

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FLORIN VASILESCO

Recherches sur le flambement des poutres droites à section constante et à moment d'inertie variable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 64 (1947), p. 247-274

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__247_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES

SUR LE

FLAMBEMENT DES POUTRES DROITES

A

SECTION CONSTANTE ET A MOMENT D'INERTIE VARIABLE

PAR M. FLORIN VASILESCO.

Introduction.

L'emploi, dans les constructions, de poutres de grandes dimensions, constituées généralement par un assemblage de cornières (la section de la poutre est, de ce fait, constante) implique leur dotation d'un moment d'inertie variable. La résistance au flambement leur permet ainsi de supporter de grandes charges et de transmettre des efforts considérables.

La théorie du flambement des poutres droites à moment d'inertie constant est connue : la formule d'Euler

$$F_0 = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

détermine la charge critique F_0 .

Mais aucune étude d'ensemble n'existe, à ma connaissance, sur les poutres à moment d'inertie variable. Quelques lois particulières de variation de ce moment ont seulement été envisagées ⁽¹⁾.

Le but de ce travail est d'exposer les principes d'une méthode générale pour l'étude des problèmes posés par l'emploi des poutres droites à section constante et à moment d'inertie variant suivant une loi quelconque.

Quelques problèmes seulement, choisis parmi les plus courants, ont été considérés à titre d'exemples. Mais ils permettent d'apprécier l'efficacité de la

(1) Voir A. CAQUOT, *Leçons sur la résistance des matériaux* (Ministère de l'Air, p. 249-250).

méthode. La rigueur des raisonnements conduit à des résultats précis; les charges critiques ont des expressions analogues à celles d'Euler, mais avec des coefficients différents dont le calcul exact, inutile d'ailleurs dans la pratique, fait appel à la théorie des fonctions de variable complexe. Les mathématiques pourront trouver dans ce nouveau contact avec le concret, l'occasion et l'aliment de nouvelles recherches théoriques.

Étude préliminaire.

Nécessité et choix d'une variable intrinsèque. — Toute poutre chargée AB est en général fléchie et comprimée. Si M est un point de sa fibre moyenne, il peut être repéré de trois façons: 1° poutre à l'état de repos, par son abscisse $AM = s$; 2° poutre fléchie et comprimée, par son abscisse curviligne $AM = \sigma$; 3° fibre moyenne fléchie et comprimée en projection sur la corde AB, par l'abscisse $Am = x$. La première façon permet la définition du moment d'inertie variable avec M. La seconde indique la compression subie. La troisième introduit le fléchissement par l'équation $y = y(x)$ de la fibre déformée. Il est *essentiel*, à cause de la variabilité du moment d'inertie, d'*individualiser* chaque point de la fibre moyenne. Comment passer de l'une à l'autre de ces trois variables?

S'agit-il d'une poutre chargée de bout, ou soumise en outre à une charge unitaire constante en chacun de ses points et normale à sa fibre moyenne, ou chargée de bout et soumise à l'action d'un moment de flexion appliqué, variable avec l'abscisse x , la relation

$$s = \sigma + \int_0^\sigma \frac{F}{ES} \cos \theta \, d\sigma$$

est toujours valable. θ désigne l'inclinaison de la fibre déformée Γ sur la corde AB, F la charge de bout, E le module de Young et S la section droite de la poutre. Mais F, E, S sont des constantes et $\cos \theta \, d\sigma = dx$, d'où

$$(1) \quad s = \sigma + \frac{F}{ES} x.$$

Si L, Σ , l sont les longueurs de la fibre moyenne au repos, de Γ et de la corde AB,

$$(2) \quad L = \Sigma + \frac{F}{ES} l,$$

d'où la combinaison

$$(3) \quad 2s - L = 2\sigma - \Sigma + \frac{F}{ES} (2x - l).$$

L'introduction des variables numériques croissantes de -1 à $+1$ pour un parcours de A à B

$$(4) \quad u = \frac{2s}{L} - 1, \quad v = \frac{2\sigma}{\Sigma} - 1, \quad w = \frac{2x}{l} - 1$$

transforme (3) en

$$(5) \quad Lu = \Sigma v + \frac{F}{ES} l w.$$

Cette équation admet la solution $u = v = w$. Retranchée de l'égalité (2) après multiplication par u des deux membres, elle devient

$$(6) \quad 0 = \Sigma(u - v) + \frac{Fl}{ES}(u - w).$$

Mais la fibre moyenne subit en tout point M un effort normal à la section de la poutre de compression constant; son raccourcissement unitaire est donc invariable avec M et par suite

$$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{s}{L},$$

d'où (4) $u = v$ et (6) $u = w$ est unique.

Ainsi : chacune des trois quantités s, σ, x s'exprime en fonction de la variable sans dimension u , croissant de -1 à $+1$ pour le parcours de A à B.

Le passage recherché s'effectue par l'intermédiaire de u , prise pour variable intrinsèque.

Le moment d'inertie de la poutre au point M(u) peut alors s'écrire sous la forme

$$J(u) = I_0 I(u),$$

où $I(u)$ est une fonction numérique positive, jamais nulle, égale à 1 pour $u = 0$ et I_0 le moment d'inertie au milieu O de la poutre.

Sauf indication contraire, $I(u)$ est supposée fonction paire de u : $I(u)$ est symétrique par rapport à O.

CHAPITRE I.

POUTRE CHARGÉE DE BOUT.

La fibre moyenne déformée $\Gamma^{(1)}$ est rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires Ax, Ay situés dans son plan. Son équation est de la forme

$$y = V(u) = V\left(\frac{2x}{l} - 1\right) = y(x),$$

d'où

$$(7) \quad y''(x) = \frac{4}{l^2} V''(u).$$

(1) La courbe Γ est supposée plane selon l'usage établi.

La condition d'équilibre de la poutre s'écrit

$$(8) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{F|y|}{EJ}.$$

La courbure $\frac{1}{\rho}$ de Γ a pour expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm y''(x)}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais, dans la théorie de la résistance des matériaux, y'^2 est toujours supposé négligeable devant l'unité; cette hypothèse se traduira donc par une inégalité nécessaire à la validité du problème.

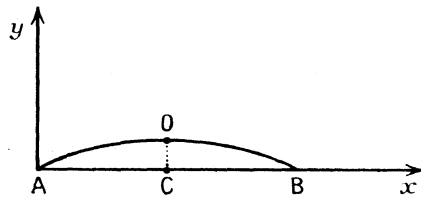


Fig. 1.

Alors (8) s'écrit

$$|y''(x)| = \frac{F|y|}{EJ},$$

$y''(x)$ et $y(x)$ s'annulent simultanément : les points d'inflexion de Γ sont donc ses intersections avec la corde AB et entre deux tels points consécutifs la concavité est tournée vers AB. Par suite, y et y'' sont de signes contraires, d'où l'équation de l'équilibre élastique

$$(9) \quad y''(x) = -\frac{Fy(x)}{EJ}.$$

Déformations paires de la fibre moyenne : courbes Γ symétriques par rapport à OC (C milieu de AB).

La recherche de $y(x)$ est ramenée à celle de la fonction paire $V''(u)$ désignée par $\varphi(u)$. D'après (7),

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{l} \int_0^u \varphi(u) du,$$

car $y'(x)$ est impaire, et

$$(11) \quad y(x) = \int_{-1}^u du \int_0^u \varphi(u) du,$$

car $y(x)$ est paire; de plus, $y = 0$ pour $u = \pm 1$. L'équation (9) devient

$$(12) \quad I(u)\varphi(u) + \frac{Fl^2}{4EI_0} \int_{-1}^u du \int_0^u \varphi(u) du = 0.$$

Elle détermine $\varphi(u)$.

