NICOLAS PASTIDÈS

# Sur les points fixes des transformations cycliques des domaines plans

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 68 (1951), p. 169-184
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__169_0>

SUR LES

# POINTS FIXES DES TRANSFORMATIONS CYCLIQUES DES DOMAINES PLANS

PAR M. N. PASTIDÈS.

1. *Introduction.* — Soit D un domaine simplement connexe du plan de la variable complexe $z$, dont la frontière comprend plus d'un point, et soit

$$Z = f(z) \tag{1}$$

une transformation continue et biunivoque du domaine D en lui-même. Nous supposons de plus qu'il existe un nombre entier $n$ tel que la $n^{\text{ième}}$ itérée de la transformation soit la transformation identique. En désignant les itérées successives de la transformation (1) par

$$Z_1 = Z = f(z), \qquad Z_2 = f_2(z), \qquad \ldots, \qquad Z_{n-1} = f_{n-1}(z), \qquad Z_n = f_n(z),$$

on a donc

$$f_n(z) = z$$

pour tout point $z$ de D. Nous appelons une pareille transformation, une transformation cyclique d'ordre $n$, et nous nous proposons dans ce travail de faire l'étude de l'ensemble de ses points fixes.

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction analytique de $z$, les résultats sont immédiats. En effet soit $u = F(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme du domaine D sur l'intérieur du cercle unité de centre l'origine. La transformation

$$U = \psi(u), \qquad \text{où} \quad \psi(u) = F\big[f[F_{-1}(u)]\big]$$

fait la représentation conforme du cercle unité sur lui-même; de plus elle est cyclique d'ordre $n$. Donc $[U, u]$ est une substitution linéaire elliptique, et par conséquent elle a un point fixe, et un seul, à l'intérieur du cercle $|u| < 1$. Il s'ensuit que la transformation

$$Z = f(z)$$

a un point fixe, et un seul, à l'intérieur de D.

Considérons encore le cas où, $F(z)$ ayant la même signification que plus haut, nous avons

$$f(z) = F_{-1}[\overline{F(z)}],$$

$\overline{F(z)}$ étant la conjuguée de $F(z)$. Alors la ligne décrite par

$$z = F_{-1}(u)$$

quand $u$ décrit le segment de l'axe réel compris entre $-1$ et $1$, est le lieu des points fixes de la transformation $Z = f(z)$. Remarquons que dans ce cas on a $f_2(z) = z$ pour tout $z \in D$.

Ce sont ces propriétés que nous étendons au cas général, où $f(z)$ n'est ni analytique, ni de la forme spéciale considérée plus haut.

Nous distinguons deux cas, suivant que la transformation considérée conserve le sens de parcours ou non. Voici ce que nous entendons par là. Nous disons que la transformation $Z = f(z)$ *conserve le sens de parcours*, si, $z$ parcourant dans le sens positif une courbe $\gamma$ simple fermée de Jordan, située dans D, Z parcourt la transformée $\Gamma$ de $\gamma$ dans le sens positif aussi. Le sens positif pour $\gamma$ par exemple, c'est celui qui, quand $z$ décrit toute la courbe $\gamma$ une fois, fait augmenter de $2\pi$ l'argument de $z - z_0$, où $z_0$ est un point intérieur du domaine intérieur à D et de frontière $\gamma$. Remarquons que d'après les propriétés classiques des transformations continues et biunivoques des domaines plans, si la propriété expliquée ci-dessus a lieu pour une courbe $\gamma$ particulière, elle a lieu aussi pour toute autre courbe $\gamma$ du même genre. Si, $z$ parcourant $\gamma$ dans le sens positif, Z parcourt $\Gamma$ dans le sens négatif, alors nous disons que la transformation $Z = f(z)$ change le sens de parcours.

Les résultats auxquels nous sommes arrivé dans ce travail sont les suivants :

1° Si la transformation (1) conserve le sens de parcours, elle a un point fixe dans D et un seul.

2° Si la transformation (1) change le sens de parcours, on a $f_2(z) = z$ quel que soit $z \in D$. Les points fixes de la transformation forment alors un continu linéaire de Jordan.

Pour simplifier le langage nous appellerons *contour de Jordan* toute courbe de Jordan simple et fermée, et *domaine de Jordan* tout domaine borné dont la frontière est un contour de Jordan.

