Annales scientifiques de l'É.N.S.

Chia-Yung Yu

Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 68 (1951), p. 65-104
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__65_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES DROITES DE BOREL

DE

CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR M. YU CHIA-YUNG.

INTRODUCTION.

L'étude des fonctions entières définies par des séries de Dirichlet a son origine dans un Mémoire de M. J. F. Ritt. [9, *b*] (1), qui a introduit la notion de l'*ordre linéaire* (2). En s'appuyant sur cette notion, MM. S. Mandelbrojt et J. Gergen [6 et 5] ont établi, pour certaines fonctions entières, l'existence des *droites de Julia*, Avec la méthode de sommation qu'il [10, *d*] avait utilisée dans la recherche des directions de Borel, M. G. Valiron [10, *f*] a étudié les *droites de Borel* des fonctions entières d'ordre linéaire positif définies par certaines séries de Dirichlet absolument convergentes partout. A une telle fonction, il associe une série de Dirichlet ayant une abscisse finie de convergence absolue. Chaque sommet à distance finie de l'étoile horizontale [1, p. 184] de la série associée correspond à une droite de Borel de la fonction donnée.

Dans ce travail (3), nous traitons, avec la méthode de sommation de M. Valiron, le cas des droites de Borel des fonctions entières définies par certaines séries de Dirichlet ou leurs généralisations. Le premier Chapitre est consacré au cas des séries de Dirichlet. Nous donnons quelques relations entre les suites des exponentielles et des coefficients des séries et la classification

(1) Les numéros figurant entre crochets dans le texte renvoient à la Bibliographie placée à la fin de ce Mémoire.

(2) Nous employons ici la terminologie de M. Valiron [10, *f*].

(3) Une partie des résultats de ce Mémoire ont été résumés dans deux Notes des *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 228, 1949, p. 641-643 et p. 1833-1835.

d'après le mode de croissance linéaire des fonctions entières que ces séries définissent. Les résultats obtenus sont des extensions des théorèmes classiques. Ensuite, nous exposons les théorèmes de M. Valiron, précisons un point et donnons des applications immédiates de ces théorèmes. Nous pouvons comparer les droites de Borel d'une fonction entière et celles de ses transformées de Cramér [1, Chap. III] qui contiennent les dérivées de la fonction donnée comme cas particulier. Une opération inverse de celle de M. Valiron nous conduit à construire, correspondant à une série de Dirichlet ayant une abscisse finie de convergence absolue, des fonctions entières d'ordre linéaire positif définies par des séries absolument convergentes partout telles que chaque sommet à distance finie de l'étoile horizontale de la série donnée corresponde à une droite de Borel des fonctions associées. L'application d'une méthode de sommation de M. M. Riesz permet aussi de traiter, dans le cas de l'ordre linéaire fini positif, ce problème inverse et le problème originel.

Les transformées de Laplace-Stieltjes et les séries d'exponentielles complexes peuvent être considérées comme des généralisations des séries de Dirichlet. Dans la première partie du deuxième Chapitre, nous étudions des fonctions entières définies par des transformées de Laplace-Stieltjes qui sont très « voisines » des séries de Dirichlet. Dans ce cas spécial, presque tous les résultats du premier Chapitre s'étendent. Dans le cas des transformées générales, nous étendons également quelques théorèmes sur les singularités et une méthode de sommation des séries de Dirichlet de M. M. Riesz.

Dans la deuxième partie du deuxième Chapitre, nous traitons des séries d'exponentielles complexes. Ici, il n'est plus question d'ordre linéaire et de droites de Borel *horizontales*. Avec M. Valiron, nous introduisons l'*ordre en* e^r et étudions les droites de Borel *parallèles à toute direction*. Nous associons des séries qui ne sont pas absolument convergentes partout à une fonction entière d'ordre fini positif en e^r définie par une série d'exponentielles complexes absolument convergentes partout. Les singularités des séries associées fournissent des renseignements sur les droites de Borel de la fonction donnée. M. Valiron [10, *e*] a étudié cette question avec une autre méthode et a obtenu des résultats plus précis. Mais ces deux méthodes ne peuvent s'appliquer ni l'une ni l'autre à la recherche *générale* des droites de Borel d'une fonction entière d'ordre infini en e^r.

En terminant, je suis heureux de remercier le Gouvernement Français qui m'a permis de travailler sous la direction de maîtres éminents. Je ne pourrai jamais exprimer suffisamment toute ma respectueuse reconnaissance à M. Valiron, qui m'a proposé le sujet de ce travail et m'a donné des conseils et des encouragements très précieux. J'adresse mes remerciements respectueux à M. Montel qui a bien voulu présenter mes Notes des *Comptes rendus* et publier cet article dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*, et à M. A. Lichnerowicz.

CHAPITRE I.

FONCTIONS ENTIÈRES DÉFINIES PAR CERTAINES SÉRIES DE DIRICHLET.

1. *Préliminaires.* — On considère une série de Dirichlet

$$(1.1)\quad F(z)=\sum_{1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \qquad \lambda_{n+1}>\lambda_n, \qquad \lambda_1 \geqq 0, \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_n=\infty, \qquad z=x+iy,$$

où

$$(1.2)\qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n}=D<\infty.$$

Elle définit, dans son demi-plan de convergence, une fonction holomorphe. En posant $|a_n|=A_n$ et en désignant $x_c(F)$ et $x_a(F)$ l'abscisse de convergence et l'abscisse de convergence absolue, respectivement, de $F(z)$, on a les relations suivantes [5 et 10, *f*]

$$(1.3)\qquad 0 \leqq x_c(F)-x_a(F) \leqq D;$$

$$(1.4)\qquad -D \leqq x_a(F)+\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_n}{\lambda_n} \leqq 0.$$

Soient $\mu(x, F)$ le maximum de $A_n e^{\lambda_n x}$ $(n=1, 2, \ldots)$, et $M(x, F)$ la borne supérieure de $|F(x+iy)|$, $-\infty<y<\infty$, où x est une constante inférieure à $x_a(F)$. M. G. Dœtsch [3] a démontré que $\log M(x, F)$ est une *fonction convexe de* x. Si $x_c(F)=\infty$, $x_a(F)=\infty$, $F(z)$ définit une *fonction entière* et l'on démontre, comme dans le cas des séries de Taylor, que $\log \mu(x, F)$ est aussi une *fonction convexe de* x.

En effet, on a

$$(1.5)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log A_n}{\lambda_n}=-\infty.$$

Il s'ensuit que, si l'on marque les points P_n de coordonnées $(\lambda_n, -\log A_n)$, on peut, avec ces points, tracer un polygone de Newton $\pi(F)$ convexe vers le bas et laissant les points P_n au-dessus ou sur ces côtés, les sommets étant certains des points P_n. x étant fixé, le terme maximum de plus grand rang correspond à la plus grande valeur $n(x)$ pour laquelle la droite de pente x passant par $P_{n(x)}$ ne traverse pas le polynome $\pi(F)$.

Suivant la méthode de M. Valiron [10, *a*] dans le cas des séries de Taylor, on obtient

$$\log \mu(x, F)=\lambda_1\left(x-\frac{G_1}{\lambda_1}\right) \qquad \text{pour} \quad x<\frac{G_2-G_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

et

$$\log \mu(x, F)=\frac{\lambda_1 G_2-\lambda_2 G_1}{\lambda_2-\lambda_1}+\int_{\frac{G_2-G_1}{\lambda_2-\lambda_1}}^{x} \lambda_{n(x)}\, dx \qquad \text{pour} \quad x \geqq \frac{G_2-G_1}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

En considérant les dérivées à droite et à gauche de $\log \mu(x, F)$, on trouve que $\log \mu(x, F)$ est une fonction convexe.

Puisque pour $x < x_a(\mathrm{F})$,

$$a_n e^{\lambda_n x} = \lim_{\mathrm{Y}=\infty} \frac{1}{\mathrm{Y}} \int_{y_0}^{\mathrm{Y}} e^{-i\lambda_n y} \mathrm{F}(x+iy)\,dy,$$

on a

$$\mathrm{A}_n e^{\lambda_n x} \leqq \mathrm{M}(x, \mathrm{F}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et par conséquent

$$(1.6) \qquad \mu(x, \mathrm{F}) \leqq \mathrm{M}(x, \mathrm{F}), \qquad x < x_a(\mathrm{F}).$$

D'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir un entier positif $\mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que $\log n < \lambda_n\left(\mathrm{D} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ pour $n \geqq \mathrm{N}(\varepsilon)$. Donc

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} \mathrm{M}(x, \mathrm{F}) &\leqq \sum \mathrm{A}_n e^{\lambda_n x} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \\ &= \sum_{1}^{\mathrm{N}(\varepsilon)-1} \mathrm{A}_n e^{\lambda_n x} + \sum_{\mathrm{N}(\varepsilon)}^{\infty} \mathrm{A}_n e^{\lambda_n (x+\mathrm{D}+\varepsilon)} e^{-\lambda_n(\mathrm{D}+\varepsilon)}, \\ &< \mathrm{N}(\varepsilon)\mu(x, \mathrm{F}) + \mu(x+\mathrm{D}+\varepsilon, \mathrm{F}) \sum_{\mathrm{N}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\mathrm{D}+\varepsilon}{\mathrm{D}+\frac{\varepsilon}{2}}}}, \\ &< \mathrm{K}\,\mu(x+\mathrm{D}+\varepsilon, \mathrm{F}), \qquad x < x_a(\mathrm{F}), \end{aligned}$$

K étant une constante dépendant de $\mathrm{F}(z)$ et ε.

Si $x_a(\mathrm{F}) = \infty$, $\log \mu(x, \mathrm{F})$ étant convexe et indéfiniment croissante, on a

$$\log \mu(x+\eta, \mathrm{F}) = \log \mu(x, \mathrm{F}) + \eta p(x), \qquad \eta > 0, \qquad p(x) \to \infty,$$

et il s'ensuit que

$$(1.8) \qquad \mathrm{M}(x, \mathrm{F}) < \mu(x+\mathrm{D}+\varepsilon, \mathrm{F}), \qquad \varepsilon > 0, \qquad x > x(\varepsilon).$$

Les résultats que l'on démontre dans ce numéro sont en effet ceux de M. Valiron [10, *f*].

2. *Classification des fonctions entières d'après le mode de croissance linéaire.* — Étant donné une fonction entière $\Phi(z)$, on définit $\mathrm{M}(x, \Phi)$ comme dans le n° 1. On peut classifier les fonctions entières d'après leur mode de croissance linéaire, c'est-à-dire, d'après le mode de croissance de $\mathrm{M}(x, \Phi)$. M. Ritt. [9, *b*] définit l'*ordre linéaire* de la fonction $\Phi(z)$ par le nombre

$$\tau = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log \mathrm{M}(x, \Phi)}{x},$$

et, si $0 < \tau < \infty$, le *le type de son ordre linéaire* τ par le nombre

$$\sigma = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log \mathrm{M}(x, \Phi)}{e^{\tau x}}.$$

On dit que la fonction $\Phi(z)$ est d'*ordre linéaire fini* ou *infini* suivant $\tau < \infty$ ou $\tau = \infty$ et qu'elle est du *type minimum, moyen* ou *maximum de son ordre* *linéaire* τ suivant $\sigma=0$, $0<\sigma<\infty$ ou $\sigma<\infty$. La fonction $\Phi(z)$ d'ordre linéaire τ est dite *à croissance linéaire régulière* si

$$\tau=\lim_{x=\infty}\frac{\log\log M(x,\,\Phi)}{x};$$

la fonction $\Phi(z)$ du type σ de l'ordre linéaire τ est dite *à croissance linéaire parfaitement régulière* si

$$\sigma=\lim_{x=\infty}\frac{\log M(x,\,\Phi)}{e^{\tau x}}.$$

D'autre part, soit $U(x)$ une fonction réelle continue définie pour x supérieur ou égal à une constante. Si, quel que soit $\varepsilon>0$, l'inégalité

$$M(x,\,\Phi)>U(x-\varepsilon)$$

est vérifiée pour une suite de x tendant vers l'infini, on dit que $\Phi(z)$ est *au moins de l'ordre linéaire de* $U(x)$. Si, en outre, quel que soit $\varepsilon>0$, on a

$$M(x,\,\Phi)<U(x+\varepsilon),$$

pour x assez grand, ce que l'on exprime en disant que $\Phi(z)$ est *au plus de l'ordre linéaire de* $U(x)$, on dit que $\Phi(z)$ est *de l'ordre linéaire de* $U(x)$. Si les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées dans chaque bande horizontale contenant la droite $y=y_0$, on définit de la même manière l'*ordre linéaire de* $\Phi(z)$ *sur cette droite*.

Considérons la fonction $F(z)$ définie par (1.1). Supposons dorénavant que $x_c(F)=\infty$, donc $x_a(F)=\infty$. $F(z)$ est ainsi une *fonction entière*. M. Ritt obtint un théorème analogue à celui de Liouville : *Si* $F(z)$ *n'est pas un polynome exponentiel, quel que soit le nombre positif* K, *le rapport* $M(x,\,F):e^{Kx}$ *finit par dépasser tout nombre donné*. Supposons de plus que $F(z)$ ne soit pas un polynome exponentiel. Comme dans le cas des séries de Taylor, on peut étudier la relation entre $M(x,\,F)$ et les suites $\{a_n\}$ et $\{\lambda_n\}$, On a les théorèmes suivants :

Théorème 2.1 [1]. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $F(z)$ *soit d'ordre linéaire* τ *est que*

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log A_n}{\lambda_n\log\lambda_n}=-\frac{1}{\tau} \tag{2.1}$$

$\left(-\frac{1}{\tau}=-\infty\ si\ \tau=0\ et\ -\frac{1}{\tau}=0\ si\ \tau=\infty\right)$.

Démonstration. — Supposons d'abord $0<\tau<\infty$. Je dis que la condition est suffisante. Par hypothèse, on a, quel que soit $\varepsilon>0$.

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n}<\left(\frac{e(\tau+\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}} \tag{2.2}$$

[1] Ce théorème est dû à M. Ritt, mais son énoncé a été publié avec une faute d'impression.

à partir d'un certain indice n_0, et d'autre part,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} > \left(\frac{e(\tau-\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}} \tag{2.3}$$

pour une suite indéfiniment croissante d'indices $n_1, n_2, \ldots$.