Une double dérivation donne

$$(13) \quad \frac{d^2[I(u)\varphi(u)]}{du^2} + \frac{Fl^2}{4EI_0}\varphi(u) = 0.$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet des solutions paires et impaires — $I(u)$ est paire, donc $\varphi(u)$, $I(u)\varphi(u)$ et $\frac{d^2[I(u)\varphi(u)]}{du^2}$ sont simultanément paires ou impaires — explicitées plus loin. Son intégrale générale est la somme d'une solution paire particulière $\Phi(u)$, multipliée par une constante arbitraire C et d'une autre impaire $\psi(u)$, multipliée par une constante C' , car la parité différente de ces solutions en fait un système fondamental.

La fonction cherchée $\varphi(u)$ est donc de la forme $C\Phi(u)$ et doit vérifier l'équation (12), c'est-à-dire, compte tenu de (13), l'équation

$$I(u)\Phi(u) - \int_{-1}^u du \int_0^u \frac{d^2[I(u)\Phi(u)]}{du^2} du = 0$$

ou

$$I(u)\Phi(u) - \int_{-1}^u du \left[\frac{d[I(u)\Phi(u)]}{du} - \left\{ \frac{d[I(u)\Phi(u)]}{du} \right\}_{u=0} \right] = 0.$$

Mais l'accolade est nulle, car $I(u)\Phi(u)$ est paire, d'où

$$I(u)\Phi(u) - I(u)\Phi(u) + I(-1)\Phi(-1) = 0;$$

et comme $I(-1) \neq 0$,

$$(14) \quad \Phi(1) = 0.$$

Cette équation exprime la nullité de la courbure de Γ en A et B; pour la poutre considérée $I(u)$ est connue et $\Phi(u)$ dépend (13) de

$$(15) \quad \lambda = \frac{Fl^2}{4EI_0}.$$

L'existence théorique de l'équilibre élastique (flambement) avec une fibre moyenne déformée Γ , paire et non rectiligne [$\varphi(u) \neq 0$] a lieu pour les seules valeurs de λ , soient λ_0 , racines de l'équation (14). La relation

$$(16) \quad \frac{Fl^2}{4EI_0} = \lambda_0$$

détermine l si la charge F est connue ou, inversement, précise la charge nécessaire pour un flambement pair de corde $AB = l$ donnée. Mais F et l varient en sens inverse; le minimum F_0 de F correspond au maximum L de l et, de plus, F est proportionnel à λ_0 , d'où :

La charge la plus grande incompatible avec un flambement pair de la poutre est

$$(17) \quad F_0 = \frac{4\lambda_0 E I_0}{L^2},$$

où λ_0 est la plus petite racine positive (non nulle) de l'équation (14), explicitée plus loin (23).

C'est la charge critique paire.

La formule (17) ressemble à celle, classique, d'Euler et en diffère par le facteur $4\lambda_0$ à la place de π^2 .

Remarque. — Pour toute charge F inférieure à F_0 , la fonction $\varphi(u)$ est identiquement nulle et la fibre moyenne subit une compression simple.

Recherche de la fonction $\Phi(u)$. — La substitution

$$(18) \quad I(u) \Phi(u) = X(u)$$

permet d'écrire l'équation (13), multipliée par $I(u)$, sous la forme

$$(19) \quad I(u) X''(u) + \lambda X(u) = 0.$$

Le paramètre λ est, comme $\Phi(u)$, variable avec la charge F , d'où l'idée de satisfaire à (19) au moyen d'une série de fonctions paires

$$(20) \quad X(u) = X_0(u) + \lambda X_1(u) + \lambda^2 X_2(u) + \dots,$$

sous réserve de vérifier *a posteriori* sa convergence uniforme.

L'annulation des coefficients des diverses puissances de λ livre les équations

$$\begin{aligned} I(u) X_0''(u) &= 0, \\ I(u) X_1''(u) + X_0(u) &= 0, \\ I(u) X_2''(u) + X_1(u) &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et il suffit d'en retenir les solutions particulières

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} X_0(u) &= 1, \\ X_1(u) &= - \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)}, \\ X_2(u) &= \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Elles sont alternativement positives et négatives et s'évanouissent pour $u = 0$, sauf la première. Le nombre pair des quadratures superposées assurent leur parité à partir de celle de $I(u)$.

Si k désigne le maximum de $\frac{1}{I(u)}$ elles satisfont, en outre, aux inégalités

$$\begin{aligned} |X_1(u)| &< k \frac{u^2}{2!}, \\ |X_2(u)| &< k^2 \frac{u^4}{4!}, \\ &\dots\dots\dots, \\ |X_n(u)| &< k^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

obtenues par la considération des seules valeurs positives de u .

Ainsi la série (20) est majorée par la série entière de

$$(22) \quad 1 + \frac{\lambda k u^2}{2!} + \frac{\lambda^2 k^2 u^4}{4!} + \dots = \text{ch} \sqrt{\lambda k} u.$$

Elle est donc absolument et uniformément convergente et représente une fonction entière de λ pour toute valeur de u .

L'équation (14) s'écrit $X(1) = 0$ et λ_0 est le zéro réel (positif) le plus petit de la série entière en λ .

$$(23) \quad 1 - \lambda \int_0^1 du \int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda^2 \int_0^1 du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots$$

Sa recherche, rigoureuse ou approximative, ressortit à la Théorie des fonctions analytiques et s'appuiera, en pratique, sur la rapidité de convergence de la série (23).

La fonction $\Phi(u)$ a pour expression

$$(24) \quad \Phi(u) = \frac{1}{I(u)} \left[1 - \lambda_0 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda_0^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots \right].$$

Elle dépend uniquement de $I(u)$, c'est-à-dire de la loi de variation du moment d'inertie de la poutre par rapport à son moment médian.

La fibre moyenne déformée Γ , et son coefficient angulaire dépendent, en plus, d'un facteur C , car

$$(11') \quad y(x) = C \int_{-1}^u du \int_0^u \Phi(u) du,$$

$$(10') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2C}{l} \int_0^u \Phi(u) du.$$

Pour le déterminer, il suffit d'égaliser la longueur Σ de Γ , donnée par la formule (2), où l est connu (16), à son expression analytique tributaire de $y'^2(x)$, donc de C^2 . Ainsi, à toute charge F , supérieure à F_0 , correspond une valeur unique de l et une seule déformation paire de la fibre moyenne, (à une symétrie près par rapport à la corde AB).

C dépend de F, L, S, E et I_0 (par l'intermédiaire de l). Mais, chose remarquable, toutes les déformations, *considérées comme fonctions de la variable intrinsèque u* , sont proportionnelles entre elles, indépendamment de u . L'étude de leur allure, diverse selon $I(u)$, se ramène à celle de $\Phi(u)$; son intérêt est surtout théorique.

CAS PARTICULIER. — *Moment d'inertie constant.* — Alors $I(u) = 1$ et la série (23) exprime $\cos \sqrt{\lambda}$. Par suite $\lambda_0 = \frac{\pi^2}{4}$; d'où (17)

$$F_0 = \frac{\pi^2 E I_0}{L^2}.$$

C'est la formule d'Euler.