Nous ferons usage des notations suivantes :

$f(\Gamma)$ et $f(\Delta)$ pour désigner les transformés du contour de Jordan $\Gamma$ et du domaine $\Delta$ par la transformation $Z = f(z)$.

2. Théorème I. — *Soit* $D_1$ *et* $D_2$ *deux domaines de Jordan ayant des points communs, et soit* $z_0$ *un de ces points. Le plus grand domaine connexe contenu dans* $D_1$ *et dans* $D_2$, *et contenant* $z_0$ *est aussi un domaine de Jordan.*

Soit $\Delta$ le plus grand domaine connexe contenu dans $D_1$ et $D_2$ et contenant $z_0$. $\Delta$ est simplement connexe car tout contour de Jordan dont tous les points appartiennent à $\Delta$, a tout son intérieur qui appartient à $\Delta$.

Soient $C_1$, $C_2$ et $\Gamma$ respectivement les frontières de $D_1$, $D_2$ et $\Delta$. On sait que $\Gamma$ est un continu et nous voulons prouver que c'est un contour de Jordan. Nous procédons par étapes.

A. Soient $a$ et $b$ deux points communs à $C_1$ et $C_2$. Ces points divisent $C_1$ en

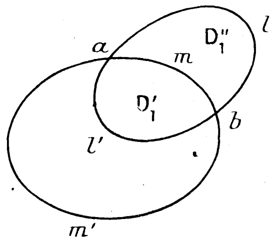

Fig. 1.

deux arcs distincts $alb$ et $al'b$, et $C_2$ en deux arcs $amb$ et $am'b$. Nous allons prouver que si tous les points de $amb$ font partie de $\Gamma$, et que à part $a$ et $b$ aucun autre de ses points n'est sur $C_1$, alors l'un au moins des arcs $alb$ et $al'b$ n'a, à part ses extrémités, aucun autre point sur $\Gamma$.

En effet d'après l'hypothèse, $amb$ divise $D_1$ en deux domaines de Jordan $D_1'$ et $D_1''$ (*fig.* 1) et $\Delta$ est tout entier dans l'un de ces domaines, soit dans $D_1'$. Nous désignons par $al'b$ l'arc de $C_1$ qui avec $amb$ constitue la frontière de $D_1'$ et par $alb$ l'autre arc de $C_1$. Comme $\Delta$ est tout entier dans $D_1'$ et que $alb$ n'a, à part $a$ et $b$, aucun autre point sur la frontière de $D_1'$, il s'ensuit que $alb$ n'a, à part $a$ et $b$, aucun autre point sur $\Gamma$.

B. Nous allons prouver maintenant que l'ensemble des points de $\Gamma$ qui n'appartiennent pas à $C_1$, forme un ensemble dénombrable d'arcs ouverts de $C_2$, les extrémités de chacun de ces arcs appartenant à $C_1$.

Remarquons d'abord que tout point de $\Gamma$ appartient à l'un au moins des contours $C_1$ et $C_2$.

Soit $m$ un point de $\Gamma$ qui n'appartient pas à $C_1$ (*fig.* 1). Comme $C_1$ est fermé, $m$ est intérieur à $D_1$. En laissant de côté le cas banal où $C_2$ serait entièrement contenu dans $D_1$, soient $a$ et $b$ respectivement les premiers points de $C_1$ que l'on rencontre en partant de $m$ et en parcourant $C_2$ d'abord dans le sens positif, ensuite dans le sens négatif. Montrons que l'arc $amb$ de $C_2$ fait entièrement partie de $\Gamma$.