μ et ρ étant des nombres positifs, on considère l'expression

$$\left[\frac{e^x}{(\mu\varkappa)^{\frac{1}{\rho}}}\right]^{\varkappa} \qquad (\varkappa > 0),$$

comme fonction de $\varkappa$, qui atteint son maximum pour

$$\varkappa = \frac{e^{\rho e}}{\mu e},$$

d'où

$$x = \frac{1}{\rho}\log \varkappa\mu e.$$

On voit que ce maximum est égal à

$$\exp\left[\frac{e^{\rho x}}{\mu e \rho}\right].$$

En vertu de (2.3) et en faisant $\rho = \tau - \varepsilon$ et $\mu = \frac{1}{e(\tau-\varepsilon)}$, on obtient

$$M(x, F) > \exp\left[e^{(\tau-\varepsilon)x}\right] \tag{2.4}$$

pour

$$x = x_p = \frac{1}{\tau-\varepsilon}\log\frac{\lambda_{n_p}}{\tau-\varepsilon} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, la série

$$\sum e^{-\lambda_n(D+k)} \qquad (k = \text{const.} > 0,\ n = 1, 2, \ldots)$$

est convergente. En outre, on a

$$\frac{e^x}{(\mu\lambda_n)^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}} < e^{-D-k} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{2.5}$$

dès que $\lambda_n > \left(\frac{1}{\mu}\right) e^{(\tau+\varepsilon)(x+D+k)}$; (1.2) entraîne que $n < e^{(D+\varepsilon)\lambda_n}$ dès que n est assez grand. Donc si x est assez grand, (2.5) est vérifiée dès que

$$n > \exp\left[\frac{D+\varepsilon}{\mu} e^{(\tau+\varepsilon)(x+D+k)}\right].$$

En tenant compte de (2.2), on aura

$$\begin{aligned} M(x, F) &< \sum_1^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \sum_{n_0}^{\infty}\left[\frac{e^x}{(\mu\lambda_n)^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}}\right]^{\lambda_n}, \qquad \mu = \frac{1}{e(\tau+\varepsilon)}, \\ &< K + \sum_1^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\left[(D+\varepsilon)(\tau+\varepsilon)e^{(\tau+\varepsilon)(x+D+k)+1}\right]\exp\left[e^{(\tau+\varepsilon)x}\right] \\ &= K + \sum_1^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\left\{\left[(D+\varepsilon)(\tau+\varepsilon)e^{(\tau+\varepsilon)(D+k)+1} + 1\right] e^{(\tau+\varepsilon)x}\right\}, \end{aligned}$$

où K est une constante dépendant de k. Il en résulte que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$M(x, F) < \exp\left[e^{(\tau+\varepsilon)x}\right], \tag{2.6}$$

pourvu que x soit assez grand. Donc la condition est suffisante.

On voit facilement que la condition est également nécessaire et que la condition reste vraie dans le cas où $\tau = 0$ ou $\tau = \infty$.

THÉORÈME 2.2. — *Si* $F(z)$ *est du type* σ *de l'ordre linéaire fini* $\tau > 0$, *on a*

$$\alpha \leqq \sigma \leqq (\tau D e^{\tau D+1} + 1)\alpha, \tag{2.7}$$

où

$$\alpha = \overline{\lim_{n=\infty}} \left(\frac{\lambda_n}{\tau e}\right)\left(\sqrt[\lambda_n]{A_n}\right)^{\tau}.$$

Démonstration. — On suppose d'abord $0 < \sigma < \infty$. Par hypothèse, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} < \left(\frac{\tau e \alpha(1+\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

à partir d'un certain indice n_0 et d'autre part

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} > \left(\frac{\tau e \alpha(1-\varepsilon)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

pour une suite indéfiniment croissante d'indices $n_1, n_2, \ldots$. Comme dans la démonstration du théorème précédent, on trouve que

$$M(x, F) > \exp\left[(1-\varepsilon)\alpha e^{\tau x}\right],$$

pour

$$x = x_p = \frac{1}{\tau}\log\frac{\lambda_{n_p}}{\tau\alpha(1-\varepsilon)} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Donc $\alpha \leqq \sigma$. D'autre part, si x est assez grand, on a

$$\begin{aligned} M(x, F) &< K' + \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\left[\tau\alpha(D+\varepsilon)(1+\varepsilon)e^{\tau(x+D+k)+1}\right]\exp\left[\alpha(1+\varepsilon)e^{\tau x}\right] \\ &= K' + \sum_{1}^{n_0-1} A_n e^{\lambda_n x} + \exp\left\{\left[\tau(D+\varepsilon)e^{\tau(D+k)+1} + 1\right]\alpha(1+\varepsilon)e^{\tau x}\right\} \qquad (k > 0), \end{aligned}$$

où K' est une constante dépendant de k. Donc

$$M(x, F) < \exp\left\{\left[\tau(D+\varepsilon)e^{\tau(D+k)+1} + 1\right]\alpha(1+2\varepsilon)e^{\tau x}\right\},$$

dès que $x > x_0(\varepsilon, k)$. En faisant tendre vers zéro ε et k, il s'ensuit que $\sigma \leqq (\tau D e^{\tau D+1} + 1)\alpha$. En examinant la démonstration, on voit que ce théorème reste vrai dans le cas où $\alpha = 0$ ou $\alpha = \infty$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent :

Corollaire 2.1. — *Si* $D = 0$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $F(z)$ *soit du type* σ *de l'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *est que*

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\tau e}\right) \left(\sqrt[\lambda_n]{A_n}\right)^\tau = \sigma. \tag{2.8}$$

Théorème 2.3. — *Si* $D = 0$, *la condition nécessaire est suffisante pour que* $F(z)$ *du type* σ *de l'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *soit à croissance linéaire parfaitement régulière est que la condition* (2.8) *étant réalisée, on puisse trouver une suite d'indices* n_p *telle que*

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{\lambda_{n_p}}{\tau e}\right) \left(\sqrt[\lambda_{n_p}]{A_{n_p}}\right)^\tau = \sigma, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}} = 1. \tag{2.9}$$

Démonstration. — Nous utilisons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème précédent. Supposons $0 < \sigma < \infty$. Démontrons que la condition est suffisante. Soit $x_p \leqq x \leqq x_{p+1}$, en posant

$$x = x_p = \frac{1}{\tau} \log \frac{\lambda_{n_p}}{\tau\sigma(1-\varepsilon)} \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

Nous aurons

$$M(x, F) \geqq M(x_p, F) > \exp[(1-\varepsilon)\sigma e^{\tau x_p}].$$

Or, la condition (2.9) entraîne que

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{e^{\tau x_{p+1}}}{e^{\tau x_p}}\right] = 1.$$

Nous trouvons ainsi, pour x assez grand,

$$M(x, F) > \exp[(1-\varepsilon)^2 \sigma e^{\tau x}].$$

En achevant la démonstration comme celle du théorème précédent, il est ainsi prouvé que la condition est suffisante.

Démontrons que la condition est nécessaire. Sinon, il existerait deux nombres positifs, β et γ, tels que l'on ait

$$\sqrt[\lambda_n]{A_n} < \left(\frac{\tau e \sigma(1-\beta)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

pour une infinité d'intervalles $\lambda_{n'_\nu} < \lambda_{n_\nu} < \lambda_{n''_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), extérieurs les uns aux autres et satisfaisant à la condition $\lambda_{n''_\nu} > (1+\gamma)\lambda_{n'_\nu}$. Choisissons convenablement le nombre $\varepsilon > 0$ et partageons les termes de la série en quatre groupes, correspondant respectivement aux valeurs suivantes de l'indice n :

$$n < n_0, \qquad n_0 \leqq n \leqq n'_\nu, \qquad n'_\nu < n < n''_\nu, \qquad n''_\nu \leqq n.$$

La somme $\Sigma A_n e^{\lambda_n x}$ ($n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$) n'aura pas d'influence sur le résultat. Suivant la démonstration du théorème précédent, on voit que la valeur absolue de la somme des termes du troisième groupe est inférieure ou égale à

$$\exp\{(1+2\varepsilon)[(1-\beta)\sigma + 2\varepsilon]e^{\tau x}\}.$$

Pour les deux autres groupes, on a

$$A_n e^{\lambda_n x} < \left[\left(\frac{\tau e \sigma(1+\varepsilon)}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{\tau}} e^x \right]^{\lambda_n} = \exp\left[\frac{\lambda_n}{\tau} \left(1 - \log \frac{\lambda_n}{\delta} \right) \right],$$

où δ désigne la valeur de λ_n, $\delta = \tau\sigma(1+\varepsilon)e^{\tau x}$, pour laquelle l'expression en question atteint son maximum. Déterminons x par la condition $\delta = \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\lambda_{n'_\nu}$, d'où il suit

$$\lambda_{n'_\nu} = \frac{\delta}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)}, \qquad \lambda_{n''_\nu} > \frac{(1+\gamma)\delta}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)} = \overline{\lambda}_{n''_\nu},$$

On aura, pour le deuxième groupe,

$$A_n e^{\lambda_n x} < \exp\left[\frac{\lambda_{n'_\nu}}{\tau} \left(1 - \log \frac{\lambda_{n'_\nu}}{\delta} \right) \right] = \exp[(1+\varepsilon) k' \sigma e^{\tau x}],$$

et, pour le quatrième groupe,

$$A_n e^{\lambda_n x} < \exp\left[\frac{\overline{\lambda}_{n''_\nu}}{\tau} \left(1 - \log \frac{\lambda_{n''_\nu}}{\delta} \right) \right] = \exp[(1+\varepsilon) k'' \sigma e^{\tau x}],$$

k' et k'' désignant les quantités

$$k' = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2}} \left[1 + \log\left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) \right], \qquad k'' = \frac{1+\gamma}{1 + \frac{\gamma}{2}} \left[1 - \log\left(\frac{1+\gamma}{1 + \frac{\gamma}{2}} \right) \right],$$

Or ces deux quantités sont toutes les deux inférieures à 1. On pourra obtenir, pour une infinité de valeurs x indéfiniment croissantes,

$$M(x, F) < \exp[(1-\eta)\sigma e^{\tau x}],$$

où η désigne un nombre positif fixe. $F(z)$ ne serait pas à croissance linéaire parfaitement régulière, contrairement à l'hypothèse. Notre démonstration est ainsi achevée. On peut vérifier facilement le théorème dans le cas où $\sigma = 0$ ou $\sigma = \infty$.

Par une méthode analogue on établit le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $F(z)$ *d'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *soit à croissance linéaire régulière est que la condition* (2.1) *étant réalisée, on puisse trouver une suite d'indices* n_p *telle que*

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log A_{n_p}}{\lambda_n \log \lambda_{n_p}} = -\frac{1}{\tau}, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log \lambda_{n_{p+1}}}{\log \lambda_{n_p}} = 1. \tag{2.10}$$

Remarque. — Si l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log \lambda_n} = E < +\infty,$$

la condition (1.2) est vérifiée avec $D = 0$ et l'on a [10, *e*]

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log M(x, F)}{\log \mu(x, F)} = 1.$$

Dans ce cas, on pourra démontrer le théorème 2.1, le corollaire 2.1 et les théorèmes 2.3 et 2.4 par la méthode de M. Valiron [10, *a*].

3. *Série associée à la fonction entière* $F(z)$ *et leur prolongement analytique.* — On considère seulement le cas où l'ordre linéaire de $F(z)$ est positif. On prend une fonction $V(x)$ définie pour $x \geqq 1$ comme suit :

1° Dans le cas de l'ordre linéaire fini positif τ, étant donnée une suite positive décroissante $\{\eta_n\}$ tendant vers zéro, si l'on a, quels que soient $x (> X_0)$ et n

$$\log \mu(x, F) > e^{(\tau-\eta_n)x},$$

on prend

$$V(x) = \log \mu(x, F).$$

Dans le cas contraire, on a une suite $\{x_n\}$ indéfiniment croissante pour laquelle

$$\log \mu(x_n, F) = e^{(\tau-\eta_n)x_n}.$$

Dans chaque intervalle (x_n, x_{n+1}) on prend $V(x)$ égale au plus grand des deux nombres $\log \mu(x, F)$ et $e^{(\tau-\eta_n)x}$.

2° Dans le cas de l'ordre linéaire infini, on prend

$$\frac{\log V(x)}{x} = \max \text{ de } \frac{\overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\, \mu(u, F)}{u} \qquad \text{pour} \quad u \leqq x.$$

Dans le premier cas, $V(x)$ est une fonction convexe de x; dans le deuxième cas $V(x)$ est une fonction continue. En tout cas, on a, pour x assez grand,

$$V(x) \geqq \log \mu(x, F) \tag{3.1}$$

et, pour une suite de x tendant vers l'infini,

$$V(x) = \log \mu(x, F). \tag{3.2}$$

En tenant compte de (1.8) et (1.6), on voit que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$V(x + D + \varepsilon) > \log M(x, F) \tag{3.3}$$

pour x assez grand et

$$V(x) \leqq \log M(x, F) \tag{3.4}$$

pour une suite de x tendant vers l'infini. Donc, en posant $W(x) = e^{V(x)}$, $F(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $W(x)$ *et au plus de l'ordre linéaire de* $W(x + D)$. *Si* $D = 0$, $F(z)$ *est de l'ordre linéaire de* $W(x)$.

Dans le cas $0 < \tau < \infty$, $V(x) \geqq e^{(\tau-\eta_k)x}$, $(0 < \eta_k < \tau)$, pour x assez grand; dans le cas $\tau = \infty$, $V(x) = \exp[x\Phi(x)]$, où $\Phi(x) = \dfrac{\log V(x)}{x}$ est une fonction indéfiniment croissante. Donc dans tous les cas

$$V(x) > x^2 \qquad \text{pour} \quad x \geqq X_0 > 1. \tag{3.5}$$

D'ailleurs dans le premier cas, en vertu de la convexité de $V(x)$,

$$\frac{W(x-h)}{W(x)} = \frac{1}{e^{V(x)-V(x-h)}} < \exp\left[-h\frac{V(x-h)-V(X_0)}{x-h-X_0}\right]$$
$$< \exp\left[-h\frac{(x-h)^2-V(X_0)}{x-h-X_0}\right] \qquad (h>0),$$

pour x assez grand et dans le deuxième cas,

$$\frac{W(x-h)}{W(x)} \leqq \frac{\exp[(x-h)\Phi(x)]}{\exp[x\Phi(x)]} \qquad (h>0).$$

On aura par conséquent

$$(3.6) \qquad \int^{\infty}\frac{W(x-h)}{W(x)}dx<\infty \qquad \text{pour tout} \quad h>0.$$

Construisons la fonction

$$(3.7) \qquad \Omega(u)=\int_1^{\infty}\frac{e^{ut}}{W(t)}dt,$$

qui est évidemment une fonction croissante de u. Désignons par $\nu(u)$ le maximum de $\frac{e^{ut}}{W(t)}$, $1\leqq t<\infty$, et posons

$$\nu(u)=\frac{e^{ut_u}}{W(t_u)}.$$

Nous avons, dès que u est assez grand,

$$\Omega(x)>\int_1^{t_u}\frac{e^{ut}}{W(t)}dt \geqq \frac{1}{W(t_u)}\int_1^{t_u}e^{ut}\,dt=\frac{e^{ut_u}-e^u}{u\,W(t_u)}>\frac{e^{ut_u}}{2u\,W(t_u)}=\frac{\nu(u)}{2u}$$

et

$$\Omega(u)=\int_1^{\frac{3u}{2}}\frac{e^{ut}}{W(t)}dt+\int_{\frac{3u}{2}}^{\infty}\frac{e^{ut}}{W(t)}dt<\frac{3u}{2}\nu(u)+\int_{\frac{3u}{2}}^{\infty}e^{ut-t^2}dt$$
$$<\frac{3u}{2}\nu(u)+\int_{\frac{3u}{2}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{3}}dt<2u\,\nu(u).$$

Nous avons donc, pour u assez grand, les inégalités

$$(3.8) \qquad \frac{3u}{2}\nu(u)<\Omega(u)<2u\,\nu(u).$$

A la fonction $F(z)$, on associe la série de Dirichlet

$$(3.9) \qquad f(z)=\Sigma a_n\,\Omega(\lambda_n)\,e^{\lambda_n z} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

dont l'abscisse de convergence absolue $x_a(f)$ vérifie

$$(3.10) \qquad -D\leqq x_a(f)\leqq 0.$$

En effet, supposons

$$\nu(\lambda_n)=\frac{e^{\lambda_n t'_n}}{W(t'_n)}.$$

En vertu de (3.1) on obtient

$$\log \nu(\lambda_n) = \lambda_n t'_n - V(t'_n) \leqq -\log A_n$$

pour n assez grand. D'ailleurs, en vertu de (3.2),

$$\log \nu(\lambda_n) \geqq \lambda_n t - V(t) = \lambda_n t - \log \mu(t, F)$$

pour une suite de t tendant vers l'infini : $\{t''_m\}$. Il en résulte que

$$\log \nu(\lambda_m) \geqq -\log A_m$$

pour une suite de λ_n telle que $\mu(t''_m, F) = A_m e^{\lambda_m t''_m}$. Donc (3.8) entraîne que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_n \Omega(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0.$$

(3.10) est ainsi établi en tenant compte de (1.4).