La fonction $\Phi(u)$ devient ici

$$\Phi(u) = \cos \sqrt{\lambda_0} u = \cos \frac{\pi u}{2};$$

les seules déformations possibles de la fibre moyenne relatives à des charges F voisines de et supérieures à F_0 , sont donc des arcs pairs situés d'un même côté de la corde AB. La courbe Γ a pour équation

$$y = C \int_{-1}^u du \int_0^u \cos \frac{\pi u}{2} du = -\frac{4C}{\pi^2} \cos \frac{\pi u}{2} = -\frac{4C}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2x}{l} - 1 \right).$$

C'est une demi-sinusoïde. Il n'y a pas lieu de s'arrêter sur le calcul de C.

Déformations impaires de la fibre moyenne : courbes Γ' symétriques par rapport à C (milieu de AB). — La fonction

$$V''(u) = \varphi(u)$$

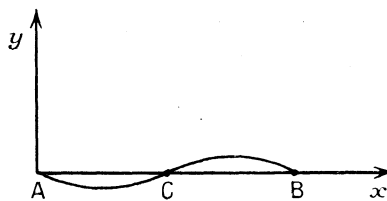


Fig. 2.

est ici impaire [$\varphi(0) = 0$] comme $y(x)$ et il résulte de (7),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{l} \left[\int_0^u \varphi(u) du + C \right]$$

et

$$y = \int_0^u du \int_0^u \varphi(u) du + C u$$

où C a la valeur

$$C = \int_0^{-1} du \int_0'' \varphi(u) du,$$

car $y = 0$ en A et B. L'équation (9) s'écrit

$$(25) \quad I(u) \varphi(u) + \frac{Fl^2}{4EI_0} \left[\int_0'' du \int_0'' \varphi(u) du + Cu \right] = 0.$$

Une double dérivation ramène encore à l'équation différentielle (13), mais $\varphi(u)$, impaire, est de la forme $C'\psi(u)$. La vérification de (25) impose la condition

$$(14') \quad \Psi(1) = 0$$

et l'argumentation développée pour le cas pair permet la conclusion :

La charge la plus grande incompatible avec un flambement impair de la poutre est

$$(26) \quad F_1 = \frac{4\lambda_1 EI_0}{L^2},$$

où λ_1 est la plus petite racine positive (non nulle) de l'équation (14'), explicitée par l'expression (27). Elle peut être appelée charge critique impaire.

Le calcul de $\psi(u)$ s'effectue à partir de (18) et (20), mais les fonctions $X_i(u)$ sont impaires

$$\begin{aligned} X_0(u) &= u, \\ X_1(u) &= - \int_0'' du \int_0'' \frac{u}{I(u)} du, \\ X_2(u) &= \int_0'' du \int_0'' \frac{du}{I(u)} \int_0'' du \int_0'' \frac{u}{I(u)} du, \\ &\dots \end{aligned}$$

La nouvelle série (20) est toujours majorée par (22), car $\frac{u}{I(u)} < k$ et par suite λ_1 est le zéro (positif) le plus petit de la série entière en λ .

$$(27) \quad 1 - \lambda \int_0'' du \int_0'' \frac{u}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0'' du \int_0'' \frac{du}{I(u)} \int_0'' du \int_0'' \frac{u}{I(u)} du - \dots$$

La fonction $\psi(u)$ est

$$(28) \quad \Psi(u) = \frac{1}{I(u)} \left[u - \lambda_1 \int_0'' du \int_0'' \frac{u}{I(u)} du + \lambda_1^2 \int_0'' du \int_0'' \frac{du}{I(u)} \int_0'' du \int_0'' \frac{u}{I(u)} du - \dots \right]$$

Elle dépend de $I(u)$ seulement.

Les considérations développées au sujet du facteur C dans le cas pair s'appliquent également au facteur C'.

Utilité de la notion de charge critique impaire. — Si $I(u) = 1$, la série (27) représente $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}$, d'où $\lambda_1 = \pi^2$ et

$$F_1 = \frac{4\pi^2 E I_0}{L^2} = \frac{\pi^2 E I_0}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

Pour une poutre à moment d'inertie constant, la charge critique impaire est donc le quadruple de la charge critique paire (Euler); c'est aussi la charge critique classique (voir plus bas) d'une moitié de la poutre, résultat évident a priori, car toute déformation impaire de la poutre se traduit par une déformation d'une de ses moitiés.

Il n'en est plus ainsi dans le cas général où $I(u)$ est quelconque : la poutre et l'une de ses moitiés n'ont plus la même loi de distribution pour leurs moments d'inertie et, d'ailleurs, le moment de la seconde n'est plus symétrique. La conclusion reste cependant exacte. En effet, soit AC une poutre droite à moment

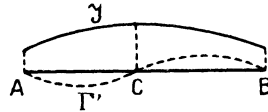


Fig. 3.

d'inertie variable suivant une loi arbitraire. Une symétrie par rapport à la base C engendre une nouvelle poutre AB, de longueur $2AC$, à moment d'inertie symétrique (1).

Si la déformation Γ' de la fibre moyenne de AB sous l'action d'une charge de bout F est impaire, l'ordonnée de C est nulle, la courbure de Γ' en C est nulle et il en est de même du moment de flexion en C. L'effort F, seul, s'exerce donc sur la poutre AC déformée suivant l'arc $A\Gamma'C$. La déformation Γ'' symétrique de Γ' par rapport à AB est également possible, comme on l'a vu, et ce sont les seules.

Inversement, si Γ' est la déformation de AC sous l'action de la charge F, la déformation symétrique Γ'' est possible et l'adjonction au bout de AC de la poutre CB déformée suivant Γ'' engendre la poutre AB à déformation impaire. D'où le

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *La charge critique d'une poutre droite à section constante et à moment d'inertie variable suivant une loi quelconque, est la charge*

(1) La théorie précédente implique l'existence et la continuité de $I''(u)$ en tout point de la poutre. En fait, il suffit de supposer uniquement la continuité de $I(u)$. (Voir note p. 266). Le moment d'inertie de la poutre AB est continu en C.

critique impaire de la poutre doublée symétriquement par rapport à l'une de ses bases.

L'expression *charge critique* doit être entendue ici dans le sens *classique*, celui de la pratique courante : la plus grande charge de bout incompatible avec une déformation élastique non rectiligne de la poutre (il ne s'agit plus ici des seules déformations paires ou impaires) ou encore avec un flambement de celle-ci. Pour une poutre à moment d'inertie constant elle correspond aux déformations paires; les impaires donnent une charge critique (impaire) plus grande. Dans certains cas de variation régulière de la fonction paire $I(u)$, l'infériorité numérique de la charge critique paire relativement à l'impairé paraît intuitive; la démonstration mathématique de ce fait implique l'étude comparative des deux zéros λ_0 et λ_1 des fonctions entières (23) et (27). Mais l'examen de cette question d'analyse pure sort du cadre de ce travail.

CHAPITRE II.

POUTRE CHARGÉE DE BOUT, SOUMISE A UNE CHARGE UNITAIRE CONSTANTE
EN CHACUN DE SES POINTS ET NORMALE A SA FIBRE MOYENNE.