Soient en effet $p$ et $q$ deux points quelconques de l'arc ouvert $amb$ situés de part et d'autre de $m$. On peut joindre $p$ et $q$ par un arc de Jordan $pm_1q$ intérieur à $D_2$, et assez voisin de l'arc $pmq$ pour que le domaine $\Delta_1$ intérieur au contour $pm_1qmp$ soit complètement intérieur à $D_1$. Comme dans ce domaine $\Delta_1$ d'une part il y a des points de $\Delta$ étant donné que l'on a $m \in \Gamma$, et d'autre part il n'y a aucun point de $\Gamma$ étant donné que tout point intérieur de $\Delta_1$ est aussi point intérieur de $D_1$ et $D_2$, il s'ensuit que $\Delta_1 \subset \Delta$. Alors $p$ étant sur la frontière de $\Delta_1$ est point limite de points de $\Delta_1$ donc de $\Delta$. D'autre part, $p$ étant sur la frontière de $D_2$ est point limite de points extérieurs à $D_2$, donc extérieurs à $\Delta$. Ce qui prouve que $p$ appartient à la frontière $\Gamma$ de $\Delta$. La même démonstration est valable pour $q$, ainsi que pour tout point de l'arc ouvert $amb$. Ceci nous prouve l'existence d'un ensemble d'arcs ouverts de $C_2$, l'ensemble des points situés sur ses éléments étant identique à l'ensemble des points de $\Gamma$ qui ne sont pas situés sur $C_1$. Nous désignerons par $J_2$ ou $\{\beta_i\}$ cet ensemble d'arcs.

C. A tout arc $\beta_i$ de l'ensemble $J_2$ correspond d'après la partie A un arc $\alpha_i$ de $C_1$ ayant les mêmes extrémités que $\beta_i$, et n'ayant à part ses extrémités aucun autre de ses points sur $\Gamma$. Soit $J_1$ l'ensemble $\{\alpha_i\}$ des arcs $\alpha_i$. Considérons l'ensemble E des points que l'on obtient en enlevant de $C_1$ les arcs de l'ensemble $J_1$, et en ajoutant les arcs de l'ensemble $J_2$. Nous allons montrer dans cette partie, que *l'ensemble* E *forme un contour de Jordan.*

Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

les coordonnées d'un point courant $m(t)$ de $C_1$. Nous pouvons supposer que $m(t)$ décrit $C_1$ quand $t$ varie de 0 à 1, et que $m(0) = m(1)$ est un point de $\Gamma$.

De même soient

$$x = u(\tau), \qquad y = v(\tau)$$

les coordonnées d'un point courant $\mu(\tau)$ de $C_2$. Nous supposons que $\mu(\tau)$ parcourt $C_2$ quand $\tau$ varie de 0 à 1.

Considérons le point variable $M(t)$ dont les coordonnées

$$x = F(t), \qquad y = \Phi(t)$$

sont définies de la façon suivante pour $0 \leqq t \leqq 1$.

*a.* Pour toute valeur de $t$ pour laquelle le point $m(t)$ n'appartient pas à un arc de l'ensemble $J_1$, on prend $M(t) = m(t)$, soit

$$F(t) = f(t) \qquad \text{et} \qquad \Phi(t) = \varphi(t).$$

*b*. Soit $t_l$ une valeur de $t$ pour laquelle le point $l = m(t_l)$ est sur un arc *alb* de l'ensemble $J_1$. A cet arc correspond un arc *amb* de l'ensemble $J_2$ d'après la définition même de l'ensemble $J_1$. Soient $t_a$ et $t_b$ les valeurs de $t$ pour lesquelles $m(t)$ coïncide respectivement avec $a$ et $b$. $t_l$ est compris entre $t_a$ et $t_b$, car $m(0)$ n'est pas sur un arc de l'ensemble $J_1$. Soient $\tau_a$ et $\tau_b$ les valeurs de $\tau$ pour lesquelles $\mu(\tau)$ se confond avec $a$ et $b$ respectivement. Ces valeurs existent car $a$ et $b$ sont communs à $C_1$ et $C_2$.

Pour $t = t_l$ on prend

$$F(t) = u[\lambda(t)], \qquad \Phi(t) = v[\lambda(t)],$$

avec

$$\lambda(t) = \frac{\tau_b - \tau_a}{t_b - t_a}(t - t_a) + \tau_a.$$

Ces expressions sont valables pour toutes les valeurs de $t$ comprises entre $t_a$ et $t_b$, et quand $t$ parcourt cet intervalle, $M(t)$ parcourt l'arc *ab* de $J_2$.

Les fonctions

$$x = F(t), \qquad y = \Phi(t)$$

sont ainsi définies pour tout $t$ compris entre 0 et 1. L'ensemble des points $M(t)$ ainsi définis est identique à l'ensemble E. Pour prouver que l'ensemble E forme un contour de Jordan, il faut et il suffit de prouver que $t_0$ étant un nombre quelconque compris entre 0 et 1, quand $t$ tend vers $t_0$, $M(t)$ tend vers $M(t_0)$.