On va donner une méthode de sommation de $f(z)$. Pour $\mathcal{R}(z) < x_a(f)$, on peut écrire

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n \Omega(\lambda_n) e^{\lambda_n z} = \sum_1^\infty a_n e^{\lambda_n z} \int_1^\infty \frac{e^{\lambda_n t}}{W(t)} dt = \sum_1^\infty \int_1^\infty \frac{a_n e^{\lambda_n(z+t)}}{W(t)} dt,$$

qui converge absolument et uniformément dans chaque domaine fermé situé dans le demi-plan $x < x_a(f)$. On peut donc intervertir le signe de sommation et celui d'intégration dans la dernière expression des égalités ci-dessus. Il s'ensuit que

$$(3.11) \qquad f(z) = \int_1^\infty \frac{F(t+z)}{W(t)} dt, \qquad \mathcal{R}(z) < x_a(f).$$

Si, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$,

$$|F(x_0 + iy_0 + x + iy)| < W(x - \varepsilon)$$

dans la demi-bande $|y| \leqq \delta_1$, $x \geqq X_0$, l'intégrale du second membre de (3.11) converge uniformément pour les valeurs de z dans une demi-bande $|y - y_0| \leqq \delta_1$, $x \leqq x_0 + \delta_2$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, et elle donne donc la valeur de $f(z)$, prolongée horizontalement, dans cette bande. On obtient ainsi la proposition suivante :

THÉORÈME 3.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale* [1] *de $f(z)$, $F(z)$ est au moins de l'ordre linéaire de $W(x - x_0)$ sur $y = y_0$.*

Démonstration. — Quel que soit $\varepsilon_n > 0$, il existe un point (ξ_n, η_n) dans l'intervalle $|x - x_0| < \varepsilon_n$, $|y - y_0| < \varepsilon_n$ tel que pour chaque $C_n > 0$ et $\varepsilon'_n > 0$ il existe un $\bar{\xi}_n > C_n$ vérifiant

$$|F(\xi_n + i\eta_n + \bar{\xi}_n)| > W(\bar{\xi}_n - \varepsilon'_n).$$

---

(1) *Voir* [1, p. 184].

Choisissons convenablement deux suites décroissantes $\{\varepsilon_n\}$ et $\{\varepsilon'_n\}$ tendant vers zéro et une suite croissante $\{C_n\}$ tendant vers l'infini et posons

$$z_n = x_n + iy_n = \xi_n + \bar{\bar{\xi}}_n + i\eta_n.$$

Nous avons donc

$$(3.12) \qquad |F(z_n)| > W(x_n - x_0 - o(1)), \qquad x_n \to \infty, y_n \to y_0,$$

et le théorème est ainsi démontré.

Remarque. — Pour construire la fonction $V(x)$, M. Valiron [10, f] a utilisé $\log M(x, F)$ au lieu de $\log \mu(x, F)$. Dans ce cas, $F(z)$ est de l'ordre linéaire de $W(x)$ et l'on a

$$V(x) \geqq \log M(x, F),$$

l'égalité étant vérifiée pour une suite de x tendant vers l'infini. Les inégalités (3.5), (3.6) et (3.8) restent les mêmes, mais (3.10) est remplacée par

$$-D \leqq x_a(f) \leqq D.$$

On trouve que $f(z)$ n'a pas de points singuliers dans le demi-plan $x < 0$ et que le théorème 3.1 reste encore valable.

4. *Droites de Borel de* $F(z)$ *d'ordre linéaire positif.* — Soit Δ, $y = y_0$, une droite horizontale. Désignons par $n(k, \Delta, \delta, \Phi - Z)$ le nombre de zéros de $\Phi(z) - Z$ appartenant à la demi-bande $|y - y_0| < \delta$, $x < k$, $\delta > 0$. Dans le cas où *l'ordre linéaire* τ *de* $\Phi(z)$ *est fini positif*, la droite Δ est dite une *droite de Borel* si, quels que soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, dès que $k \geqq k_0(\delta, \varepsilon, Z)$,

$$n(k, \Delta, \delta, \Phi - Z) \geqq e^{k(\tau - \varepsilon)}$$

pour tous les Z sauf deux au plus (l'infini compris). Dans le cas de l'*ordre linéaire infini*, on suppose que $\Phi(z)$ est *au plus de l'ordre linéaire de* $U(x + K)$, $K = const. \geqq 0$, et *au moins de l'ordre linéaire de* $U(x)$. La droite Δ est dite une *droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $\log U(x - h)$, $h = const. > -K$, si, quels que soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, dès que $k \geqq k_0(\delta, \varepsilon, Z)$,

$$n(k, \Delta, \delta, \Phi - Z) \geqq \log U(k - h - \varepsilon)$$

pour tous les Z sauf deux au plus (l'infini compris). Considérons la fonction entière $F(z)$ de l'ordre linéaire $\tau > 0$. Suivant $\tau < \infty$ ou $\tau = \infty$, on établit, en appliquant le théorème 3.1, les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 4.1. — *Si* $\tau < \infty$ *et si* $z_0 = x_0 + iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $f(z)$, *il existe dans la bande* $|y - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$ *une droite de Borel de* $F(z)$, $y = y'$, $y' = const.$, *jouissant de cette propriété : on peut trouver une suite de cercles* Γ_n, $|z - z_n| = o(1)$, *où* $z_n = x_n + iy'$, $x_n \to \infty$, *tels que dans* Γ_n *la fonction* $F(z)$ *prend au moins*

$$e^{x_n(\tau + \varepsilon_n)}, \qquad \varepsilon_n = o(1), \qquad \varepsilon_n = \varepsilon_n(Z),$$

fois chaque valeur de Z pour laquelle

$$\log |Z| < e^{x_n(\tau - o(1))}, \qquad \log |Z - Z_n| > e^{-x_n(\tau - o(1))},$$

les points Z_n tendant vers une limite lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. — Considérons la transformation

$$(T_\alpha) \qquad \zeta = e^{\alpha(z - z_0)}, \qquad 0 < \alpha < \tau,$$

qui transforme la bande $|y - y_0| < \frac{\pi}{2\alpha}$ dans un angle d'ouverture π dans le plan des ζ, Posons

$$\Phi(\zeta) = F(z), \qquad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$$

et désignons par $\overline{M}(\rho, \Phi)$ le maximum de $|\Phi(\zeta)|$ sur la partie du cercle $|\zeta| = \rho$ dans l'angle d'ouverture π mentionné ci-dessus. On a

$$(4.1) \quad \overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(\rho, \Phi)}{\log \rho} \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, F)}{\alpha(x - x_0)} \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log V(x + D + \varepsilon)}{\alpha(x - x_0)} = \frac{\tau}{\alpha}.$$

D'autre part, le théorème 3.1 entraîne

$$(4.2) \quad \overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(\rho, \Phi)}{\log \rho} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log |F(z_n)|}{\alpha(x_n - x_0)} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log V(x_n - x_0 - o(1))}{\alpha(x_n - x_0)} = \frac{\tau}{\alpha}.$$

Donc la fonction $\Phi(\zeta)$ est d'orde $\frac{\tau}{\alpha} > 1$ dans l'angle considéré. En appliquant à $\Phi(\zeta)$ un théorème de M. Valiron [10, *e*] et en revenant à $F(z)$ par la transformation (T_α), on voit qu'il existe une suite de cercle $\Gamma_{p\alpha}$, $|z - z_{p\alpha}| \leqq \omega_{p\alpha}$, $\omega_{p\alpha} = o(1)$, où $z_{p\alpha} = x_{p\alpha} + iy'_\alpha$, $x_{p\alpha} = \text{const.}$, $|y'_\alpha - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}$, tels que $F(z)$ prend dans ces cercles au moins

$$e^{x_{p\alpha}(\tau + \varepsilon_{p\alpha})}, \qquad \varepsilon_{p\alpha} = o(1), \qquad \varepsilon_{p\alpha} = \varepsilon_{p\alpha}(Z)$$

fois chaque valeur Z pour laquelle

$$\log |Z| < e^{x_{p\alpha}(\tau + \varepsilon_{p\alpha})}, \qquad \log |Z - Z_{p\alpha}| > e^{-x_{p\alpha}(\tau + \varepsilon_{p\alpha})},$$

$Z_{p\alpha}$ tendant vers une limite lorsque $p \to \infty$.

S'il existe une valeur de α pour laquelle $|y'_\alpha - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$, notre théorème est démontré. Sinon, on verra qu'il existe une suite de cercles dont les centres sont représentés sur $y = y_0 + \frac{\pi}{2\tau}$ ou $y = y_0 - \frac{\pi}{2\tau}$ et qui jouissent de la propriété exigée. Dans ce cas, en effet, correspondant à une suite croissante positive $\{\alpha_j\} \to \tau$, il existe des suites de cercles $\Gamma_{p\alpha_j}$, $|z - z_{p\alpha_j}| \leqq \omega_{p\alpha_j}$ dont les coordonnées des centres tendent vers $y_0 + \frac{\pi}{2\tau}$ ou $y_0 - \frac{\pi}{2\tau}$ lorsque $\alpha_j \to \tau$. Supposons que $y_0 + \frac{\pi}{2\tau}$ est une limite de ces coordonnées. Choisissons une suite croissante positive $\{s_j\} \to \infty$ et une suite positive $\{\delta_j\} \to 0$. Il existe dans la suite de cercles $\Gamma_{p\alpha_j}$, $(p=1, 2, \ldots)$, un cercle $\Gamma_{p(s_j)\alpha_j}$ dont l'abscisse du centre est plus grand que s_j et pour lequel $\omega_{p(s_j)\alpha_j}$ et $|\varepsilon_{p(s_j)\alpha_j}|$ sont plus petits que δ_j (¹). On obtient ainsi une suite de cercles $T_{p(s_j)\alpha_j}$, $|z - z_{p(s_j)\alpha_j}| \leqq \omega_{p(s_j)\alpha_j}$, $\omega_{p(s_j)\alpha_j} = o(1)$, $(j=1, 2 \ldots)$, dont les abscisses et les coordonnées des centres tendent vers l'infini et $y_0 + \frac{\pi}{2\tau}$ respectivement et dans lesquels $F(z)$ prend au moins $\exp[x_{p(s_j)\alpha_j}(\tau + \varepsilon_{p(s_j)\alpha_j})]$, $\varepsilon_{p(s_j)\alpha_j} = o(1)$, $\varepsilon_{p(s_j)\alpha_j} = \varepsilon_{p(s_j)\alpha_j}(Z)$, fois chaque valeur Z pour laquelle

$$\log|Z| < \exp[x_{p(s_j)\alpha_j}(\tau + \varepsilon_{p(s_j)\alpha_j})], \qquad \log|Z - Z_{p(s_j)\alpha_j}| > -\exp[x_{p(s_j)\alpha_j}(\tau + \varepsilon_{p(s_j)\alpha_j})].$$

Construisons les cercles les plus petits dont les centres sont sur la droite $y = y_0 + \frac{\pi}{2\tau}$ et qui contiennent respectivement un des cercles $\Gamma_{p(s_j)\alpha_j}$, $(j=1, 2 \ldots)$. Ceci achève la démonstration de notre théorème.

THÉORÈME 4.2. — *Si $\tau = \infty$ et si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$, la droite $y = y_0$ est une droite de Borel de* $F(z)$ *au moins de l'ordre linéaire de* $V(x - x_0)$, *jouissant de cette propriété : quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe une suite de cercles Γ_n : $|z - z_n| < \frac{h x_n}{\log V(x_n - x_0 - \varepsilon)}$, $x_n \to \infty$, $y_n \to y_0$, $h > 0$, tels que dans Γ_n,* $F(z)$ *prend au moins* $V(x_n - x_0 - \varepsilon)$ *fois chaque valeur Z pour laquelle*

$$\log|Z| < V(x_n - x_0 - \varepsilon), \qquad \log|Z - Z_n| > -V(x_n - x_0 - \varepsilon),$$

les points Z_n tendant vers une limite lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. — Désignons par $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ les points z_n dans la démonstration du théorème 3.1 et employons les autres notations du n° 3. Supposons qu'il existe deux nombres C et C′ tels que

$$\log|C| < V(\xi_n - x_0 - \varepsilon), \qquad \log|C'| < V(\xi_n - x_0 - \varepsilon),$$
$$\log|C - C'| > -V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$$

et que le nombre des zéros de $F(z) - C$ et $F(z) - C'$ dans le cercle $|z - (\zeta_n - l)| < \frac{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$ soit inférieur à $V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$, où $l = D + x_0 + 2\varepsilon$ (¹). Appliquons une extension du théorème de Schottky due à M. Valiron [10, *g*] avec $\tau = \frac{1}{4}$ et $r = \frac{3}{4}$ (²) dans le cercle

$$\left| z - \left[\zeta_n - l - \frac{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{5 \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)} \right] \right| < \frac{4h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{5 \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}.$$

(¹) On voit que pour un α, $|\varepsilon_{p\alpha}|$ tend vers zéro uniformément pour tous les Z considérés puisque $\varepsilon_{p\alpha} = \alpha\eta_{p\alpha}(Z) - \frac{\tau x_0}{x_{p\alpha}} - \frac{\alpha x_0 \eta_{p\alpha}(Z)}{x_{p\alpha}}$. *Voir* [10, *b*].

(¹) Remarquons que nous avons $x_0 \geqq -D$.

(²) On utilise ici les notations du *Mémorial* cité.