Soient F la charge de bout et $\frac{P}{L}$ la charge unitaire. Des réactions d'appui égales à $\frac{P}{2}$ doivent être introduites aux points A et B de la poutre déformée, en équilibre élastique. *Il n'est plus question de déterminer une charge critique, mais*

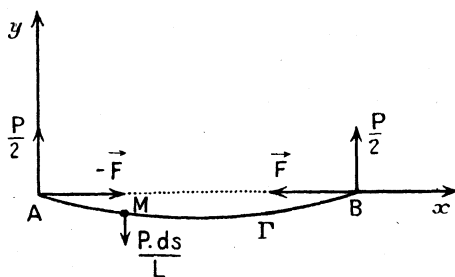


Fig. 4.

le moment de flexion maximum pour la pièce, car la charge unitaire provoque déjà un flambement.

Il est nécessaire de calculer tout d'abord la somme géométrique \vec{R} et le moment résultant \vec{G} , en un point M de la fibre moyenne déformée suivant la courbe Γ , des contraintes exercées sur la section transversale de la partie MB. Ces vecteurs sont respectivement égaux à la somme géométrique et au moment résultant en M des forces appliquées sur la partie AM.

Tout d'abord

$$\vec{R} = -\vec{F} + \frac{\vec{P}}{2},$$

d'où l'effort normal en M à la section transversale de la poutre

$$\vec{R}_N = \vec{F}.$$

Les quantités infiniment petites par rapport à F et $\frac{P}{2}$ ont été comme d'habitude négligées, car l'arc AB est supposé très tendu.

L'égalité (1) et ses conséquences est donc valable.

L'effort tranchant a pour expression

$$R_T = \frac{P}{2} - P \frac{s}{L} = -\frac{P}{2} \left(\frac{2s}{L} - 1 \right) = -\frac{P}{2} u,$$

aux mêmes approximations près. C'est une fonction impaire de u .

Le vecteur \vec{G} mesuré sur l'axe Az normal au plan xAy (trièdre Axyz direct) a pour valeur algébrique

$$G = -x \frac{P}{2} + \frac{x}{2} P \frac{\sigma}{\Sigma} + y F,$$

car $y < 0$, d'où (4)

$$G = -\frac{P}{2} \frac{l}{4} (1 - u^2) + y F < 0,$$

et la condition d'équilibre élastique

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{G}{E J}.$$

L'équation de la déformation Γ est donc

$$(30) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4EJ} \frac{l}{2} (1 - u^2) - y \frac{F}{EJ},$$

puisque

$$\frac{dx^2}{du^2} > 0.$$

La courbe Γ est *paire*; les formules (10) et (11) s'appliquent et l'équation satisfaite par $\varphi(u)$ devient

$$(31) \quad I(u) \varphi(u) = \frac{P l^3}{32E I_0} (1 - u^2) - \frac{F l^2}{4E I_0} \int_{-1}^u du \int_0^u \varphi(u) du,$$

ou encore

$$(32) \quad \frac{d^2 [I(u) \varphi(u)]}{du^2} = -\frac{P l^3}{16E I_0} - \frac{F l^2}{4E I_0} \varphi(u).$$

Inversement, une solution $\Phi(u)$ paire de cette dernière équation sera la solution recherchée si elle vérifie l'équation (31), écrite en vertu de (32)

$$I(u)\Phi(u) - \frac{Pl^3}{32EI_0}(1-u^2) = \frac{Pl^3}{16EI_0} \frac{u^2-1}{2} + \int_{-1}^u \frac{d[I(u)\Phi(u)]}{du} du - \left(\frac{d[I(u)\Phi(u)]}{du} \right)_{u=0} (u+1).$$

Comme le dernier terme est nul, en tant que valeur pour $u=0$ d'une fonction impaire, il reste

$$I(u)\Phi(u) = I(u)\Phi(u) - I(-1)\Phi(-1)$$

ou, puisque $I(-1) \neq 0$ et $\Phi(-1) = \Phi(+1)$,

$$\Phi(1) = 0.$$

En résumé, la solution du problème est la fonction paire $\Phi(u)$, vérifiant l'équation

$$(33) \quad \frac{d^2[I(u)\Phi(u)]}{du^2} + \frac{Fl^2}{4EI_0}\Phi(u) + \frac{Pl^3}{16EI_0} = 0$$

et telle que

$$\Phi(1) = 0.$$

Cette dernière égalité exprime ici encore la nullité de la courbe de Γ en A et B.

Recherche de la fonction $\Phi(u)$. — Elle s'effectue par la méthode indiquée au Chapitre I. Si

$$X(u) = I(u)\Phi(u),$$

$X(u)$ est une fonction paire, nulle pour $u = \pm 1$, intégrale de l'équation différentielle

$$I(u) \frac{d^2 X(u)}{du^2} + \frac{Fl^2}{4EI_0} X(u) + \frac{Pl^3}{16EI_0} I(u) = 0$$

ou de

$$(34) \quad I(u) X''(u) + \lambda X(u) + h I(u) = 0$$

avec

$$\lambda = \frac{Fl^2}{4EI_0}, \quad h = \frac{Pl^3}{16EI_0}.$$

L'intégrale générale de (34) est de la forme

$$(35) \quad X(u) = C_1 X_1(u) + C_2 X_2(u) + f(u),$$

où $X_1(u)$ et $X_2(u)$ sont respectivement une solution *paire* et une solution *impaire* de l'équation

$$I(u) X''(u) + \lambda X(u) = 0$$

et $f(u)$ une solution *paire* particulière de l'équation (34). Mais puisque $X(u)$ est *paire*, il faut prendre

$$C_2 = 0.$$

D'autre part, la fonction $X_1(u)$ déjà calculée au Chapitre I, a pour expression

$$(36) \quad X_1(u) = 1 - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots$$

Il suffit donc de chercher celle de $f(u)$ et de lui donner la forme

$$f(u) = f_0(u) + \lambda f_1(u) + \lambda^2 f_2(u) + \dots,$$

où les fonctions du second membre sont *paires*. Substituée dans l'équation (34), cette série conduit aux équations

$$\begin{aligned} I(u) f_0''(u) + h I(u) &= 0, \\ I(u) f_1''(u) + f_0(u) &= 0, \\ I(u) f_2''(u) + f_1(u) &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} f_0(u) &= -\frac{h}{2} u^2, \\ f_1(u) &= \frac{h}{2} \int_0^u du \int_0^u \frac{u^2}{I(u)} du, \\ f_2(u) &= -\frac{h}{2} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u^2}{I(u)} du. \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

La série de $f(u)$ est encore uniformément convergente, car si k désigne toujours le maximum de $\frac{1}{I(u)}$, les inégalités suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} |f_0(u)| &< \frac{h}{2} u^2, \\ |f_1(u)| &< \frac{h}{2} k \frac{u^4}{4!}, \\ |f_2(u)| &< \frac{h}{2} k^2 \frac{u^6}{6!}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et par suite

$$|f(u)| < h \left(\frac{u^2}{2!} + \lambda k \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 k^2 \frac{u^6}{6!} + \dots \right).$$

La série du second membre est *entière*.

Ainsi

$$(37) \quad f(u) = -\frac{h}{2} \left[u^2 - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{u^2}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u^2}{I(u)} du - \dots \right].$$

Sous une forme abrégée, $f(u)$ s'écrit

$$f u = -\frac{h}{2} g(u),$$

où $g(u)$ désigne la série entre crochets.

