + \frac{1}{r_{i_m}^3} \right) |s_1|^{k+\varepsilon},$$

où ε est une quantité arbitrairement petite, positive, donnée d'avance; où $P_1 = P(\varepsilon, h, d)$ et $L = L(d)$ sont des constantes; et où enfin i_m est l'indice d'un certain point de Σ'_Δ se trouvant dans le cercle de rayon $2d$ autour du point s_1 (¹).

Comme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{i_m}}{\beta_{i_m}} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{i_m}^{\rho + \frac{\varepsilon}{3}} r_{i_m} = \infty,$$

(¹) Si l'ensemble Σ'_Δ ne possède pas de point dont la distance à s_1 ne soit pas supérieure à $2d$, l'inégalité que nous venons d'écrire subsiste (en y supprimant le terme $\frac{1}{r_{i_m}^3}$).

on voit que

$$\frac{1}{r_m^3} < C_\varepsilon |\alpha_{i_m}|^{3\rho+\varepsilon},$$

où C_ε est une constante.

On peut par conséquent écrire

$$\left| \frac{f(s_1) - f(s_2)}{s_1 - s_2} - f'(s_1) \right| < N |s_1 - s_2| |s_1|^{3\rho+k+2\varepsilon},$$

où $N = N(\varepsilon, h, d)$ est une constante,

On voit donc, d'après ce qui a été dit à la page 388, que si s_1 et s_2 font partie de l'ensemble Δ_2 , et si u est un point quelconque de E_h , alors

$$\left| \frac{f(s_1 - u) - f(s_2 - u)}{s_1 - s_2} - f'_{s-u}(s_1 - u) \right| < N_1 |s_1 - s_2| |u|^{3\rho+k+2\varepsilon},$$

où $N_1 = N_1(\varepsilon, h, d)$ est une constante.

Posons maintenant

$$F_1(s) = \frac{r!}{2\pi i} \int_{E_h} f'_{s-u}(s-u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}};$$

on a évidemment

$$\begin{aligned} & \frac{F(s_1) - F(s_2)}{s_1 - s_2} - F_1(s_1) \\ &= \frac{r!}{2\pi i} \int_{E_h} \frac{f(s_1 - u) - f(s_2 - u)}{s_1 - s_2} - f'_{s-u}(s_1 - u) g(u) \frac{du}{u^{r+1}}. \end{aligned}$$

En employant la méthode qui nous a servi pour la démonstration de la continuité de $F(s)$ dans l'ensemble $B^{(h)}$ formé dans Δ , on peut établir, en tenant compte de la dernière égalité, l'inégalité suivante, qui a lieu dès que s_1 et s_2 se trouvent dans Δ_2 :

$$\left| \frac{F(s_1) - F(s_2)}{s_1 - s_2} - F_1(s_1) \right| < \Lambda |s_1 - s_2|.$$

Il résulte de cette inégalité que l'expression

$$\frac{F(s_2) - F(s_1)}{s_2 - s_1}$$

tend uniformément, dans le sens précisé lors de la définition de

la monogénéité, vers $F'(s_1) = F_1(s_1)$, lorsque s_1 appartenant à un $B^{(h)}$, s_2 tend vers s_1 tout en restant dans le même $B^{(h)}$.

On démontre aussi facilement que $F'(s)$ est continue dans $B^{(h)}$.

Ainsi notre théorème est complètement démontré.

4. Nous allons maintenant construire un exemple d'un groupe de deux séries de Dirichlet : $f(s)$ et $g(s)$ jouissant de toutes les propriétés exigées par les hypothèses du théorème que nous venons de démontrer.

L'ensemble Σ_{fg} sera partout dense dans un domaine D_1 , ce domaine fera partie de l'ensemble des points singuliers de la fonction $F(s)$, mais cette dernière pourra être prolongée, par l'intermédiaire d'une fonction de M. Borel, dans un « domaine B » formé dans un domaine D contenant D_1 .

Soit E le carré dont les côtés sont respectivement donnés par les égalités (les égalités qui suivent donnent les droites sur lesquelles se trouvent ces côtés) :

$$\sigma = 1, \quad t = \frac{1}{4}, \quad \sigma = 1 + \frac{1}{2}, \quad t = -\frac{1}{4}.$$

Soit $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ une suite de points constituant un ensemble S partout dense dans E .

Soit $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ ($r_1 < \frac{1}{4}$) une suite de nombres positifs vérifiant les conditions (a) de la page 378.