Soit $\{t_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de valeurs de $t$ qui converge vers $t_0$. Il s'agit de prouver que la suite $M(t_i)$ des points correspondants de E, converge vers le point $M(t_0)$. Le seul cas qu'il soit nécessaire d'examiner est le cas où une infinité de points de la suite $\{M(t_i)\}$ n'appartient pas aux arcs de l'ensemble $J_2$, alors qu'une autre infinité leur appartient. Soit $\{M(t_{\lambda_j})\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ la suite formée par les premiers, et $\{M(t_{\nu_j})\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ celle formée par les seconds.

Comme la suite $\{t_{\lambda_j}\}$ converge vers $t_0$ et que $M(t_{\lambda_j}) = m(t_{\lambda_j})$, il s'ensuit que la suite $\{M(t_{\lambda_j})\}$ converge vers $M(t_0) = m(t_0)$.

Examinons la suite $\{M(t_{\nu_j})\}$. Chaque point $M(t_{\nu_j})$ de cette suite est sur un arc $\beta_{i_j}$ de l'ensemble $J_2$. Considérons d'abord le cas où *tous ces arcs sont distincts*. Soient $a_j$ et $b_j$ les extrémités de $\beta_{i_j}$, et soient $t_{a_j}$, $t_{b_j}$, $\tau_{a_j}$, $\tau_{b_j}$ les valeurs de $t$ et de $\tau$, telles que

$$m(t_{a_j}) = \mu(\tau_{a_j}) = a_j, \qquad m(t_{b_j}) = \mu(\tau_{b_j}) = b_j.$$

On sait que $t_{\nu_j}$ est compris entre $t_{a_j}$ et $t_{b_j}$, et que $|t_{a_j} - t_{b_j}|$ tend vers zéro quand $j \to \infty$. De même

$$\lim_{j \to \infty} |\tau_{a_j} - \tau_{b_j}| = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{j \to \infty} t_{a_j} = \lim_{j \to \infty} t_{b_j} = t_0,$$

donc

$$\lim_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} b_j = \mathrm{M}(t_0).$$

Comme $\mathrm{M}(t_{\nu_j})$ est sur l'arc $\beta_{i_j}$ de $\mathrm{C}_2$, que ces arcs $\beta_{i_j}$ ne sont pas empiétants et que leurs extrémités tendent vers $\mathrm{M}(t_0)$, on a

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{M}(t_{\nu_j}) = \mathrm{M}(t_0).$$

Le cas où le nombre de fois qu'un même arc $\beta_{i_j}$ se répète dans la suite $\{\beta_{i_j}\}$, ne dépasse pas un nombre fixe, se ramène facilement au précédent.

Supposons maintenant *qu'une infinité de points de la suite* $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$ *soient sur un même arc* $\beta$ *de* $\mathrm{J}_2$. Désignons cette infinité par la même notation $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$.

Soient $a$ et $b$ les extrémités de $\beta$, et $t_a$, $t_b$, $\tau_a$, $\tau_b$ les valeurs de $t$ et $\tau$ telles que

$$m(t_a) = \mu(\tau_a) = a, \qquad m(t_b) = \mu(\tau_b) = b.$$

On sait que $t_{\nu_j}$ est compris entre $t_a$ et $t_b$. Alors comme $\lim\limits_{j\to\infty} t_{\nu_j} = t_0$ et que $m(t_0)$ n'est point intérieur d'aucun arc de l'ensemble $\mathrm{J}_1$, il s'ensuit que $t_0$ est égal soit à $t_a$, soit à $t_b$; supposons que $t_0 = t_a$.