Puisque
$$\log M(\xi_n - l, F) < V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$$
pour n assez grand, nous avons, pour n assez grand,
$$\begin{aligned}\log|F(z)| &< \alpha V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \beta V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \gamma V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \delta \\ &< (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1) V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)\end{aligned}$$
dans le cercle concentrique de rayon $\dfrac{3h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{5\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$, où α, β, γ, δ sont des constantes numériques positives. Ensuite appliquons le même théorème avec le même τ et r au premier cercle. On trouve que, dans le cercle concentrique avec rayon $\dfrac{3h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{4\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$,
$$\begin{aligned}\log|F(z)| &< \alpha V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \beta V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1) V(\xi_n - x_0 - \varepsilon) + \delta \\ &< (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)^2 V(\xi_n - x_0 - \varepsilon).\end{aligned}$$
Appliquons de nouveau cette extension du théorème de Schottky au cercle
$$\left| z - \left[\frac{\zeta_n - l + h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{2\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}\right]\right| < \frac{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}.$$
s'il existe deux nombres C_1 et C'_1 vérifiant les mêmes inégalités que C et C′ tels que le nombre des zéros de $F(z) - C_1$ et $F(z) - C'_1$ dans ce cercle soit inférieur à $V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$, et ainsi de suite. On aura les deux possibilités suivantes :

1° $z_n = x_n + iy_n$ se trouvant entre ζ_n et $\zeta_n - l$ sur le segment joignant ces deux points, il existe un cercle $|z - z_n| < \dfrac{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{\log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}$ dans lequel $F(z)$ prend au moins $V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)$ fois chaque valeur Z vérifiant
$$\log|Z| < V(\xi_n - x_0 - \varepsilon), \qquad \log|Z - Z_n| > - V(\xi_n - x_0 - \varepsilon).$$
Puisque $x_n - x_0 - \varepsilon < \xi_n - x_0 - \varepsilon < x_n$, on trouve, à plus forte raison, que dans le cercle Γ_n, $|z - z_n| < \dfrac{hx_n}{\log V(x_n - x_0 - \varepsilon)}$, $F(z)$ prend au moins $V(x_n - x_0 - \varepsilon)$ fois chaque valeur Z vérifiant
$$\log|Z| < V(x_n - x_0 - \varepsilon), \qquad \log|Z - Z_n| > - V(x_n - x_0 - \varepsilon).$$

2° Nous aurons
$$\log|F(\zeta_n)| < (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)^p V(\xi_n - x_0 - \varepsilon),$$
où
$$p = 1 + \frac{l \log V(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{h(\xi_n - x_0 - \varepsilon)} = 1 + \frac{l\,\Phi(\xi_n - x_0 - \varepsilon)}{h}.$$
En tenant compte du théorème 3.1, il s'ensuit que
$$V(\xi_n - x_0 - o(1)) < (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)^p V(\xi_n - x_0 - \varepsilon).$$
Donc
$$\frac{\exp[(\xi_n - x_0 - o(1))\,\Phi(\xi_n - x_0 - o(1))]}{\exp\left\{\left[\xi_n - x_0 - \varepsilon + \dfrac{l\log(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)}{h}\right]\Phi(\xi_n - x_0 - \varepsilon)\right\}} < \alpha + \beta + \gamma + \delta + 1.$$

Choisissant h tel que $x_0 + \varepsilon - \frac{l \log(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}{h} > x_0$, nous trouvons que l'inégalité ci-dessus est impossible si n est assez grand car, $\Phi(x)$ étant indéfiniment croissante, le premier membre de cette inégalité tend vers l'infini avec n.

Notre théorème est démontré en supprimant certains des cercles Γ_n dans 2° tels que pour la nouvelle suite des cercles, Z_n tendent vers une limite.

Les théorèmes 4.1 et 4.2 montrent que, dans le cas $\tau > 0$, chaque sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$ correspond à une droite de Borel de $F(z)$. La formule de M. M. Riesz [1, p. 185] donne l'abscisse de l'étoile horizontale de $f(z)$ appartenant à chaque droite horizontale; elle donne donc des renseignements sur les droites de Borel de $F(z)$. D'ailleurs, de certains théorèmes sur les singularités des fonctions définies par des séries de Dirichlet, on peut tirer des théorèmes sur les droites de Borel de $F(z)$. On en énonce ici quelques-uns, dont les démonstrations sont immédiates :

$\Omega(\lambda_n)$ étant supérieur à zéro, un théorème de M. C. Biggeri [2, *a*] entraîne le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Si les parties réelles de a_n ne sont pas négatives et si les arguments φ_n de a_n sont tels que*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[\lambda_n]{\cos\varphi_n} = 1,$$

$F(z)$ *admet, dans le cas $0 < \tau < \infty$, une droite de Borel dans la bande, $|y| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$, et, dans le cas $\tau = \infty$, $y = 0$ comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x - x_a)$, $x_a = x_a(f)$.*

Le théorème suivant résulte d'un théorème de MM. Polya-Bernstein [1, p. 140] :

THÉORÈME 4.4. — *Si $\{\lambda_n\}$ est une suite à densité maximum finie Δ et à indice de condensation nul, $F(z)$ admet dans le cas $0 < \tau < \infty$, une droite de Borel dans chaque bande horizontale de largeur $\left(2\Delta + \frac{1}{\tau}\right)\pi$, et, dans le cas $\tau = \infty$, une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x - x_a)$ dans chaque bande horizontale de largeur $2\Delta\pi$.*

En posant $\Delta = 0$ dans le théorème précédent, on obtient un théorème correspondant à une généralisation d'un théorème de MM. Hadamard-Fabry.

Un théorème de MM. Paley-Zygmund [7] conduit à la proposition suivante :

THÉORÈME 4.5. — *Pour presque toutes les suites $\{\nu_n\}$, $|\nu_n| = 1$ et $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, les fonctions $\Sigma a_n \nu_n e^{\lambda_n z}$ et $\Sigma a_n \varepsilon_n e^{\lambda_n z}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ admettent, dans le cas $0 < \tau < \infty$, une droite de Borel dans chaque bande horizontale de largeur $\frac{\pi}{\tau}$ et, dans le cas $\tau = \infty$, chaque droite horizontale comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x - x_0)$, x_0 étant l'abscisse de convergence de*

$$\Sigma |a_n|^2 \Omega^2(\lambda_n) e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Remarque. — En examinant les raisonnements, on voit que si l'on utilise la fonction $V(x)$ construite au moyen de $M(x, F)$ au lieu de $\mu(x, F)$, les théorèmes 4.1-4.4 sont encore valables, mais le théorème 4.5 ne peut plus se démontrer.

5. *La comparaison des droites de Borel de* $F(z)$ *et celles de ses transformées de Cramér.* — On considère la transformée de Cramér [1, chap. III] de $F(z)$

$$(5.1) \qquad \Psi(z) = \Sigma a_n \theta(\lambda_n) e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $\theta(z)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan pour laquelle il existe une constante non négative k tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a, pour $|z|$ et n suffisamment grands

$$(5.2) \qquad \log|\theta(z)| < (k+\varepsilon)|z|, \qquad \log|\theta(\lambda_n)| > -(k+\varepsilon)\lambda_n.$$

(1.5) et (5.2) entrainent que la série (5.1) est absolument convergente partout et que $\Psi(z)$ *définit une fonction entière.*

En utilisant les notations du n° 1 et en tenant compte de (5.2), on trouve que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$(5.3) \qquad \mu(x, F) < \mu(x+k+\varepsilon, \Psi), \qquad \mu(x, \Psi) < \mu(x+k+\varepsilon, F),$$

dès que x est assez grand. Par conséquent, en vertu de (1.6) et (1.8), on a

$$(5.4) \quad M(x, F) < M(x+D+k+\varepsilon, \Psi), \qquad M(x, \Psi) < M(x+D+k+\varepsilon, F)$$

dès que x est assez grand.

$V(x)$ étant définie comme dans le n° 3, les inégalités (3.1), (3.2) et (5.3) entraînent que $\Psi(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $W(x-k)$ *et au plus de l'ordre linéaire de* $W(x+D+k)$. *Dans le cas de l'ordre linéaire fini*, $F(z)$ *et* $\Psi(z)$ *sont du même ordre* τ.

A la fonction $\Psi(z)$ on associe

$$(5.5) \qquad \psi(z) = \Sigma a_n \theta(\lambda_n)\, \Omega(\lambda_n)\, e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui est évidemment une transformée de Cramér de $f(z)$ et dont l'abscisse de convergence absolue $x_a(\psi)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$(5.6) \qquad |x_a(f) - x_a(\psi)| \leqq k.$$

Si $\bar{z}_0 = \bar{x}_0 + i\bar{y}_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\psi(z)$, il existe, dans le cercle $|z - \bar{z}_0| \leqq k$ un point singulier ou un point de l'espace lacunaire de $f(z)$. Il existe donc dans l'ensemble

$$(5.7) \qquad E(z; |z-\bar{z}_0| \leqq k) + E(z; x_a(f) \leqq x \leqq \bar{x}_0, |y - \bar{y}_0| \leqq k)$$

un sommet $z_0 = x_0 + iy_0$ de l'étoile horizontale de $f(z)$.

Si, en outre, dans un secteur

$$(5.8) \qquad |\arg z| \leqq \alpha \qquad \left(0 < \alpha = \text{const.} \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

$\theta(z)$ ne s'annule pas et vérifie, pour $|z|$ suffisamment grand,

$$\log|\theta(z)| > -(k+\varepsilon)|z|, \tag{5.9}$$

$f(z)$ est une transformée de Cramér généralisée [1, p. 71] de $\psi(z)$. Dans ce cas, $z_0 = x_0 + iy_0$ étant un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $f(z)$, il existe dans l'ensemble

$$\mathrm{E}(z;\, |z - z_0| \leqq k) + \mathrm{E}(z;\, x_a(\psi) \leqq x \leqq x_0,\, |y - y_0| \leqq k) \tag{5.10}$$

un sommet de l'étoile horizontale de $\psi(z)$.

On remarque que si $k = 0$, (5.7) et (5.10) deviennent deux segments et les étoiles horizontales de $f(z)$ et de $\psi(z)$ coïncident.

Comme on a fait pour $f(z)$, on peut écrire

$$\psi(z) = \int_1^\infty \frac{\Psi(t+z)}{\mathrm{W}(t)}\, dt, \qquad \mathcal{R}(z) < x_a(\psi). \tag{5.11}$$

On en conclut que, $\bar{z}_0 = \bar{x}_0 + i\bar{y}_0$ *étant un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $\psi(z)$, *la fonction* $\Psi(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $\mathrm{W}(x - \bar{x}_0)$ *sur la droite* $y = \bar{y}_0$. On établit, comme dans le n° 4, les deux propositions suivantes :

Théorème 5.1. — *Si* $\mathrm{F}(z)$ *et sa transformée de Cramér* $\Psi(z)$ *sont d'ordre linéaire fini* $\tau > 0$ *et si* $\bar{z}_0 = \bar{x}_0 + i\bar{y}_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $\psi(z)$, $\mathrm{F}(z)$ *admet une droite de Borel dans la bande*

$$|y - \bar{y}_0| \leqq k + \frac{\pi}{2\tau},$$

et $\Psi(z)$ *admet une droite de Borel dans la bande* $|y - \bar{y}_0| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$.

Si, en outre, dans un secteur (5.8), $\theta(z)$ *ne s'annule pas et vérifie* (5.9) *pour* $|z|$ *assez grand et si* $z_0 = x_0 + iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $f(z)$, $\mathrm{F}(z)$ *admet une droite de Borel dans la bande* $|y - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$ *et* $\Psi(z)$ *admet une droite de Borel dans la bande* $|y - y_0| \leqq k + \frac{\pi}{2\tau}$.

Théorème 5.2. — *Si* $\mathrm{F}(z)$ *et sa transformée de Cramér* $\Psi(z)$ *sont d'ordre linéaire infini et si* $\bar{z}_0 = \bar{x}_0 + i\bar{y}_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $\psi(z)$, $\mathrm{F}(z)$ *admet dans la bande* $|y - \bar{y}_0| \leqq k$ *une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $\mathrm{V}(x - \bar{x}_0 - k)$ *et* $\Psi(z)$ *admet* $y = \bar{y}_0$ *comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $\mathrm{V}(x - \bar{x}_0)$.

Si, en outre, dans un secteur (5.8), $\theta(z)$ *ne s'annule pas et vérifie* (5.9) *pour* $|z|$ *assez grand et si* $z_0 = x_0 + iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $f(z)$, $\mathrm{F}(z)$ *admet* $y = y_0$ *comme une droite de Borel au moins de l'ordre* *linéaire de* $V(x-x_0)$ *et* $\Psi(z)$ *admet dans la bande* $|y-y_0|\leqq k$ *une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x-x_0-k)$.

La dérivée d'ordre m de $F(z)$:

$$F^{(m)}(z)=\Sigma a_n\lambda_n^m e^{\lambda_n z}\qquad (n=1,\,2,\,\ldots),\tag{5.12}$$

est évidemment une transformée de Cramér de $F(z)$ avec $k=0$. Les étoiles horizontales de $f(z)$ et de $f^{(m)}(z)$ coïncident. En appliquant les résultats précédents, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3. — *Si* $z_0=x_0+iy_0$ *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $f(z)$ *et si* $0<\tau<\infty$, $F(z)$ *et toutes ses dérivées admettent une droite de Borel dans la bande* $|y-y_0|\leqq\frac{\pi}{2\tau}$; *si au contraire* $\tau=\infty$, $y=y_0$ *est une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x-x_0)$ *de* $F(z)$ *et de toutes ses dérivées.*

6. *Fonctions entières associées à certaines séries de Dirichlet ayant une abscisse de convergence absolue.* — Étant données certaines séries de Dirichlet ayant une abscisse finie de convergence absolue, on peut leur associer des séries de Dirichlet absolument convergentes partout telles qu'un sommet à distance finie de l'étoile horizontale des séries données correspond à une droite de Borel des fonctions entières d'ordre linéaire positif définies par des séries associées. Cela posé, connaissant l'étoile horizontale de certaines séries de Dirichlet, on peut construire des fonctions entières ayant des droites de Borel correspondant à cette étoile horizontale. On donne ci-dessus une méthode pour construire des fonctions entières associées.

Étant donnée une série de Dirichlet

$$g(z)=\Sigma b_n e^{\lambda_n z}\qquad (n=1,\,2,\,\ldots),\tag{6.1}$$

ayant une abscisse finie de convergence absolue $x_a(g)=C$, λ_n vérifiant (1.2), on voit que, en posant $|b_n|=B_n$,

$$-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log B_n}{\lambda_n}-D\leqq C\leqq-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log B_n}{\lambda_n}.\tag{6.2}$$

Soit $V_1(t)$ une fonction croissante continue définie pour $t\geqq 1$ et telle que

$$V_1(x)\geqq e^{kx},\qquad k=\text{const.}>0\tag{6.3}$$

pour x assez grand. On voit que

$$\Omega_1(u)=\int_1^\infty\frac{e^{ut}}{W_1(t)}\,dt<\infty,\qquad W_1(t)=e^{V_1(t)},\tag{6.4}$$

pour tout $u\geqq 0$ et que $\frac{V_1(x)}{x}$ tend vers l'infini avec x. On suppose toujours dans ce paragraphe que $\frac{V_1(x)}{x}$ est non décroissante. D'ailleurs, on a $V_1(x) > x^2$ pour x assez grand. En désignant par $\nu_1(u)$ le maximum de $\frac{e^{ut}}{W_1(t)}$, $\Omega_1(u)$ vérifie les inégalités

$$\frac{\nu_1(u)}{2u} < \Omega_1(u) < 2u\nu_1(u) \tag{6.5}$$

dès que u est assez grand.

Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Omega_1(\lambda_n)}{\lambda_n \log \lambda_n} > 0 \text{ [1]},$$

et si l'on ne peut pas tirer de la suite $\{\lambda_n\}$ une suite λ_{n_p} telle que

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log \lambda_{n_{p+1}}}{\log \lambda_{n_p}} = 1, \tag{6.6}$$

on construit une suite croissante $\{\overline{\lambda}_n\}$ par l'interpolation des nombres dans la suite $\{\lambda_n\}$ telle que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\overline{\lambda}_n} = H < \infty, \tag{6.7}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \overline{\lambda}_{n+1}}{\log \overline{\lambda}_n} = 1. \tag{6.8}$$

Par exemple, on peut insérer tous les nombres entiers positifs dans $\{\lambda_n\}$ et l'on a $D \leqq H \leqq D + e^{-1}$.

Posons $\{\mu_n\} = \{\lambda_n\}$ ou $\{\overline{\lambda}_n\}$, et $K = D$ ou H suivant que nous introduisons $\{\overline{\lambda}_n\}$ ou non. Construisons la *fonction entière*

$$\Phi(z) = \sum \frac{e^{\mu_n z}}{\Omega_1(\mu_n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

En effet, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on aura, pour $n \geqq n_0$, n_0 étant assez grand, u étant arbitraire, $x \geqq 1$,

$$\frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} < \frac{2\mu_n e^{\mu_n x}}{\nu_1(\mu_n)} < \frac{e^{\mu_n(x+\varepsilon)}}{e^{\mu_n u}} W_1(u).$$

En prenant $u = x + \varepsilon$, on obtient, pour $n \geqq n_0$,

$$\frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} < W_1(x+\varepsilon).$$

Par conséquent

$$\sum \frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} = \sum \frac{e^{\mu_n(x+K+\varepsilon)}}{\Omega_1(\mu_n)} e^{-\mu_n(K+\varepsilon)} < W_1(x+K+2\varepsilon) \sum e^{-\mu_n(K+\varepsilon)} < W_1(x+K+3\varepsilon)$$
$$(n = n_0, n_0+1, \ldots).$$

---

[1] Dans ce cas, la fonction entière définie par $\sum \left[\frac{e^{\lambda_n z}}{\Omega_1(\lambda_n)}\right]$, $(n = 1, 2, \ldots)$, n'est pas d'ordre linéaire infini (*Voir* le théorème (2.1)).

On en conclut que, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\Phi(x) < W_1(x+K+\varepsilon) \quad \text{pour} \quad x > x(\varepsilon).$$

D'autre part, quels que soient x et $\varepsilon > 0$, on aura

$$\Phi(x) > \frac{e^{\mu_n x}}{\Omega_1(\mu_n)} > \frac{e^{\mu_n x}}{2\mu_n \nu_1(\mu_n)} > \frac{e^{\mu_n(x-\varepsilon)}}{\nu_1(\mu_n)}, \qquad \nu_1(\mu_n) = \frac{e^{\mu_n t_n}}{W_1(t_n)},$$

pour n assez grand. Puisque t_n croît indéfiniment avec n, il existe une suite de valeurs indéfiniment croissantes de x telle que

$$\Phi(x) > W_1(x-\varepsilon), \qquad \varepsilon(x) > 0, \qquad \lim \varepsilon(x) = 0.$$

Considérons la fonction

$$G(z) = \sum \frac{b_n}{\Omega_1(\lambda_n)} e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.10}$$

qui *est aussi une fonction entière*. En effet, on vérifie que, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$M(x, G) < \Phi(x - C + \varepsilon) < W_1(x - C + K + 2\varepsilon)$$

pour x assez grand et que, pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de x,

$$M(x, G) > W_1(x - C - D - \varepsilon) > \Phi(x - C - D - K - 2\varepsilon), \quad \varepsilon(x) > 0, \quad \lim \varepsilon(x) = 0.$$

Donc $G(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $\Phi(x - C - D - K)$ *et au plus de l'ordre linéaire de* $\Phi(x - C)$. D'ailleurs, on voit que

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log V_1(x)}{x} \geqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, G)}{x} = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log \Phi(x)}{x} \geqq \underline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log V_1(x)}{x} \geqq k > 0.$$

Si $\mathcal{R}(z) < C$, on pourra écrire

$$g(z) = \int_1^{\infty} \frac{G(t+z)}{W_1(t)} dt. \tag{6.11}$$

Pareillement, pour chaque $k > 0$,

$$\Sigma e^{-\mu_n(K+k)} = \int_1^{\infty} \frac{\Phi(t - K - k)}{W_1(t)} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.12}$$

Donc si

$$|G(x_0 + iy_0 + x + iy)| < \Phi(x - K - k)$$

dans la demi-bande $|y| \leqq \varepsilon$, $x \geqq X_0$, $\varepsilon > 0$, on pourra prolonger $g(z)$ le long de la demi-droite $y = y_0$, $x < x_0$. Comme dans le n° 3, il en résulte que :

THÉORÈME 6.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $g(z)$, la fonction* $G(z)$ *est au moins de l'ordre linéaire de* $\Phi(x - K - x_0)$ *sur la droite $y = y_0$.*

En utilisant ce théorème, on démontre les deux propositions suivantes :

THÉORÈME 6.2. — *Si* $G(z)$ *est d'ordre linéaire fini $\tau > 0$ et si $z_0 = x_0 + iy_0$ est* *un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $g(z)$, il existe une droite de Borel de* $G(z)$ *dans la bande* $|y - y_0| = \frac{\pi}{2\tau}$ *pourvu que*

$$\lim_{u=\infty} \frac{\Omega_1(u)}{u \log u} \tag{6.13}$$

existe.

En vertu de (6.6), (6.7) et du théorème 2.3, $\Phi(z)$ est à croissance linéaire régulière. La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème 4.1, à condition que (4.1) et (4.2) sont remplacés par les inégalités suivantes :

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(\rho, \Phi_1)}{\log \rho} \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, G)}{\alpha(x - x_0)} < \lim_{x=\infty} \frac{\log\log \Phi(x - C - \varepsilon)}{\alpha(x - x_0)} = \frac{\tau}{\alpha},$$

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(\rho, \Phi_1)}{\log \rho} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log |G(z_n)|}{\alpha(x_n - x_0)} \geqq \lim_{n=\infty} \frac{\log\log \Phi(x_n - K - x_0 - o(1))}{\alpha(x_n - x_0)} = \frac{\tau}{\alpha},$$

où $\Phi_1(\zeta)$ correspond à la fonction $\Phi(\zeta)$ dans la démonstration citée.

THÉORÈME 6.3. — *Si* $G(z)$ *est d'ordre linéaire infini et si* z_0 *est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de* $g(z)$, *la fonction* $G(z)$ *admet* $y = y_0$ *comme une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $\log \Phi(x - K - x_0)$ *pourvu que*

$$\frac{\log\log \Phi(x)}{x} \tag{6.14}$$

soit non décroissante (1).

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.2. Mais dans ce cas on commence par un cercle de centre $x_n - K - x_0 + C - 2\varepsilon$ et de rayon $\dfrac{h(x_n - K - x_0 - 2\varepsilon)}{\log\log \Phi(x_n - K - x_0 - 2\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$.

Remarque. — On peut étudier la question traitée dans ce numéro sans introduire $\Phi(z)$. En effet, on choisit $V_1(t)$ vérifiant, en plus de (6.3), les conditions suivantes :

$$\int^{\infty} \frac{W_1(t - D - h)}{W_1(t)} dt < \infty \qquad \text{pour tout } h > 0;$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log V_1(x)}{x} \text{ existe};$$

$$\frac{\log V_1(x)}{x} \text{ est non décroissante si la dernière limite} = \infty.$$

En prenant

$$\Omega_1(u) = \int_{C+1}^{\infty} \frac{e^{ut}}{W_1(t - C)} dt,$$

(1) L'énoncé de ce théorème dans ma Note aux *Comptes rendus* (228, 1949, p. 641-643) n'est pas complet.

on trouve que $G(z)$ est au plus de l'ordre linéaire de $W_1(x - C + D)$ et au moins de l'ordre linéaire de $W_1(x - C - D)$ et que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log V_1(x)}{x} = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x, G)}{x}.$$

En comparant les deux intégrales

$$g(z) = \int_{C+1}^{\infty} \frac{F(t+z)}{W_1(t-C)} dt, \qquad \int^{\infty} \frac{W_1(t - C - D - h)}{W_1(t-C)} dt,$$

on établit les théorèmes analogues aux théorèmes 6.2 et 6.3. Dans ce cas, on supprimera, dans le théorème 6.2, la condition que (6.13) existe, et, dans le théorème 6.3, la condition que (6.14) est non décroissante; $y = y_0$ sera dans ce dernier théorème une droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de $V(x - C - D - x_0)$.

7. *Applications d'une méthode de sommation de M. M. Riesz.* — On peut appliquer une méthode de sommation de M. M. Riesz [1, p. 184] à l'étude des droites de Borel des fonctions entières d'ordre linéaire fini positif définies par certaines séries de Dirichlet absolument convergentes partout, On traite d'abord la question du n° 6 et l'on utilise les notations précédentes.

Considérons la série

$$(7.1) \qquad \mathcal{E}_\tau(z) = \sum \frac{e^{\mu_n z}}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu_n}{\tau}\right)}, \qquad 0 < \tau < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui définit une *fonction entière d'ordre linéaire* τ, *à croissance linéaire régulière*. En effet, on a, d'après la formule de Stirling,

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log\Gamma\left(1 + \frac{\mu_n}{\tau}\right)}{\mu_n} = -\infty, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{-\log\Gamma\left(1 + \frac{\mu_n}{\tau}\right)}{\mu_n \log \mu_n} = -\frac{1}{\tau}.$$

(1.5) et le théorème 2.3 établissent notre affirmation.

A la fonction $g(z)$ on associe

$$(7.2) \qquad \mathcal{G}_\tau(z) = \sum \frac{b_n e^{\lambda_n z}}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda_n}{\tau}\right)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On voit également qu'elle définit une *fonction entière d'ordre linéaire* τ.

Pour $\mathcal{R}(z) < C$, on pourra écrire

$$(7.3) \qquad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \mathcal{G}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt.$$

Pareillement, on a, pour chaque $k > 0$,

$$(7.4) \qquad \Sigma e^{-\mu_n(K+k)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \mathcal{E}_\tau\left(-K - k + \frac{t}{\tau}\right) e^t dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comparant (7.3) et (7.4), on établit, comme dans le n° 6, le théorème suivant :

Théorème 7.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $g(z)$, il existe une droite de Borel de $\mathcal{G}_\tau(z)$ dans la bande $|y - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$.*

Réciproquement, étant donnée une fonction entière du type 1 de l'ordre linéaire fini $\tau > 0$ définie par une série de Dirichlet absolument convergente partout

$$\overline{\mathcal{G}}_\tau(z) = \Sigma c_n e^{\lambda_n z}, \qquad |c_n| = C_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7.5}$$

où (1.2) est vérifiée avec $D = 0$, on lui associera une autre série. Le corollaire 2.1 montre que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lambda_n}{\tau e} (\sqrt[\lambda_n]{C_n})^\tau = 1. \tag{7.6}$$

Considérons la série

$$\overline{g}(z) = \Sigma c_n \Gamma_n \left(1 + \frac{\lambda_n}{\tau}\right) e^{\lambda_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7.7}$$

En vertu de la formule de Stirling et de (7.6) on trouve que

$$x_a(\overline{g}) = -\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log C_n \Gamma\left(1 + \frac{\lambda_n}{\tau}\right)}{\lambda_n} = 0,$$

où $x_a(\overline{g})$ désigne l'abscisse de convergence absolue de $\overline{g}(z)$. Par conséquent, on a, pour $\mathcal{R}(z) < 0$,

$$\overline{g}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \overline{\mathcal{G}}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt. \tag{7.8}$$

En comparant (7.8) et (7.4), on démontre cette proposition :

Théorème 7.2. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un sommet à distance finie de l'étoile horizontale de $\overline{g}(z)$, il existe une droite de Borel de $\overline{\mathcal{G}}_\tau(z)$ dans la bande $|y - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\tau}$.*

CHAPITRE II.

FONCTIONS ENTIÈRES DÉFINIES PAR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DES SÉRIES DE DIRICHLET.

I. — Transformées de Laplace-Stieltjes.

8. *Préliminaires.* — Soit $\alpha_1(t)$ une fonction monotone dans les intervalles $\lambda_n < t < \lambda_{n+1}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, tels que la suite $\{\lambda_n\}$ soit croissante avec $\lambda_0 = 0$

et vérifiant la condition (1.2). En outre, supposons que $\alpha_1(\lambda_n)$ se trouve entre $\alpha_1(\lambda_n-)$ et $\alpha_1(\lambda_n+)$ et que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log B_{1n}}{\lambda_n} = -\infty, \qquad B_{1n} = |\alpha_1(\lambda_n-) - \alpha_1(\lambda_{n-1}+)|. \tag{8.1}$$

Considérons la transformée de Laplace-Stieltjes [11] de $\alpha_1(t)$

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{zt} d\alpha_1(t), \qquad z = x + iy, \tag{8.2}$$

qui définit, dans son demi-plan de convergence une fonction holomorphe. En désignant $x_c(F_1)$ et $x_a(F_1)$ son abscisse de convergence et son abscisse de convergence absolue, respectivement, on a les relations suivantes [11] :

$$0 \leqq x_c(F_1) - x_a(F_1) \leqq D. \tag{8.3}$$

$$-D \leqq x_a(F_1) + \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_{1n}}{\lambda_n} \leqq 0, \qquad A_{1n} = |\alpha_1(\lambda_n+) - \alpha_1(\lambda_n-)|. \tag{8.4}$$

En effet, soit $w_1(x)$ la variation totale de $\alpha_1(t)$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq x$. On a

$$\int_0^\infty e^{xt} dw_1(t) = \sum \int_{\lambda_n-}^{\lambda_{n+1}-} e^{xt} dw_1(t) = \sum \left| \int_{\lambda_n-}^{\lambda_{n+1}-} e^{xt} d\alpha_1(t) \right| + \Sigma A_{1n} e^{\lambda_n x}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où l'on écrit $\lambda_0 - = 0$. Puisque

$$\left| \int_{\lambda_n+}^{\lambda_{n+1}-} e^{xt} d\alpha_1(t) \right| < e^{\lambda_{n+1} x} |\alpha_1(\lambda_{n+1}-) - \alpha_1(\lambda_n+)| = B_{1,n+1} e^{\lambda_{n+1} x},$$

la condition (8.1) entraîne que la série

$$\sum \left| \int_{\lambda_n+}^{\lambda_{n+1}-} e^{xt} d\alpha_1(t) \right| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

est convergente partout. (8.4) est ainsi une conséquence de (1.4).