Il en résulte

$$X(u) = C_1 X_1(u) - \frac{h}{2} g(u).$$

La constante C_1 se détermine par la condition $X(1) = 0$, ou

$$C_1 X_1(1) - \frac{h}{2} g(1) = 0$$

et par conséquent

$$X(u) = \frac{h}{2} \frac{g(1) X_1(u) - g(u) X_1(1)}{X_1(1)}.$$

Finalement

$$(38) \quad \Phi(u) = \frac{P l^3}{32 E J} \frac{g(1) X_1(u) - g(u) X_1(1)}{X_1(1)}.$$

Telle est la solution recherchée.

Le moment de flexion $G(u)$ a donc pour expression

$$G(u) = -\frac{E J}{\rho} = -E J \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4}{l^2} E J \Phi(u)$$

ou

$$(39) \quad G(u) = -\frac{P l}{8} \frac{g_1(1) X_1(u) - g(u) X_1(1)}{X_1(1)}$$

et le problème consiste à rechercher le maximum de sa valeur absolue, car $G(u) < 0$, ou encore de l'expression $I(u) \Phi(u) = X(u)$. Ce maximum est donné par certaines valeurs de u qui annulent la dérivée

$$(40) \quad g(1) X_1'(u) - g'(u) X_1(1).$$

Parmi elles se trouve la valeur $u = 0$ car les fonctions $X_1'(u)$ et $g'(u)$ sont impaires et s'évanouissent pour cette valeur de u .

Une remarque doit être faite ici. D'après l'expression de y (et pour $F \neq 0$),

$$(41) \quad y = \frac{P l}{8 F} \left[(1 - u^2) - \frac{g(1) X_1(u) - g(u) X_1(1)}{X_1(1)} \right]$$

l'inégalité suivante a nécessairement lieu

$$\frac{g(1) X_1(u) - g(u) X_1(1)}{X_1(1)} > 1 - u^2 > 0,$$

car $y \leq 0$ et $G(u) < 0$. Sa vérification analytique serait intéressante à faire.

En outre, une distinction semblerait s'imposer pour la première fois entre les cas $F = 0$ et $F \neq 0$ à cause de la présence de F au dénominateur de y . Elle n'est qu'apparente car, physiquement, il y a continuité entre ces cas. D'ailleurs, analytiquement, la fonction y tend, pour F décroissant à zéro, vers la valeur de y pour $F = 0$. Cela ressort de l'intégrale double donnant y en fonction de $\Phi(u)$. En outre, une vérification directe à partir de la formule (41) est immédiate.

Remarque importante. — Dans ce Chapitre comme dans le premier, la valeur de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ a été supposée négligeable devant l'unité. Mais dans le Chapitre I, cette condition s'est trouvée vérifiée par la détermination même de la constante C , inexistante dans le cas actuel. Une inégalité doit donc être écrite ici pour exprimer la petitesse de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; elle fournit une *relation nécessaire entre les différentes données du problème*, ainsi obtenue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{l} \frac{dy}{du} = -\frac{P}{4F} \left[2u + \frac{g(1) X_1(u) - g(u) X_1(1)}{X_1(1)} \right]$$

et puisque $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ est maximum pour $u = 1$, il faut écrire, pour avoir

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 < \eta,$$

où η est choisi à volonté petit

$$(42) \quad \left[2 + \frac{g(1) X_1'(1) - g'(1) X_1(1)}{X_1(1)} \right]^2 < \left(\frac{4F}{P}\right)^2 \eta.$$

Telle est l'inégalité demandée.

Une nouvelle inégalité résultera de la condition de sécurité imposée par les techniciens aux fins d'interdire au moment de flexion maximum le dépassement d'une certaine limite compatible avec la résistance du matériau utilisé.

Enfin, et malgré le manque d'intérêt pratique, il est utile du point de vue théorique de savoir comment la corde l s'exprime au moyen des données F, P, L, E, I , afin que la résolution du problème soit complète. La longueur Σ de la fibre moyenne déformée est

$$\Sigma = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Il serait incorrect de négliger ici $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité, comme devant l'expression de $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} = \pm \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \dots \right],$$

où il s'agissait, en fait, de négliger $\frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant $\frac{d^2y}{dx^2}$, quantité très petite. Mais il n'y a pas grand inconvénient à écrire

$$\Sigma = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] dx.$$

La formule (2) prend alors la forme

$$L = \frac{Fl}{SE} + l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

ou, par passage à la variable u et compte tenu de la parité de $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$

$$L = \frac{F}{SE} l + l + \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{dy}{du}\right)^2 du.$$

Telle est la relation entre l et les données du problème.

Application. Moment d'inertie constant $\mathcal{J} = I_0$. — En ce cas

$$I(u) = 1, \quad X_1(u) = \cos \sqrt{\lambda} u, \\ g(u) = 2 \left(\frac{u^2}{2!} - \lambda \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 \frac{u^6}{6!} - \dots \right) = \frac{2}{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda} u),$$

et

$$\Phi(u) = \frac{Pl^3}{32E I_0 \lambda} \frac{(1 - \cos \sqrt{\lambda} u) \cos \sqrt{\lambda} u - \cos \sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda} u)}{\cos \sqrt{\lambda}}, \\ = \frac{Pl^3}{16E I_0 \lambda} \frac{\cos \sqrt{\lambda} u - \cos \sqrt{\lambda}}{\cos \sqrt{\lambda}},$$

par suite

$$G(u) = \frac{Pl}{4\lambda} \frac{\cos \sqrt{\lambda} - \cos \sqrt{\lambda} u}{\cos \sqrt{\lambda}} < 0.$$

Le maximum de $-G(u)$ a lieu pour

$$\sin \sqrt{\lambda} u = 0$$

soit pour $u = 0$; sa valeur est

$$-G_{\max} = \frac{PE I_0}{Fl} \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{Fl^2}{4E I_0}}}{\cos \sqrt{\frac{Fl^2}{4E I_0}}}$$

et il est possible, sans commettre de faute appréciable, de remplacer dans cette expression l par L .

Conclusion. — Dans ce Chapitre a été étudié, en fait, le flambement d'une poutre à moment d'inertie symétrique, comprimée, à laquelle a été appliqué un moment de flexion variant paraboliquement en fonction de l'abscisse x .

Tel est le cas d'une poutre comprimée, placée horizontalement et soumise, en chacun de ses points, à une charge unitaire constante, en plus de son propre poids.

Cependant, les ingénieurs ont l'habitude de se donner non plus les charges appliquées à la poutre, mais les moments de flexion de ces charges. C'est pourquoi, un problème général envisagé sous cet aspect sera étudié au chapitre suivant.

CHAPITRE III.

POUTRE DROITE A MOMENT D'INERTIE VARIABLE, SOUMISE A L'ACTION SIMULTANÉE D'UNE CHARGE DE BOUT ET D'UN MOMENT DE FLEXION VARIABLE AVEC L'ABSCISSE x .

Contrairement à l'hypothèse faite aux deux chapitres précédents, le moment d'inertie de la poutre AB , considérée ici, pourra varier selon une loi quelconque *non nécessairement symétrique*.

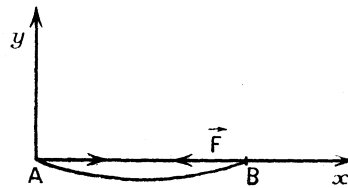


Fig. 5.

Un moment de flexion $G(x)$ variable est également appliqué à cette poutre. Pour fixer les idées, il sera supposé *nul en A et négatif*, par rapport à un système d'axes $Axyz$ direct, figurés par les plans Axy et Axz .