Désignons par S_1 l'ensemble dénombrable de points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, définis de la manière suivante :

$$\mathcal{R}(\alpha_n) = \frac{\mathcal{R}(\gamma_n)}{2} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad |\alpha_n| r_n = n; \quad \mathcal{J}(\alpha_n) > 0.$$

Soit S_2 l'ensemble des points $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$, tels que $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$.

On a évidemment pour tout n :

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{R}(\alpha_n) = \mathcal{R}(\beta_n) \leq \frac{3}{4},$$

et si $n \neq k$, on a

$$|\alpha_n + \beta_k| = |\alpha_n + \gamma_k - \alpha_k| > \left| \frac{n}{r_n} - \frac{k}{r_k} \right| - 2 \geq \frac{|n-k|}{r_n} - 2.$$

On voit donc que l'ensemble S_3 composé des points $\alpha_n + \beta_k$ ($n \neq k$)

est isolé, il est situé dans la bande $1 < \mathcal{R}(s) < 1 + \frac{1}{4}$, et aucun de ses points ne se trouve dans le carré E_1 , dont les côtés sont parallèles aux axes, concentrique au carré E , et dont la longueur des côtés est égale à $\frac{2}{3}$.

Rappelons maintenant les deux propriétés suivantes de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann :

1° La fonction

$$E(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

est entière ;

2° Quel que soit le cercle autour du point $s = 1$, de rayon r , et quel que soit le nombre positif α , il existe une constante $L = L(\alpha, r)$ telle qu'à l'extérieur du cercle précédent et dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > \alpha$, on a

$$|\zeta(s)| < L |t|.$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \zeta(s + 1 - \alpha_n), \\ g_n(s) &= \zeta(s + 1 - \beta_n), \end{aligned}$$

on voit qu'il existe une suite de quantités positives L_n (tendant vers l'infini) et telles que, pour $\mathcal{R}(s) \geq 0$, et $|s - \alpha_n| > r_n^n$ d'une part, et $|s - \beta_n| > r_n^n$, d'autre part, on a respectivement :

$$\begin{aligned} |f_n(s)| &< L_n |t|, \\ |g_n(s)| &< L_n |t|. \end{aligned}$$

Soient maintenant d_n et l_n ($n = 1, 2, \dots$), deux suites telles que les séries

$$\sum |d_n| L_n, \quad \sum |l_n| L_n$$

convergent, et posons

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n f_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \zeta(s + 1 - \alpha_n), \\ g(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} l_n g_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \zeta(s + 1 - \beta_n). \end{aligned}$$

Chacune de ces fonctions est développable en série de Dirichlet

proprement dite :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\log n \cdot s},$$

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\log m \cdot s},$$

ces séries admettant la même abscisse de convergence absolue :

$$C_f = C_g = \frac{3}{4}.$$

On a évidemment :

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{S}_g = \mathbf{S}_2, \quad \Sigma_{fg} = \mathbf{S}.$$

Si l'on exclut du demi-plan $\mathcal{R}(s) \geq \delta = \gamma = 0$, les cercles de rayon r'_n autour des points α_n , on a dans ce même demi-plan :

$$|f(s)| < \left(\sum_{n=1}^{\infty} |d_n| L_n \right) |t| = N |t|.$$

De même, si l'on exclut de ce demi-plan les cercles de rayons r''_n autour des points β_n , on a dans ce même demi-plan :

$$|g(s)| < \left(\sum_{n=1}^{\infty} |l_n| L_n \right) |t| = N_1 |t|.$$

Les deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$ sont donc, à l'entourage B (relatif à la suite r_1, r_2, \dots), respectivement aux ensembles $\mathbf{S}'_f = \mathbf{S}_f$ et $\mathbf{S}'_g = \mathbf{S}_g$ près, d'ordre k et l ($k \leq 1, l \leq 1$) dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) \geq \delta = \gamma = 0$.

On voit, de plus, que

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log r'_n}{\log |\alpha_n|} = 1.$$

Si, enfin, on pose $D = E_1$, on voit que tous les points de D sont situés dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) \geq 1 > A_{fg} = \frac{3}{4}$; D contient des points du demi-plan $\mathcal{R}(s) > \mathcal{U}_f + \mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f + \mathcal{C}_g = 2 \cdot \frac{3}{4}$, et ce domaine ne contient pas d'autres points de \mathbf{S}_{fg} que ceux de $\Sigma_{fg} = \mathbf{S}$.

Les fonctions f et g vérifient donc toutes les hypothèses de notre théorème (1).