La condition nécessaire et suffisante pour que $F_1(z)$ soit convergente partout et par conséquent absolument convergente partout est que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log A_{1n}}{\lambda_n} = -\infty, \tag{8.5}$$

ce que l'on supposera dorénavant. On voit que

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{zt} d\alpha_1(t) = \Sigma [\varepsilon_n A_{1n} e^{\lambda_n z} + B_{1,n+1} \gamma_{n+1}(z) e^{\lambda_{n+1} z}],$$
$$\varepsilon_n = \pm 1, \qquad |\gamma_{n+1}(z)| < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

et que les deux séries $\Sigma \varepsilon_n A_{1n} e^{\lambda_n z}$ et $\Sigma B_{1n} \gamma_n(z) e^{\lambda_n z}$ sont absolument convergentes partout. Donc, en posant $\gamma_0(z) = 0$, on a

$$F_1(z) = \Sigma [\varepsilon_n A_{1n} + B_{1n} \gamma_n(z)] e^{\lambda_n z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8.6}$$

Posons

$$\mathcal{F}_1(z) = \Sigma A_{1n} e^{\lambda_n z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8.7}$$

et supposons

$$\sqrt[\lambda_n]{B_{1n}} = o(\sqrt[\lambda_n]{A_{1n}}). \tag{8.8}$$

Évidemment (8.8) entraîne $B_{1n} = o(A_{1n})$ et $B_{1n} e^{-\lambda_n(D+1)} = o(A_{1n})$; ces deux expressions et (8.5) entraînent (8.1).

On utilise les notations du n° 1. En vertu de (8.6), (8.8) et (1.7), on a, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}(8.9)\quad M(x, F_1) &< M(x, \mathcal{F}_1) + M(x, \Sigma_0(A_{1n}) e^{\lambda_n z}) < (1 + o(1))\,\mu\left(x + D + \frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{F}_1\right) \\ &< \mu(x + D + \varepsilon, \mathcal{F}_1)\end{aligned}$$

pour x assez grand. D'autre part, supposons [1]

$$M(x, \Sigma \varepsilon_n A_{1n} e^{\lambda_n z}) = |\Sigma \varepsilon_n A_{1n} e^{\lambda_n \bar{z}}|, \qquad \bar{z} = x + i\bar{y} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En vertu de (1.6), (8.8) et (1.8), on a, pour x assez grand

$$\begin{aligned} M(x, F_1) &> |\Sigma \varepsilon_n A_{1n} e^{\lambda_n \bar{z}} - \Sigma B_{1n} \gamma_n(\bar{z}) e^{\lambda_n \bar{z}}| \\ &\geq M(x, \Sigma \varepsilon_n A_{1n} e^{\lambda_n z}) - M(x, \Sigma B_{1n} e^{\lambda_n z}) \\ &\geq \mu(x, \mathcal{F}_1) - M(x - D - 1, \Sigma B_{1n} e^{-\lambda_n (D+1)} e^{\lambda_n z}) \\ &> \mu(x, \mathcal{F}_1) - \mu(x, \Sigma_0(A_{1n}) e^{\lambda_n z}) \\ &= (1 - o(1))\,\mu(x, \mathcal{F}_1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$M(x + \varepsilon, F_1) > \mu(x, \mathcal{F}_1) \tag{8.10}$$

pour x assez grand.

Au lieu des transformées de Laplace-Stieltjes des $\alpha_1(t)$ on peut considérer celles de certaines fonctions complexes, qui définissent aussi des fonctions holomorphes dans leur demi-plan de convergence. Soit

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t). \tag{8.11}$$

où $\alpha_1(t)$ vérifie les conditions énoncées ci-dessus et $\alpha_2(t)$ est une fonction réelle vérifiant

$$|\alpha_2(t + \delta) - \alpha_2(t)| \leq K |\alpha_1(t + \delta) - \alpha_1(t)|, \qquad K = const. > 0, \tag{8.12}$$

pour chaque t, pourvu que $|\delta|$ soit assez petit. Évidemment $\alpha_2(t)$ est à variation bornée dans chaque intervalle $(0, T)$, $T > 0$. Donc $\alpha(t)$ l'est aussi et $\alpha(\lambda_n +)$ et $\alpha(\lambda_n -)$ existent. De plus, on suppose que $\alpha_2(\lambda_n)$ se trouve entre $\alpha_2(\lambda_n -)$ et $\alpha_2(\lambda_n +)$. Considérons

$$F(z) = \int_0^\infty e^{zt} d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{zt} d\alpha_1(t) + i \int_0^\infty e^{zt} d\alpha_2(t) = F_1(z) + iF_2(z). \tag{8.13}$$

---

[1] On modifie facilement le raisonnement dans le cas où cette borne supérieure n'est pas atteinte en un point à distance finie.

Par hypothèse,

$$\int_0^T e^{xt} |d\alpha(t)| \leqq \sqrt{K^2+1} \int_0^T e^{xt} |d\alpha_1(t)|, \qquad T > 0.$$

Donc $F(z)$ est absolument convergente partout et définit une fonction entière. On a

$$F_2(z) = \int_0^\infty e^{zt} d\alpha_2(t) = \Sigma\{[\alpha_2(\lambda_n+) - \alpha_2(\lambda_n-)] + B_{1n}\gamma'_n(z)\} e^{\lambda_n z},$$
$$|\gamma'_n(z)| < K, \qquad \gamma'_0(z) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Par suite

$$(8.14) \qquad F(z) = \Sigma\{\varepsilon_n A_{1n} + i[\alpha_2(\lambda_n+) - \alpha_2(\lambda_n-)] + B_{1n}[\gamma_n(z) + i\gamma'_n(z)]\} e^{\lambda_n z} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

On a de même, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$(8.15) \qquad M(x, F) < \mu(x + D + \varepsilon, \mathcal{F}_1)$$

pour x assez grand. D'autre part

$$M(x, \Sigma\{\varepsilon_n A_{1n} + i[\alpha_2(\lambda_n+) - \alpha_2(\lambda_n-)]\} e^{\lambda_n z}) > \mu(x, \Sigma\{\varepsilon_n A_{1n} + i[\alpha_2(\lambda_n+) - \alpha_2(\lambda_n-)]\} e^{\lambda_n z})$$
$$= \mu\left(x, \Sigma\sqrt{A_{1n}^2 + [\alpha_2(\lambda_n+) - \alpha_2(\lambda_n-)]^2} . e^{\lambda_n z}\right) > \mu(x, \mathcal{F}_1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

On trouve, comme on a fait plus haut, que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$(8.16) \qquad M(x + \varepsilon, F) > \mu(x, \mathcal{F}_1)$$

pour x assez grand.

On peut également étudier la transformée de Laplace-Stieltjes de $\alpha_2(t) + i\alpha_1(t)$. On remarque que $F_1(z)$ est une fonction $F(z)$ particulière.

9. *Méthode de sommation et droites de Borel.* — Comme dans le Chapitre précédent, on peut étudier par la méthode de sommation les droites de Borel de $F(z)$ ou $F_1(z)$ d'ordre linéaire positif. On voit que $F(z)$, $F_1(z)$ et $\mathcal{F}_1(z)$ sont du même ordre linéaire $\tau > 0$. Introduisons comme dans le n° 3 les fonctions $V_1(t)$ et $\Omega(t)$ au moyen de $\mu(x, \mathcal{F}_1)$. Il s'ensuit que $F(z)$, $F_1(z)$ *et* $\mathcal{F}_1(z)$ *sont au plus de l'ordre linéaire de* $W(x + D)$ *et au moins de l'ordre linéaire de* $W(x)$.

Considérons

$$(9.1) \qquad f_1(z) = \int_0^\infty e^{zt} \Omega(t) \, d\alpha_1(t) = \int_0^\infty e^{zt} dv_1(t),$$

où

$$v_1(t) = \int_0^t \Omega(u) \, d\alpha_1(u).$$

Évidemment $v_1(t)$ est monotone dans les intervalles $\lambda_n < t < \lambda_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, et l'on a

$$v_1(\lambda_n+) - v_1(\lambda_n) = \Omega(\lambda_n)[\alpha_1(\lambda_n+) - \alpha_1(\lambda_n)],$$
$$v_1(\lambda_n) - v_1(\lambda_n-) = \Omega(\lambda_n)[\alpha_1(\lambda_n) - \alpha_1(\lambda_n-)],$$
$$v_1(\lambda_{n+1}-) - v_1(\lambda_n+) = \Omega(\xi_{n+1})[\alpha_1(\lambda_{n+1}-) - \alpha_1(\lambda_n+)], \qquad \lambda_n \leqq \xi_{n+1} \leqq \lambda_{n+1}.$$

Donc $v_1(\lambda_n)$ se trouve entre $v_1(\lambda_n -)$ et $v_1(\lambda_n +)$. D'ailleurs, en vertu de (3.8) et (3.1), on a, pour n assez grand,

$$\begin{aligned}\log|v_1(\lambda_{n+1}-)-v_1(\lambda_n+)| &= \log\Omega(\xi_{n+1})+\log B_{1,n+1}\\ &< \log 2\xi_{n+1}+\log\nu(\xi_{n+1})+\log B_{1,n+1}\\ &= \log 2\xi_{n+1}+\xi_{n+1}t_{n+1}-V(t_{n+1})+\log B_{1,n+1}\\ &\leqq \log 2\lambda_{n+1}+\xi_{n+1}t_{n+1}-\log\mu(t_{n+1},\mathcal{F}_1)+\log B_{1,n+1}\\ &< \log 2\lambda_{n+1}-(\xi_{n+1}-\lambda_{n+1})t_{n+1}-\log A_{1,n+1}+\log B_{1,n+1}.\end{aligned}$$

(8.8) entraîne ainsi

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|v_1(\lambda_{n+1}-)-v_1(\lambda_n+)|}{\lambda_{n+1}}=-\infty. \tag{9.2}$$

D'autre part, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|v_1(\lambda_n+)-v_1(\lambda_n-)|}{\lambda_n}=0. \tag{9.3}$$

En effet,

$$\log|v_1(\lambda_n+)-v_1(\lambda_n-)|=\log\Omega(\lambda_n)+\log A_{1n}<\log 2\lambda_n-o(1).$$

En outre,

$$\begin{aligned}\log|v_1(\lambda_n+)-v_1(\lambda_n-)| &= \log\Omega(\lambda_n)+\log A_{1n}\\ &> \log\nu(\lambda_n)-\log 2\lambda_n+\log A_{1n}, &&\text{pour } n \text{ assez grand},\\ &> \lambda_n t-V(t)-\log 2\lambda_n+\log A_{1n}, &&\text{quel que soit } t,\\ &= \lambda_n t-\log\mu(t,\mathcal{F}_1)-\log 2\lambda_n+\log A_{1n}, &&\text{pour une suite de } t\to\infty,\\ &= -\log 2\lambda_n, &&\text{pour une suite de } n\to\infty.\end{aligned}$$

(9.3) est ainsi démontrée. En vertu de (9.2), (9.3) et (8.4), l'abscisse de convergence absolue, $x_a(f_1)$, de $f_1(z)$ se trouve entre $-$ D et o.

A la fonction $F(z)$ on associe

$$f(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,\Omega(t)\,d\alpha(t)=\int_0^\infty e^{zt}\Omega(t)\,d\alpha_1(t)+i\int_0^\infty e^{zt}\Omega(t)\,d\alpha_2(t). \tag{9.4}$$

Puisque

$$\int_0^\infty e^{xt}\,\Omega(t)\,|d\alpha_1(t)|\leqq\int_0^\infty e^{xt}\Omega(t)\,|d\alpha(t)|\leqq\sqrt{K^2+1}\int_0^\infty e^{xt}\Omega(t)\,|d\alpha_1(t)|,$$

l'abscisse de convergence absolue, $x_a(f)$, de $f(z)$ est égale à $x_a(f_1)$. D'après le théorème de Fubini [11, p. 26], on trouve que, pour $\mathcal{R}(z)<x_a(f)$,

$$f(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\alpha(t)\int_1^\infty\frac{e^{tu}}{W(u)}du=\int_1^\infty\frac{du}{W(u)}\int_0^\infty e^{(u+z)t}\,d\alpha(t)=\int_1^\infty\frac{F(u+z)}{W(u)}du. \tag{9.5}$$

Suivant le raisonnement du n° 3 on arrive à un théorème analogue au théorème 3.1. On démontre, en tenant compte de ce théorème, deux propositions dont les énoncés correspondent à ceux des théorèmes 4.1 et 4.2.

On remarque que l'extension de la formule de M. M. Riesz ([1]) donne

---

([1]) *Voir* le n° 12 ci-dessous.

l'abscisse du sommet de l'étoile horizontale de $f(z)$ appartenant à chaque droite horizontale et qu'elle donne donc des renseignements sur les droites de Borel de $F(z)$.

10. *Quelques théorèmes sur les singularités et leurs applications.* — Nous donnons ci-dessous des extensions d'un théorème de M. Fekete et d'un théorème de M. Cramér dont les démonstrations sont analogues à celles données dans le cas des séries de Dirichlet.

THÉORÈME 10.1. — *Soit*

$$\beta(t) = \beta_1(t) + i\beta_2(t), \qquad 0 \leq t < \infty, \tag{10.1}$$

où $\beta_1(t)$ est une fonction croissante et $\beta_2(t)$ est une fonction réelle vérifiant

$$|\beta_2(t+\delta) - \beta_2(t)| \leq K|\beta_1(t+\delta) - \beta_1(t)|, \qquad K = \text{const.} > 0, \tag{10.2}$$

pour chaque t, pourvu que $|\delta|$ soit assez petit. Les droites de convergence et de convergence absolue de

$$g(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,d\beta(t) = \int_0^\infty e^{zt}\,d\beta_1(t) + i\int_0^\infty e^{zt}\,d\beta_2(t) \tag{10.3}$$

coïncident et coupent l'axe réel en un sommet de l'étoile horizontale de $g(z)$.

THÉORÈME 10.2. — *Soient $\beta(t)$, $(0 \leq t < \infty)$, une fonction complexe à variation bornée dans chaque intervalle finie et $\theta(z)$ une fonction holomorphe dans tout le plan vérifiant*

$$\log|\theta(z)| < (k+\varepsilon)|z|, \qquad \varepsilon > 0, \qquad |z| > Z(\varepsilon), \qquad k \geq 0. \tag{10.4}$$

Si la transformée de Laplace-Stieltjes

$$g(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,d\beta(t),$$

dont l'abscisse de convergence est finie, définit une fonction $g(z)$ holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ sur une surface de Riemann et si $\mathcal{D}_k$ désigne le domaine intérieur à $\mathcal{D}$ et d'un seul tenant avec le demi-plan $\mathcal{R}(z) < c - k$, et dont les points sont situés à une distance supérieure à k de la frontière de $\mathcal{D}$, l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,\theta(t)\,d\beta(t)$$

converge pour $\mathcal{R}(z) < c - k$ et définit une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}_k$.