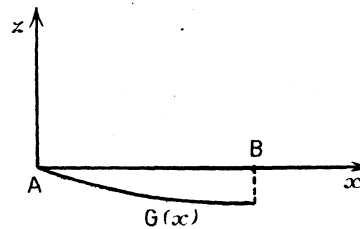


Fig. 6.

Ce moment de flexion est dû à des charges variables appliquées à la poutre et dirigées, en chacun de ses points, suivant la direction négative de Ay : elles

n'ont donc pas de composante suivant l'axe Ax . Seule la charge de bout F est appliquée suivant Ax .

La fibre moyenne de la poutre se déformera donc suivant une courbe Γ d'ordonnée négative; sa concavité sera du côté des y positifs.

L'équation de l'équilibre élastique de la fibre moyenne est alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{G(x) + y F}{E J}$$

la dérivée $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est positive et nulle en A , car $G(0) = 0$ et $y = 0$ en ce point. La courbure de la poutre est donc nulle en A ; elle ne l'est pas en B .

L'étude de ce problème s'appuiera sur l'*artifice mathématique* suivant.

Soient AC , m' et Γ' les symétriques par rapport à A du segment AB , d'un quelconque de ces points m et de la courbe Γ . Les fonctions $J(m')$ et $G(m')$ seront définies par les égalités

$$J(m') = J(m), \quad G(m') = -G(m).$$

La courbe totale $\Gamma' + \Gamma$ est continue, a une tangente continue et une courbure continue, cette dernière étant nulle en A .

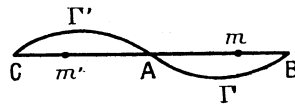


Fig. 7.

Tout se passe donc du point de vue mathématique comme s'il s'agissait d'une poutre CB , de longueur $L_1 = 2L$, à moment d'inertie J *symétrique*, à laquelle serait appliqué un moment de flexion *impair*, la déformation de la fibre moyenne étant *impaire*.

Pour cette poutre les relations

$$s_1 = \sigma_1 + \frac{F}{ES} \int_0^{\sigma_1} \cos \theta \, d\sigma_1$$

et

$$\frac{2s_1}{L_1} - 1 = \frac{2\sigma_1}{\Sigma_1} - 1 = \frac{2x_1}{l_1} - 1 = u \quad (-1 \leq u \leq 1),$$

où s_1 , σ_1 , x_1 , L_1 , Σ_1 , l_1 ont des significations analogues à celles du début de ce travail, sont encore valables. Ainsi, le moment d'inertie de la poutre pourra se mettre sous la forme

$$J = I_0 I(u),$$

I_0 étant sa valeur en A et $I(u)$ une fonction paire. De plus, le moment de flexion appliqué sera désigné, pour des raisons d'homogénéité, par

$$G(x) = F G_1(u),$$

où $G_1(u)$ est une fonction impaire. L'ordonnée y de la fibre moyenne déformée $\Gamma' + \Gamma$ sera donc une fonction impaire de u , positive sur CA et nulle en C, A, B. Une fonction impaire $\varphi(u)$ négative sur CA pourra encore être définie par la relation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4}{l_1^2} \varphi(u)$$

d'où il résultera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{l_1} \left[\int_0^u \varphi(u) du + C \right] \quad (\text{paire})$$

et

$$y = \int_0^u du \int_0^u \varphi(u) du + Cu \quad (\text{impaire})$$

avec

$$\int_0^{-1} du \int_0^u \varphi(u) du - C = 0.$$

L'équation de l'équilibre élastique s'écrit alors sous la forme

$$I(u) \varphi(u) + \frac{FL_1^2}{4EI_0} \left[G_1(u) + \int_0^u du \int_0^u \varphi(u) du + Cu \right] = 0.$$

Pour trouver la fonction $\varphi(u)$ il faudrait dériver deux fois cette équation mais il n'est pas certain, *a priori*, que la dérivée seconde de cette fonction soit continue pour $u=0$ (en A), à moins d'introduire l'hypothèse $G_1'(0) = 0$. Il est possible de s'en passer et de procéder directement en écrivant l'équation sous la forme (1)

$$I(u) y''(u) + \frac{FL_1^2}{4EI_0} y'(u) + \frac{FL_1^2}{4EI_0} G_1(u) = 0,$$

où les trois termes seront des fonctions *impaires*. Le remplacement du coefficient de $y'(u)$ par λ permet d'écrire cette équation ainsi

$$I(u) y''(u) + \lambda y'(u) + \frac{FL_1^2}{4EI_0} G_1(u) = 0,$$

et d'exprimer son intégrale générale par

$$y(u) = C_1 y_1(u) + C_2 y_2(u) + Y(u),$$

où $y_1(u)$ et $y_2(u)$ sont respectivement des solutions paire et impaire particulières de l'équation privée du troisième terme et $Y(u)$ une solution impaire particulière de l'équation entière. Le caractère impair de $y(u)$ exige $C_1 = 0$. La fonction $y_2(u)$, déjà calculée au chapitre I, est exprimée par la série entre crochets de la formule (28) où λ_1 est remplacé par λ .

(1) Ce procédé de résolution est applicable aussi aux équations (12), (25) et (31). Les résultats sont évidemment les mêmes mais impliquent seulement la continuité de $I(u)$. La condition $\Phi(1) = 0$ sera remplacée par $y(1) = 0$.

Le calcul de $Y(u)$ se fait par la méthode utilisée dans ce travail en posant

$$Y(u) = Y_0(u) + \lambda Y_1(u) + \lambda^2 Y_2(u) + \dots,$$

et en écrivant, après substitution et identification,

$$I(u) Y_0''(u) + \frac{Fl_1^2}{4EI_0} G_1(u) = 0,$$

$$I(u) Y_1''(u) + Y_0(u) = 0,$$

$$I(u) Y_2''(u) + Y_1(u) = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

d'où résultent les choix

$$Y_0(u) = -\frac{Fl_1^2}{4EI_0} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du = -\lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du,$$

$$Y_1(u) = \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du,$$

$$\dots\dots\dots$$

Les fonctions $Y_0(u)$, $Y_1(u)$, ... sont impaires et alternativement positives et négatives pour $0 < u < 1$.

Ainsi

$$(43) \quad Y(u) = -\lambda \left[\int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du + \dots \right],$$

la série étant majorée par la série entière

$$M k \left(\frac{u^2}{2!} + \lambda k \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 k^2 \frac{u^6}{6!} + \dots \right),$$

où k a la signification antérieure et $M > |G_1(u)|$.

$y(u)$ sera nulle pour $u = 1$ si

$$y(1) = C_2 y_2(1) + Y(1) = 0,$$

d'où

$$C_2 = -\frac{y_2(1)}{Y(1)}$$

et par suite

$$(44) \quad y(u) = \frac{Y(u)y_2(1) - Y(1)y_2(u)}{y_2(1)}.$$

Telle est la solution recherchée; elle est unique (1). Le moment de flexion total a pour expression

$$\mathcal{Q}(u) = -\frac{y_2(1) Y''(u) - Y(1) y_2''(u)}{y_2(1)} E J \frac{4}{l_1^2}.$$

(1) Analytiquement cela est évident car toute solution impaire de l'équation avec second membre se compose de $Y(u) + C_2 y_2(u)$, où C_2 est choisi convenablement. Le remplacement de $Y(u)$ par cette expression dans (44) ou (45) ne change pas la valeur de $y(u)$.