La fonction

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{(6)} e^{-\log n, s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n^{(6)}}{n^s},$$

où

$$b_n^{(6)} = \sum_{\log m < \log n} (\log n - \log m)^6 b_m = \sum_{m < n} \left(\log \frac{n}{m} \right)^6 b_m,$$

est monogène dans le « domaine B » formé dans $D = E_1$, avec les points de $\Sigma_{fg} = \mathbf{S}$ et avec la suite r_1, r_2, \dots

En reprenant les notations du n° 3, on voit que

$$F(s) = \frac{6!}{2\pi i} \int_{E_h} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^7},$$

où E_h est formé par la droite $\sigma = \frac{1}{8} \left(d = \frac{1}{4} \right)$ et les cercles $\omega(h, i)$ de rayons $\frac{r_i}{2^{h+2}}$ autour des points β_i .

Or, on a pour chaque entier i :

$$g(u) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \zeta(s+1-\beta_n) = \frac{l_i}{s-\beta_i} + E(s+1-\beta_i) + \sum_n' l_n \zeta(s+1-\beta_n),$$

où Σ' signifie que la somme est étendue à tous les indices $n \neq i$, et où

$$E(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Comme on a, pour $j = i$,

$$\begin{aligned} |\beta_j - \beta_i| &= |\gamma_j - \alpha_j + \alpha_i - \gamma_i| > \left| |\alpha_i| - |\alpha_j| \right| - 4 \\ &= \left| \frac{i}{r_i} - \frac{j}{r_j} \right| - 4 \geq \frac{1}{r_i} - 4 \geq \frac{1}{r_1} - 4, \end{aligned}$$

on voit que, lorsque h est suffisamment grand, il n'existe dans le cercle fermé $\omega(h, i)$ aucun point β_j tel que $j \neq i$.

(1) Que $\alpha_i + \beta_i \neq \alpha_j + \beta_j$ lorsque $i \neq j$, on le voit d'après le procédé même que nous avons employé pour former ces points.

On voit, d'autre part, que la fonction

$$\mathcal{F}(s) = \frac{6!}{2\pi i} \int_{\frac{1}{8}-i\infty}^{\frac{1}{8}+i\infty} f(s-u) g(u) \frac{du}{u^7}$$

est holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > \frac{7}{8}$;

On peut par conséquent écrire, en désignant par C_i la circonférence du cercle $\omega(h, i)$, l'égalité

$$F(s) = \mathcal{F}(s) + \frac{6!}{2\pi i} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} \frac{l_i f(s-u)}{s-\beta_i} \frac{du}{u^7},$$

où $\mathcal{F}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > \frac{7}{8}$. Cette dernière égalité peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$F(s) = \mathcal{F}(s) + 6! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l_i}{\beta_i^7} f(s-\beta_i).$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} f(s-\beta_i) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \zeta(s-\beta_i+1-\alpha_n) \\ &= d_i \zeta(s+1-\alpha_i-\beta_i) - \sum_r' d_n \zeta(s+1-\beta_i-\alpha_n) \\ &= \frac{d_i}{s-\alpha_i-\beta_i} + E(s+1-\alpha_i-\beta_i) + \sum_r' d_n \zeta(s+1-\beta_i-\alpha_n). \end{aligned}$$

Comme l'ensemble des points de la forme $\beta_i + \alpha_n$, où $n \neq i$, est isolé, on voit immédiatement que lorsque s est dans E_i , les opérations suivantes sont légitimes :

$$F(s) = \mathcal{F}(s) + 6! \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i l_i}{\beta_i^7} \frac{1}{s-\alpha_i-\beta_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l_i}{\beta_i^7} E(s+1-\alpha_i-\beta_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l_i}{\beta_i^7} \sum_r' d_n \zeta(s+1-\beta_i-\alpha_n) \right].$$

D'ailleurs, comme les points $\beta_i + \alpha_n$ ($n \neq i$) sont extérieurs à E_i , et

comme $E(s)$ est une fonction entière, on voit que

$$F(s) = \Phi(s) + 6! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i l_i}{\beta_i^l} \frac{1}{s - \alpha_i - \beta_i} = \Phi(s) + 6! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i l_i}{\beta_i^l} \frac{1}{s - \gamma_i},$$

où $\Phi(s)$ est une fonction holomorphe dans E_1 . D'après des résultats bien connus, la fonction

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i l_i}{\beta_i^l} \frac{1}{s - \gamma_i}$$

admet tous les points de $E = D_1$ comme singuliers, car la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{d_i l_i}{\beta_i^l} \right|$$

converge.