Le théorème 10.1 et les résultats du numéro précédent conduisent à cette proposition :

THÉORÈME 10.3. — *Si $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ vérifient les conditions énoncées au n° 8 et si $\alpha_1(t)$ est une fonction croissante, $F(z)$ admet, dans le cas $0 < \tau < \infty$, une* *droite de Borel dans la bande* $|y| \leq \frac{\pi}{2\tau}$, *et, dans le cas* $\tau = \infty$, *l'axe des* x *comme droite de Borel au moins de l'ordre linéaire de* $V(x - x_c)$, $x_c = x_c(f)$.

On peut étendre quelques théorèmes de M. Biggeri [2, *a* et *b*] aux transformées de Laplace-Stieltjes et en tirer des résultats sur les droites de Borel. On peut également étendre des autres théorèmes sur les singularités des séries de Dirichlet aux transformées de Laplace-Stieltjes particulières et obtenir ainsi, par exemple, des théorèmes pour $F(z)$ correspondant aux théorèmes 4.3 et 4.4.

Au moyen du théorème 10.2, on peut comparer les droites de Borel de $F(z)$ et celles de sa transformée de Cramér

$$(10.5)\qquad \Psi(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,\theta(t)\,d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{zt}\,d\omega(t), \qquad \omega(t) = \int_0^t \theta(u)\,d\alpha(u),$$

où $\theta(z)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan vérifiant (10.4) et

$$(10.6)\qquad \log|\theta(x)| > -(k+\varepsilon)x, \qquad \varepsilon > 0, \qquad x > Z(\varepsilon), \qquad k \geqq 0.$$

On voit que $\Psi(z)$ définit une fonction entière. En effet, on a

$$\int_{Z(\varepsilon)}^\infty e^{xt}\,|d\omega(t)| = \int_{Z(\varepsilon)}^\infty e^{xt}\,|\theta(t)|\,|d\alpha(t)| < \int_{Z(\varepsilon)}^\infty e^{(x+k+\varepsilon)t}\,|d\alpha(t)|.$$

$\Psi(z)$ est donc absolument convergente partout.

De la même manière qu'au n° 8, on trouve que

$$(10.7)\qquad \Psi(z) = \Sigma\{\theta(\lambda_n)[\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)] + w_n(z)\,\theta(\xi_n)\,B_{1n}\}\,e^{\lambda_n z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$w_0(z) = 0, \qquad |w_n(z)| < \sqrt{K^2+1}, \qquad \lambda_n \leqq \xi_{n+1} \leqq \lambda_{n+1}.$$

Par hypothèse,

$$\sqrt[\lambda_n]{A_{1n}} \leqq \sqrt[\lambda_n]{|\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)|} < \sqrt[2\lambda_n]{k^2+1}\,\sqrt[\lambda_n]{A_{1n}},$$
$$\sqrt[\lambda_n]{|\theta(\xi_n)|\,B_{1n}} = o\left(\sqrt[\lambda_n]{|\theta(\lambda_n)|\,|\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)|}\right).$$

En posant

$$(10.8)\qquad \mathcal{G}(z) = \Sigma\,|\alpha(\lambda_n+) - \alpha(\lambda_n-)|\,|\theta(\lambda_n)|\,e^{\lambda_n z},$$

qui est convergente partout, on démontre que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$(10.9)\qquad M(x, \Psi) < \mu(x + D + \varepsilon, \mathcal{G}), \qquad M(x + \varepsilon, \Psi) > \mu(x, \mathcal{G})$$

pour x assez grand. En vertu de (10.4) et (10.6),

$$(10.10)\qquad \mu(x, \mathcal{G}) > \mu(x - k - \varepsilon, \mathcal{F}_1), \qquad \mu(x, \mathcal{G}) < \mu(x + k + \varepsilon, \mathcal{F}_1)$$

pour x assez grand. Par suite, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$(10.11)\qquad M(x, \Psi) < \mu(x + D + k + \varepsilon, \mathcal{F}_1) < W(x + D + k + \varepsilon)$$

pour x assez grand et

$$(10.12)\qquad M(x, \Psi) > \mu(x - k - \varepsilon, \mathcal{F}_1) = W(x - k - \varepsilon)$$

pour une suite de x tendant vers l'infini. Donc $\Psi(z)$ *est au plus de l'ordre linéaire de* $W(x+D+k)$ *et au moins de l'ordre linéaire de* $W(x-k)$.

A la fonction $\Psi(z)$ on associe

$$\psi(z)=\int_0^{\infty} e^{zt} a(t)\,\Omega(t)\,d\alpha(t), \tag{10.13}$$

qui est évidemment une transformée de Cramér de $f(z)$ et dont l'abscisse de convergence absolue $x_a(\psi)$ vérifie les inégalités suivantes :

$$x_a(f)-k \leqq x_a(\psi) \leqq x_a(f)+k. \tag{10.14}$$

Par un raisonnement analogue à celui du n° 5 et en tenant compte de (10.11) et (10.12), on démontre deux théorèmes dont les énoncés correspondent à ceux des premières parties des théorèmes 5.1 et 5.2, et un théorème dont l'énoncé correspond à celui du théorème 5.3.

11. *Fonctions entières associées à certaines transformées de Laplace-Stieltjes ayant une abscisse finie de convergence absolue.* — On étend maintenant à certaines transformées de Laplace-Stieltjes le problème étudié dans le n° 6. On considère une transformée

$$g(z)=\int_0^{\infty} e^{zt}\,d\beta(t)=\int_0^{\infty} e^{zt}\,d\beta_1(t)+i\int_0^{\infty} e^{zt}\,d\beta_2(t)=g_1(t)+ig_2(t) \tag{11.1}$$

ayant une abscisse de convergence absolue $x_a(g)=C$, où $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ sont des fonctions réelles satisfaisant aux hypothèses suivantes :

1° $\beta_1(t)$ est une fonction monotone dans les intervalles $\lambda_n<t<\lambda_{n+1}$, tels que la suite $\{\lambda_n\}$ soit croissante avec $\lambda_0=0$ et vérifiant (1.2);

$$2^\circ \quad |\beta_2(t+\delta)-\beta_2(t)| \leqq K'|\beta_1(t+\delta)-\beta_1(t)|, \qquad K'=\text{const.}>0; \tag{11.2}$$

pour chaque t, pourvu que $|\delta|$ soit assez petit;

3° $\beta_1(\lambda_n)$ se trouve entre $\beta_1(\lambda_n-)$ et $\beta_1(\lambda_n+)$ et $\beta_2(\lambda_n)$ se trouve entre $\beta_2(\lambda_n-)$ et $\beta_2(\lambda_n+)$;

$$4^\circ \quad \lim_{n=\infty}\frac{\log E_{1n}}{\lambda_n}=-\infty, \qquad E_{1n}=|\beta_1(\lambda_n-)-\beta_1(\lambda_{n-1}+)|. \tag{11.3}$$

On voit que les abscisses de convergence absolue de $g_1(z)$ et de $g(z)$ sont égales et que l'on a

$$-\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log C_{1n}}{\lambda_n}-D \leqq C \leqq -\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log C_{1n}}{\lambda_n}, \qquad C_{1n}=|\beta(\lambda_n+)-\beta_1(\lambda_n-)|. \tag{11.4}$$

Soit $V_1(t)$ une fonction croissante continue définie pour $t \geqq 1$ telle que (6.3) soit vérifiée, que $\dfrac{V_1(x)}{x}$ soit non décroissante et que

$$E_{1n}\Omega(\lambda_n)=o[C_{1n}\Omega_1(\lambda_{n-1})]. \tag{11.5}$$

Construisons une suite $\{\mu_n\}$ et introduisons la fonction $\Phi(z)$ comme dans le n° 6. Considérons

$$(11.6)\quad G(z)=\int_0^\infty \frac{e^{zt}}{\Omega_1(t)}\,d\beta(t),\qquad \mathcal{G}_1(z)=\sum \frac{C_{1n}}{\Omega_1(\lambda_n)}\,e_{\lambda_n z}\qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

qui sont absolument convergentes partout et définissent *deux fonctions entières*. Suivant les raisonnements des n^os 8 et 6, on trouve que

$$(11.7)\quad G(z)=\Sigma\left\{\frac{\varepsilon'_n C_{1n}}{\Omega_1(\lambda_n)}+i\frac{[\beta_2(\lambda_n+)-\beta_2(\lambda_n-)]}{\Omega_1(\lambda_n)}+\frac{E_{1n}[\gamma''_n(z)+i\gamma'''_n(z)]}{\Omega_1(\lambda_{n-1})}\right\}e^{\lambda_n z},$$

$$\varepsilon'_n=\pm 1,\qquad |\gamma''_n(z)|<1,\qquad |\gamma'''_n(z)|<K',\qquad \gamma''_0(z)=\gamma'''_0(z)=0\qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

et que, quel que soit $\varepsilon>0$,

$$(11.8)\qquad M(x,\,G)<\Phi(x+D-C+2\varepsilon)<W_1(x+D-C+K+3\varepsilon)$$

pour x assez grand et

$$(11.9)\qquad M(x,\,G)>W_1(x-2D-C-3\varepsilon)>\Phi(x-2D-C-K-4\varepsilon)$$

pour une suite de x tendant vers l'infini, où K est la constante définie dans le n° 6.

Si $K(z)<C$, on pourra écrire

$$(11.10)\qquad g(z)=\int_1^\infty \frac{G(t+z)}{W_1(t)}\,dt.$$

En comparant (11.10) et (6.12), on obtient deux théorèmes pour $G(z)$ analogues aux théorèmes 6.2 et 6.3.

La remarque faite sur le n° 6 s'applique encore au cas que l'on considère ici.

12. *Extension d'une méthode de sommation de M. M. Riesz et ses applications.* — On peut étendre dans le cas des transformées de Laplace-Stieltjes une méthode de sommation de MM. Riesz et ses applications que l'on a étudiée au n° 7. Pour établir cette extension on trouve d'abord une proposition pour les intégrales de Stieltjes correspondant à celle de M. O. Perron [8] pour les séries.

Considérons la transformée de Laplace-Stieltjes

$$(12.1)\qquad f(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,d\omega(t),$$

où $\omega(t)$ est une fonction à variation bornée dans chaque intervalle finie (o, R). Elle possède une abscisse finie de convergence. On lui associe l'intégrale

$$(12.2)\qquad \mathcal{F}_\tau(z)=\int_0^\infty \frac{e^{zt}\,d\omega(t)}{\Gamma\left(1+\dfrac{t}{\tau}\right)},\qquad \tau=\text{const.}>0,$$

qui est *absolument convergente partout* et qui tend vers $\overline{f}(z)$ dans le domaine de convergence de $\overline{f}(z)$ lorsque $\tau \to \infty$.

Comme dans le cas des séries de Dirichlet, on démontre d'abord, en appliquant une proposition correspondant à celle de M. Perron mentionnée ci-dessus, que, *dans le demi-plan de convergence absolue de $\overline{f}(z)$, on a*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \mathcal{F}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt, \tag{12.3}$$

et l'on arrive ensuite au théorème suivant :

THÉORÈME 12.1. — *L'abscisse $x(y)$ du sommet de l'étoile horizontale de $\overline{f}(z)$ qui appartient à la droite $\mathcal{I}(z) = y$ est donnée par la formule*

$$x(y) = -\lim_{\tau=\infty} \overline{\lim_{n=\infty}} \left[\frac{1}{\tau} \log \overset{+}{\log} |\mathcal{F}_\tau(-u + iy)| - u\right]. \tag{12.4}$$

Considérons la transformée $g(z)$ étudiée dans le numéro précédent, pour laquelle $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ vérifient de plus la relation suivante :

$$E_{1n} \Gamma(\lambda_n) = o[C_{1n} \Gamma(\lambda_{n-1})]. \tag{12.5}$$

A la fonction $g(z)$ associons

$$\mathcal{G}_\tau(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{zt} \, d\beta(t)}{\Gamma\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)}, \qquad \tau = \text{const.} > 0, \tag{12.6}$$

qui *définit une fonction entière d'ordre linéaire fini positif* τ. Nous avons, pour $\mathcal{R}(z) < C$,

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} \mathcal{G}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t \, dt. \tag{12.7}$$

En utilisant les calculs du n° 11 et en comparant (12.7) avec (7.4), nous établissons un théorème correspondant au théorème 7.1.

Réciproquement, considérons une transformée de Laplace-Stieltjes absolument convergente partout

$$\overline{\mathcal{G}}_\tau(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} \, d\gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{zt} \, d\gamma_1(t) + i \int_0^{\infty} e^{zt} \, d\gamma_2(t), \tag{12.8}$$

où $\gamma(t)$ vérifie les mêmes conditions que $\alpha(t)$ dans le n° 8 et la relation

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lambda_n}{\tau e} \left(\sqrt[\lambda_n]{H_{1n}}\right)^\tau = 1, \qquad H_{1n} = |\gamma_1(\lambda_n +) - \gamma_1(\lambda_n -)|, \qquad \gamma = \text{const.} > 0. \tag{12.9}$$

$\mathcal{G}_\tau(z)$ définit évidemment une fonction entière du type 1 de l'ordre linéaire fini positif $\tau > 0$.

Introduisons la transformée

$$\bar{g}(z) = \int_0^\infty e^{zt}\Gamma\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) d\beta(t). \tag{12.10}$$

Suivant les calculs du n° 9 on trouve que $x_a(\bar{g}) = 0$. En écrivant

$$\bar{g}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t}\bar{\mathcal{G}}_\tau\left(z + \frac{t}{\tau}\right) e^t\, dt, \tag{12.11}$$

et en la comparant avec (7.4), on prouve un théorème dont l'énoncé correspond à celui du théorème 7.2.

II. — Séries d'exponentielles complexes.

13. *Préliminaires* [4 et 10, *c*]. — Considérons une série d'exponentielles complexes

$$F(z) = \Sigma a_n e^{\nu_n z}, \qquad \nu_n = \lambda_n e^{i\tau_n}, \qquad \lambda_n \geqq 0, \qquad 0 \leqq \tau_n < 2\pi, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{13.1}$$

dont le domaine de convergence absolue est un domaine convexe. Posons $|a_n| = A_n$ et traçons les droites D_n

$$\mathcal{R}\left(\frac{-\nu_n z}{\log A_n}\right) = 1.$$

Désignons par $\delta_n(z)$ la distance algébrique de z à D_n, cette distance étant comptée positivement lorsque z se trouve du côté de D_n qui contient le point à l'infini de la direction d'argument $-\tau_n$. Les points z pour lesquels $\delta_n(z) < 0$, $|\delta_n(z)| > \delta(z) > 0$, $n > n[\delta(z)]$ constituent un domaine convexe Δ. Hors de ce domaine et de sa frontière la série (13.1) est divergente. Si la condition (1.2) est vérifiée avec $D = 0$, cette série converge absolument et uniformément dans tout domaine complètement intérieur à celui-ci et elle y définit donc une fonction holomorphe. Sous cette condition, pour que (13.1) soit absolument convergente partout et définisse donc une fonction entière il faut et il suffit que la condition (1.5) soit vérifiée.