Compte tenu des valeurs

$$Y''(u) = -\lambda \frac{G_1(u) + Y(u)}{I(u)},$$

$$y_2''(u) = -\lambda \frac{y_2(u)}{I(u)},$$

il vient

$$-\frac{l_1^2}{4E I_0 I(u)} \mathcal{G}(u) = -\lambda \frac{y_2(1) G_1(u) + y_2(1) Y(u) - Y(1) y_2(u)}{I(u) y_2(1)}$$

et par remplacement de l'expression de λ

$$(45) \quad \mathcal{G}(u) = F \frac{y_2(1) G_1(u) + y_2(1) Y(u) - Y(1) y_2(u)}{y_2(1)}.$$

Cette formule est apparentée à celle (39) du cas parabolique et la généralise. Elle est à considérer pour $0 \leq u \leq 1$.

Applications. — M. Caquot ⁽¹⁾ a donné les expressions des moments de flexion totaux dans les deux cas envisagés ci-après. Elles peuvent être retrouvées comme cas particuliers de cette formule générale.

Poutres à moment d'inertie constant I_0 .

PREMIER CAS. — *Moment appliqué constant M_0 .* — Les notations employées dans ce chapitre permettent d'écrire

$$G(x) = M_0 = F G_1(u),$$

d'où

$$G_1(u) = \frac{M_0}{F}$$

et de plus

$$I(u) = 1.$$

Ensuite

$$y_2(u) = u - \lambda \frac{u^3}{3!} + \lambda^2 \frac{u^5}{5!} - \dots = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} u),$$

$$Y(u) = -\lambda \frac{M_0}{F} \left[\frac{u^2}{2!} - \lambda \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 \frac{u^6}{6!} - \dots \right] = \frac{M_0}{F} [\cos(\sqrt{\lambda} u) - 1],$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u) &= M_0 \frac{\sin \sqrt{\lambda} + [\cos(\sqrt{\lambda} u) - 1] \sin \sqrt{\lambda} - [\cos \sqrt{\lambda} - 1] \sin(\sqrt{\lambda} u)}{\sin \sqrt{\lambda}} \\ &= M_0 \frac{\sin[\sqrt{\lambda}(1-u)] + \sin(\sqrt{\lambda} u)}{\sin \sqrt{\lambda}} = M_0 \frac{2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} (1-2u) \right]}{2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \\ &= M_0 \frac{\cos \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} (1-2u) \right]}{\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2}}. \end{aligned}$$

(1) *Loc. cit.*, p. 256.

Mais si x et u' sont l'abscisse et la variable intrinsèque sur la poutre AB, alors

$$\frac{2x}{l} - 1 = u' = 2u - 1$$

et, d'autre part, selon la notation de M. Caquot, l'abscisse x' doit être comptée à partir du milieu de la poutre. Ainsi

$$x = \frac{l}{2} + x',$$

d'où

$$\frac{2x}{l} - 1 = \frac{2x'}{l} = 2u - 1.$$

Par ailleurs

$$\lambda = \frac{Fl_1^2}{4EI_0} = \frac{Fl^2}{EI_0},$$

et comme la charge critique est celle d'Euler

$$F_0 = \frac{\pi^2 EI_0}{l^2},$$

il vient

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{F}{F_0}} \pi,$$

d'où

$$\mathcal{G}(u) = M_0 \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{F}{F_0}} \frac{\pi x'}{l}\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{F}{F_0}} \frac{\pi}{2}\right)}.$$

C'est la première formule de M. Caquot.

DEUXIÈME CAS. — *Moment appliqué sinusoidal de la forme*

$$\underline{M_0 \cos \frac{\pi x'}{l}}.$$

Soit

$$x_1 = l + x = l + \frac{l}{2} + x',$$

d'où

$$G(x_1) = F G_1(u) = M_0 \cos\left[\frac{\pi}{l}\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\right].$$

Mais

$$x_1 - \frac{3l}{2} = x_1 - \frac{2l}{2} - \frac{l}{2} = \frac{2l}{2}\left(\frac{2x_1}{l} - 1\right) - \frac{l}{2} = lu - \frac{l}{2}.$$

Par suite,

$$G_1(u) = \frac{M_0}{F} \cos\left[\frac{\pi}{l} l\left(u - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{M_0}{F} \cos\left[\pi u - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{M_0}{F} \sin \pi u.$$

Dans cette expression u est positif. De plus

$$I(u) = 1.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} y_2(u) &= u - \lambda \int_0^u du \int_0^u u du + \dots = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} u, \\ Y(u) &= -\lambda \frac{M_0}{F} \left[\int_0^u du \int_0^u \sin \pi u du - \lambda \int_0^u du \int_0^u du \int_0^u \sin \pi u du + \dots \right] \\ &= \frac{M_0}{F} \left[\frac{\lambda}{\pi} \int_0^u (\cos \pi u - 1) du - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^u du \int_0^u du \int_0^u (\cos \pi u - 1) du + \dots \right] \\ &= \frac{M_0}{F} \left[\frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\sin \pi u}{\pi} - u \right) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^u du \int_0^u \left(\frac{\sin \pi u}{\pi} - u \right) du + \dots \right] \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il est facile de déduire la loi des quadratures successives. Mais il vaut mieux profiter de l'occasion offerte pour montrer la portée simplificatrice de la remarque faite ci-après. Elle consiste à intégrer directement l'équation génératrice de la fonction $Y(u)$

$$Y''(u) + \lambda Y(u) + \lambda \frac{M_0}{F} \sin \pi u = 0.$$

Une solution impaire particulière est de la forme

$$Y(u) = \beta \sin \pi u,$$

où

$$-\beta \pi^2 + \lambda \beta + \lambda \frac{M_0}{F} = 0,$$

soit

$$\beta = \frac{\lambda \frac{M_0}{F}}{\pi^2 - \lambda}.$$

Mais

$$\lambda = \frac{F}{F_0} \pi^2 \quad (\text{voir } 1^{\text{er}} \text{ cas}),$$

d'où

$$\beta = \lambda \frac{M_0}{F} \frac{1}{\pi^2 \left(1 - \frac{F_0}{F} \right)} \frac{M_0}{F_0 - F}.$$

Ainsi

$$Y(u) = \frac{M_0}{F_0 - F} \sin \pi u \quad (1)$$

(1) La fonction $Y(u)$ donnée par la série est égale à l'expression trouvée ici augmentée de

$$-\pi \beta \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} u,$$

c'est-à-dire de $-\pi \beta y_2(u)$. L'expression de $\mathcal{G}(u)$ n'est pas changée (voir note p. 267).

et par suite;

$$\mathcal{G}(u) = M_0 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \sin \pi u + \frac{F}{F_0 - F} (\sin \sqrt{\lambda} \sin \pi u - 0)}{\sqrt{\lambda}} = M_0 \left(1 + \frac{F}{F_0 - F} \right) \sin \pi u.$$

Finalement,

$$\mathcal{G}(u) = M_0 \left(1 + \frac{F}{F_0 - F} \right) \cos \frac{\pi x'}{l}.$$

C'est la seconde formule de M. Caquot.

Remarque. — L'expression du moment de flexion total (45) contient les fonctions $y_2(u)$ et $Y(u)$. La première dépend de la seule poutre donnée et peut être calculée une fois pour toutes lorsque celle-ci est soumise à des moments de flexion différents. La seconde, au contraire, dépend d'un tel moment et doit être calculée dans chaque cas. Cependant, chacune de ces fonctions est une solution particulière quelconque d'une certaine équation différentielle; par suite, dans le calcul et suivant les expressions de $I(u)$ et $G_1(u)$, il peut être commode de rechercher de telles solutions par des voies plus simples et éviter les développements en série nécessaires à la théorie générale pour la démonstration de leur existence. La démarche simplificatrice sera appréciable surtout pour la fonction $Y(u)$ sujette à des variations suivant le moment de flexion appliqué.

Une fois le moment de flexion total obtenu, le problème consiste à trouver le maximum maximum de sa valeur absolue. L'intérêt de la pratique l'exige.

Cela implique la recherche des zéros positifs ou nuls de la dérivée de $\mathcal{G}(u)$, c'est-à-dire des solutions de l'équation

$$y_2(1) G_1'(u) + y_2(1) \dot{Y}'(u) - Y(1) y_2'(u) = 0.$$

Le plus grand maximum de $|\mathcal{G}(u)|$ correspond à l'une ou plusieurs d'entre elles.

Une telle étude algébrique doit être faite dans chaque cas particulier. La pratique ne réclame pas d'ailleurs des valeurs exactes puisque aussi bien elle applique des coefficients de sécurité. La recherche du plus grand maximum peut donc être effectuée au moyen d'approximations judicieuses.

Au point de vue pratique une autre remarque, semblable à celle déjà faite dans le cas du moment parabolique, peut être indiquée dans le cas général actuel. Les données du problème doivent vérifier une inégalité de la forme

$$\frac{[Y'(u) y_2(1) - Y(1) y_2'(u)]^2}{l^2 y_2^2(1)} < \eta$$

pour toute valeur de u et pour un η choisi suffisamment petit. C'est la condition nécessaire de petitesse de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité. Elle sera réalisée si

$$\frac{1}{l^2} [y'_{\max}(u)]^2 < \eta.$$

Enfin, l sera calculé en fonction des données du problème au moyen de la relation

$$L_1 = \Sigma_1 + \frac{F}{ES} l_1$$

ou, après division par 2, de

$$L = \Sigma + \frac{F}{ES} l.$$

Mais c'est là une satisfaction purement théorique sans intérêt pratique

CHAPITRE IV.

FLAMBEMENT D'UNE POUTRE DROITE A MOMENT D'INERTIE SYMÉTRIQUE VARIABLE, SOUS L'ACTION SIMULTANÉE D'UNE CHARGE DE BOUT, D'UN MOMENT DE FLEXION PAIR VARIABLE AVEC L'ABSCISSE x ET D'UN MOMENT DE FLEXION IMPAIR VARIABLE.

Les deux moments de flexion sont dus, comme dans les cas précédents, à des forces (appliquées à la poutre) dirigées normalement à la fibre moyenne

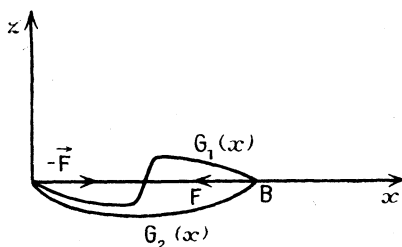


Fig. 8.

droite, donc sans composantes suivant Ax . Les relations

$$\frac{2s}{L} - 1 = \frac{2\sigma}{\Sigma} - 1 = \frac{2x}{l} - 1 = u$$

peuvent encore être écrites.

Soient

$$G_1(x) = F G_1(u), \quad G_2(x) = F G_2(u)$$

respectivement les moments de flexion impair et pair.

En fait, chacun d'eux est défini séparément par rapport à l'état normal de la poutre de caractéristiques s et L . Sous leur influence séparée, il y aura des l différents mais liés à L , s et u par les trois égalités ci-dessus. Appliquées simultanément, la nouvelle valeur de l sera bien déterminée et les trois égalités écrites seront encore valables. Les fonctions $G_1(u)$ et $G_2(u)$ seront donc bien définies et d'une manière univoque, qu'il s'agisse de l'action séparée des deux moments de flexion ou de leur action simultanée.

La notation

$$y(x) = y\left(\frac{lu}{2} + 1\right) = y(u)$$

permet d'écrire encore

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4}{l^2} y''(u),$$

et l'équation de l'équilibre élastique

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{G_1(x) + G_2(x) + y F}{E J}$$

devient

$$(45) \quad I(u) y''(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0} [G_1(u) + G_2(u)] + \frac{F l^2}{4 E I_0} y(u) = 0.$$

La solution recherchée $y(u)$ de cette équation est unique, car elle doit satisfaire aux conditions

$$y(-1) = y(+1) = 0;$$

les deux constantes arbitraires sont ainsi déterminées.

La fonction $y(u)$ peut être trouvée également par la considération de l'équation

$$I(u) \tau_a''(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0} G_a(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0} \tau_a(u) = 0.$$

S'il est possible de trouver une solution impaire $\tau_1(u)$ de cette équation où $a=1$ et une solution paire $\tau_2(u)$ de la même équation où $a=2$, nulles pour $u=1$, la somme

$$\tau_1(u) + \tau_2(u)$$

satisfera à l'équation (45) et représentera $y(u)$.

En effet, dans les expressions trouvées précédemment des moments de flexion totaux le remplacement de l par L (toujours effectué en pratique) modifie le résultat d'une façon imperceptible car les déformations sont très petites. Les deux équations différentielles obtenues par $a=1$ et $a=2$ donnent les déformations des fibres moyennes, à la même approximation près, lorsque est appliqué à la poutre le seul moment G_1 ou le seul moment G_2 . Dans le premier cas la déformation est paire, dans le second elle est impaire.

Reste à s'assurer de l'existence et de l'unicité des solutions $\tau_1(u)$ et $\tau_2(u)$. Si $\frac{F l^2}{4 E I_0}$ est remplacé par λ , l'expression de $\tau_1(u)$ est donnée par la formule (44).

L'expression de $\tau_2(u)$ est

$$\tau_2(u) = \frac{Y_2(u) y_2(1) - Y_2(1) y_2(u)}{y_2(1)},$$

où $y_2(u)$ représente la fonction $X(u)$ du Chapitre I et $Y_2(u)$ la fonction obtenue par substitution de $G_2(u)$ à la place de $G_1(u)$ dans la série (43).

Le moment de flexion total s'obtient comme celui du Chapitre III (45)

$$\mathcal{G}(u) = -\frac{4}{l^2} E I_0 I(u) [\gamma_1''(u) + \gamma_2''(u)]$$

et s'écrit explicitement, d'après ce qui vient d'être dit, sous la forme

$$\mathcal{G}(u) = F \left[\frac{y_1(l) G_1(u) + y_1(l) Y_1(u) - Y_1(l) y_1(u)}{y_1(l)} + \frac{y_2(l) G_2(u) + y_2(l) Y_2(u) - Y_2(l) y_2(u)}{y_2(l)} \right],$$

avec

$$y_1(u) = u - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)} du - \dots,$$

$$Y_1(u) = -\lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du - \dots,$$

$$y_2(u) = 1 - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots,$$

$$Y_2(u) = -\lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{G_2(u)}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_2(u)}{I(u)} du - \dots$$

L'homogénéité de $\mathcal{G}(u)$ est respectée, car $G_1(u)$ et $G_2(u)$ ont les dimensions d'une longueur et λ est sans dimension.

Le moment de flexion total ainsi obtenu, l'étude du problème s'achève exactement comme au Chapitre III.