On supposera que les nombres λ_n sont non décroissants, que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = H < \infty \tag{13.2}$$

et que les conditions (E) suivantes ont lieu :

1° Le nombre des λ_n compris entre x et $x+1$ est inférieur à un nombre K fixe;

2° A partir d'une valeur n, $|\nu_{n+p} - \nu_n| > e^{-\lambda_n\delta}$, $0 < \delta < 1$, si $\lambda_{n+p} - \lambda_n < 1$.

On remarque que la condition (E) 1° entraîne (13.2) avec $H \leqq K$ et que

(13.2) entraîne (1.2) avec $D = 0$. En outre, on supposera que (1.5) est vérifiée. $F(z)$ *est ainsi une fonction entière.*

En désignant par $m(r, F)$ le module du terme de plus grand module de (13.1) pour $|z| = r$ et par $M(r, F)$ le maximum de $|F(re^{i\varphi})|$ pour $0 \leqq \varphi < 2\pi$. M. Valiron [10, *e*] a démontré que, les conditions (1.5), (13.2) et les conditions (E) étant vérifiées, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$ et pour r assez grand

$$M(r, F) < m(r + \varepsilon, F), \tag{13.3}$$

$$M(r, F) > m(r - H', F), \tag{13.4}$$

H' étant un nombre positif fixe, qui dépend de H et de K et qui est arbitrairement petit quand $H = 0$. Il a défini *l'ordre en* e^r *de* $F(z)$ par le nombre

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r, \rho)}{r}$$

et a indiqué la définition de la croissance régulière et des notions qui s'y rattachent, et des théorèmes concernant la relation entre $M(r, F)$ et les suites $\{a_n\}$ et $\{\nu_n\}$. On peut définir, comme dans le n° 3, l'ordre de $F(z)$ en comparant $M(r, F)$ avec une fonction réelle.

14. *Méthode de sommation et droites de Borel.* — On étudie ici, avec la méthode de sommation de M. Valiron, les droites de Borel de $F(z)$ d'ordre fini positif ρ en e^r. On définit une fonction réelle $V(r)$ pour $r \geqq 1$ comme suit :

Soit $\{\eta_n\}$ une suite positive décroissante tendant vers zéro et G une constante supérieure à H', si l'on a, quels que soient $r (> R_0)$ et n,

$$\log m(r, F) > e^{(\rho - \eta_n) r},$$

on prend

$$V(r + H' - G) = \log m(r, F).$$

Dans le cas contraire, on a une suite $\{r_n\}$ indéfiniment croissante pour laquelle

$$\log m(r_n, F) = e^{(\rho - \eta_n) r_n}.$$

Dans chaque intervalle (r_n, r_{n+1}), on prend $V(r + H' - G)$ égale au plus grand des deux nombres $\log m(r, F)$ et $e^{(\rho - \eta_n) r}$. On prend $H' = 0$ si $H = 0$.

En posant $W(r) = \exp V(r)$ on voit que $F(z)$ *est au plus de l'ordre de* $W(r + H' - G)$ *et au moins de l'ordre de* $W(r - G)$. *Dans le cas* $H = 0$, $F(z)$ *est de l'ordre de* $W(r - G)$.

Comme dans le n° 3, on démontre deux relations analogues aux (3.5) et (3.6). Introduisons la fonction

$$\Omega(u) = \int_1^\infty \frac{e^{ut}}{W(t)} dt. \tag{14.1}$$

Il s'ensuit que

(14.2) $$|\Omega(\nu_n)| \leqq \int_1^\infty \frac{e^{\lambda_n t}}{W(t)}\, dt < 2\lambda_n \nu(\lambda_n),$$

dès que n est assez grand, où $\nu(u)$ étant le maximum de $\frac{e^{ut}}{W(t)}$, u étant réel.

A la fonction $F(z)$ on associe la série

(14.3) $$f(z) = \Sigma a_n \Omega(\nu_n) e^{\nu_n z} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui a un domaine $\mathcal{D}$ de convergence absolue contenant dans son intérieur $z = 0$, puisqu'on a, en tenant compte de (14.2),

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_n |\Omega(\nu_n)|}{\lambda_n} \leqq H' - G < 0.$$

Pour $z \in \mathcal{D}$, on a

$$f(z) = \sum a_n e^{\nu_n z} \int_1^\infty \frac{e^{\nu_n t}\, dt}{W(t)} = \sum \int_1^\infty \frac{a_n e^{\nu_n (z+t)}}{W(t)}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui converge absolument et uniformément dans tout domaine complètement intérieur à $\mathcal{D}$. Il en résulte que

(14.4) $$f(z) = \int_1^\infty \frac{F(z+t)}{W(t)}\, dt.$$

Suivant le raisonnement du n° 3, on trouve la proposition suivante :

THÉORÈME 14.1. — *Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est un point singulier de $f(z)$ provenant du prolongement analytique horizontal à partir de $\mathcal{D}$, il existe une suite de points $z_n = x_n + iy_n$ telle que $x_n \to \infty$, $y_n \to y_0$ et que*

(14.5) $$|F(z_n)| > W(x_n - x_0 - o(1)).$$

Le théorème précédent conduit à ce résultat :

THÉORÈME 14.2. — *Si $F(z)$ est d'ordre fini positif ρ en e^r et si z_0 est une singularité définie ci-dessus, il existe une droite de Borel de $F(z)$ parallèle à la direction ox dans la bande $|y - y_0| \leqq \frac{\pi}{2\rho}$.*

Démonstration. — On considère la transformation (T_α) comme dans la démonstration du théorème 4.1. Posons également $\Phi(\zeta)$ et $\overline{M}(\zeta, \Phi)$ tout en remplaçant $\zeta = \rho e^{i\theta}$ par $\zeta = se^{i\theta}$. On a

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(s, \Phi)}{\log s} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log |F(z_n)|}{\log e^{\alpha(x_n - x_0)}} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log V(x_n - x_0 - o(1))}{\alpha(x_n - x_0)} = \frac{\rho}{\alpha} > 1.$$

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(s, \Phi)}{\log s} \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log\log M\left(\sqrt{x^2 + \left(y_0 + \frac{\pi}{2\alpha}\right)^2}, F\right)}{\log e^{\alpha(x - x_0)}} = \frac{\rho}{\alpha}.$$

Donc

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log\log \overline{M}(s, \Phi)}{\log s} = \frac{\rho}{\alpha} > 1.$$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème établit notre proposition.

On peut étudier les droites de Borel de $F(z)$ parallèles à une direction *quelconque* $\varphi = \varphi_0$ en considérant celles de

$$F(e^{-i\varphi_0}z) = \Sigma a_n \exp(\nu_n e^{-i\varphi_0}z) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

parallèles à la direction ox. A $F(e^{-i\varphi_0}z)$ on associe la série

$$f(e^{-i\varphi_0}z) = \Sigma a_n \Omega(\nu_n) \exp(\nu_n e^{-i\varphi_0}z) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Du théorème 14.2, il résulte que

THÉORÈME 14.3. — *Si* $F(z)$ *est d'ordre fini* $\rho > 0$ *en* e^r *et si* z_0 *est une singularité de* $f(z)$ *provenant du prolongement analytique le long des droites passant par* $\mathcal{O}$ *et parallèles à la direction* $\varphi = \varphi_0$, *il existe une droite de Borel de* $F(z)$ *parallèle a cette direction dans la bande*

$$z = z_0 + r e^{i\varphi_0} + i e^{i\varphi_0} t, \qquad r > 0, \qquad -\frac{\pi}{2\rho} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\rho}. \tag{14.6}$$

Le théorème précédent et un théorème de M. Ritt [9, *a*] (¹) conduisent à la proposition suivante :

THÉORÈME 14.4. — *Si* $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ *est convergente* (²), *si*

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1 + \frac{k}{n}, \qquad k > 0,$$

pour n assez grand, et si $F(z)$ *est d'ordre fini* $\rho > 0$ *en* e^r, *correspondant à chaque droite ayant un point commun* z_0 *avec la frontière de* $\mathcal{O}$ *et parallèle à une direction* $\varphi = \varphi_0$, *il existe une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande* (14.6).

M. E. Hille [4] a généralisé le théorème de M. Cramér dans le cas des séries d'exponentielles complexes. Considérons la transformée de Cramér de $F(z)$

$$\Psi(z) = \Sigma a_n \theta(\nu_n) e^{\nu_n z}, \tag{14.7}$$

où $\theta(z)$ est une fonction entière pour laquelle il existe une constante $k \geqq 0$ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a, pour $|z|$ et n assez grands,

$$\log|\theta(z)| < (k + \varepsilon)|z|, \qquad \log|\theta(\nu_n)| > -(k + \varepsilon)\lambda_n. \tag{14.8}$$

(¹) Ce théorème a été généralisé par M. Valiron [10.*c*]. De ce théorème généralisé on pourra déduire une proposition correspondant au théorème 14.4.

(²) Cette condition entraîne évidemment $H = 0$.

$\Psi(z)$ *définit une fonction entière au plus de l'ordre de* $W(r+H'-G+k)$ *et au moins de l'ordre de* $W(r-G-k)$.

La transformée de Cramér de $f(z)$

$$\psi(z)=\Sigma a_n \theta(\nu_n)\Omega(\nu_n)e^{\nu_n z} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{14.9}$$

converge absolument et uniformément dans chaque domaire complètement intérieur à $\mathcal{D}_k$, où $\mathcal{D}_k$ désigne le domaine intérieur à $\mathcal{D}$ dont les points ont une distance supérieure à k de la frontière de $\mathcal{D}$. Lorsque $z\in\mathcal{D}_k$, on peut écrire

$$\psi(z)=\int_1^{\infty}\frac{\Psi(z+t)}{W(t)}\,dt. \tag{14.10}$$

Suivant le raisonnement du n° 5, on établit les deux propositions :

Théorème 14.5. — *Si* $F(z)$ *est sa transformée de Cramér* $\Psi(z)$ *sont d'ordre fini* $\rho>0$ *en* e^r *et si* $\bar{z}_0=\bar{x}_0+i\bar{y}_0$ *est une singularité de* $\psi(z)$ *provenant du prolongement analytique le long des droites passant par* $\mathcal{D}_k$ *et parallèle à la direction* φ_0, $F(z)$ *admet une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande*

$$z=\bar{z}_0+r\,e^{i\varphi_0}+i\,e^{i\varphi_0}t, \qquad r>0, \qquad -k-\frac{\pi}{2\rho}\leqq t\leqq k+\frac{\pi}{2\rho}, \tag{14.11}$$

et $\Psi(z)$ *admet une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande*

$$z=\bar{z}_0+r\,e^{i\varphi_0}+i\,e^{i\varphi_0}t, \qquad r>0, \qquad -\frac{\pi}{2\rho}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2\rho}. \tag{14.12}$$

Théorème 14.6. — *Si* $F(z)$ *sont d'ordre fini* $\rho>0$ *en* e^r *et si* $z_0=x_0+iy_0$ *est une singularité de* $f(z)$ *provenant du prolongement analytique le long des droites passant par* $\mathcal{D}$ *et parallèles à la direction* φ_0, $F(z)$ *et toutes ses dérivées admettent une droite de Borel parallèle à cette direction dans la bande* (14.6).

Remarque 1. — Comme dans le cas des séries de Dirichlet, on peut construire la fonction $V(r)$ au moyen de $M(r, F)$ au lieu de $m(r, F)$ et les résultats ainsi obtenus sont analogues à ceux énoncés ci-dessus.

Remarque 2. — La méthode de sommation ne s'applique pas à la recherche des droites de Borel d'une fonction d'ordre infini en e^r à moins qu'il existe une singularité de la fonction associée sur l'axe des x. Dans le cas général, on ne peut pas arriver à une contradiction comme celle que l'on a obtenue dans la démonstration du théorème 4.2.

Remarque 3. — Si le domaine de convergence absolue de $f(z)$ est le plan entier sauf le point à l'infini, la méthode de sommation n'est plus valable. Il faudrait donc ajouter une condition supplémentaire pour que

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log A_n|\Omega(\nu_n)|}{\lambda_n}>-\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. **Bernstein**, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet* (Paris, Gauthier-Villars, 1933).

[2] C. **Biggeri**, *a. Sur les séries de Dirichlet dont les abscisses de convergence simple et absolue sont égales* (*Bull. Soc. Math. France*, 66, 1938, p. 56-68).

b. Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des séries de Dirichlet (*Comptes rendus Acad. Sc., Paris*, 209, 1939, p. 979-980).

[3] G. **Doetsch**, *Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden* (*Math. Zeitschrift*, 8, 1920, p. 237-240).

[4] E. **Hille**, *Note On Dirichlet series with complex exponents* (*Annals of Math.*, 2e série, 26, 1924, p. 261-278).

[5] S. **Mandelbrojt**, *Dirichlet series* (*The Rice Institute Pamphlet*, 31, nº 4, 1944).

[6] S. **Mandelbrojt** et J. **Gergen**, *On entire functions definited by a Dirichlet series* (*Amer. Jour. Math.*, 53, 1931, p. 1-14).

[7] R. E. A. C. **Paley** et A. **Zygmund**, *On some series of functions* (1), (2), (3) (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 26, 1930, p. 337-357 et 458-474; 28, 1932, p. 190-205).

[8] O. **Perron**, *Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen* (*Math. Zeitschrift*, 6, 1920, p. 286-310).

[9] J. F. **Ritt**, *a. On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 18, 1917, p. 27-49).

b. On certain points in the theory of Dirichlet series (*Amer. Jour. Math.*, 50, 1929, p. 37-86).

[10] G. **Valiron**, *a. Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, Édouard Privat, 1923; nouveau tirage, New-York, Chelsea, 1949).

b. Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes (*Acta Mathematica*, 52, 1928, p. 67-92).

c. Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants (*Annales École Norm. Sup.*, 46, 1929, p. 25-53).

d. Méthodes de sommation et directions de Borel (*Annali R. Scoula Norm. Sup. Pisa*, 2e série, 2, 1933, p. 355-380).

e. Croissance et zéros des fonctions entières définies par certaines séries d'exponentielles (*Tôhoku Math. Jour.*, 1933, p. 358-374.

f. Functions and Borel's directions (*Proc. Nat. Acad. Sc. entıre, U. S. A.*, 20, 1934, p. 211-215).

g. Directions de Borel des fonctions méromorphes (*Mémorial Sc. Math.*, fasc. 89, 1938).

[11] D. V. **Widder**, *The Laplace transforme* (Princeton Univ. Press, 1946).