A chaque point de $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$ correspond une valeur de $\tau$ donnée par

$$\mathrm{M}(t_{\nu_j}) = \mu(\tau_{\nu_j}), \qquad \text{soit} \quad \tau_{\nu_j} = \frac{\tau_b - \tau_a}{t_b - t_a}(t_{\nu_j} - t_a) + \tau_a.$$

Quand $t_{\nu_j}$ tend vers $t_0 = t_a$ alors $\tau_{\nu_j}$ tend aussi vers $\tau_a$ et $\mathrm{M}(t_{\nu_j})$ tend vers

$$\mu(\tau_a) = a = \mathrm{M}(t_0).$$

Ce qui précède nous prouve aussi qu'il ne peut pas y avoir plus d'un arc $\beta$ de $\mathrm{J}_2$, sur lequel se trouvent une infinité de points de la suite $\{\mathrm{M}(t_{\nu_j})\}$. En effet s'il y avait deux pareils arcs, ils devraient avoir $\mathrm{M}(t_0)$ comme extrémité commune, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathrm{M}(t_0)$ est limite de points de E qui n'appartiennent pas à des arcs de l'ensemble $\mathrm{J}_2$.

Nous venons ainsi de prouver que l'ensemble E forme un contour de Jordan.

D. Nous allons finalement prouver que l'ensemble E est identique à $\Gamma$.

Tout point de $\Gamma$ appartient à E. En effet si un point de $\Gamma$ appartient à $\mathrm{C}_1$, il appartient à E car pour former E on a enlevé de $\mathrm{C}_1$ des arcs formés de points qui ne font pas partie de $\Gamma$, si un point de $\Gamma$ n'appartient pas à $\mathrm{C}_1$, alors il appartient à un arc de l'ensemble $\mathrm{J}_2$, et les points de ces arcs font partie de E.

Si $\Gamma$ n'était pas identique à E, comme il est fermé, il serait obtenu en enlevant de E un ensemble d'arcs ouverts. Mais alors $\Gamma$ ne serait pas un continu, ce qui est en contradiction avec le fait que $\Gamma$ est la frontière d'un domaine simplement connexe.

Le théorème énoncé est ainsi prouvé.

3. Soit D un domaine de Jordan, et

$$Z = f(z)$$

une transformation continue et biunivoque du domaine fermé $\overline{D}$ en lui-même. Nous supposons que cette transformation est cyclique d'ordre $n$, et qu'elle conserve le sens de parcours. Dans cette partie nous prouvons l'existence de certains domaines invariants pour la transformation, associés à ses points fixes.

3.1. Soit $z_0$ un point intérieur de D et fixe pour la transformation $Z = f(z)$, et $D_0$ un domaine quelconque de Jordan contenu dans $\overline{D}$ et contenant $z_0$. Considérons les domaines de Jordan $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ et $D_n$ identique à $D_0$, qui sont les transformés du domaine $D_0$ par les itérées de la transformation $Z = f(z)$. Soit $\Delta$ le plus grand domaine connexe renfermant $z_0$ et contenu dans tous les domaines $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$. D'après le théorème I, $\Delta$ est un domaine de Jordan. Prouvons qu'il est invariant par la transformation $Z = f(z)$.

En effet, $f(\Delta)$ contient $z_0$ et est contenu dans $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n$ donc $f(\Delta) \subset \Delta$. Mais si $f(\Delta)$ était une partie propre de $\Delta$, on aurait que $f_n(\Delta)$ serait aussi une partie propre de $\Delta$, alors que l'on a $f_n(\Delta) = \Delta$.

Nous venons ainsi de donner un procédé, qui nous servira plus loin, qui nous permet d'associer à tout domaine de Jordan $D_0$ contenant un point fixe $z_0$, un autre domaine de Jordan $\Delta$ contenant $z_0$ et invariant par la transformation $Z = f(z)$.

3.2. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, complètement intérieur à D, et invariant par la transformation $Z = f(z)$; soit C sa frontière. Nous allons montrer qu'étant donné un nombre positif $\varepsilon$ arbitrairement petit, il existe un domaine de Jordan $\Delta$ qui contient $\mathcal{D}$, qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$, et tel que la distance de tout point de sa frontière à C soit inférieure à $\varepsilon$.

En effet, à cause de l'uniformité de la continuité de $f(z)$ dans $\overline{D}$, il suffit de partir d'un domaine de Jordan $D_0$, contenant $\mathcal{D}$, et dont la frontière a chacun de ses points suffisamment voisin de C. En appliquant à $D_0$ le procédé expliqué au n° 3.1 le domaine $\Delta$ qui en résulte répond à la question.

3.3. Soit $z_0$ un point fixe de la transformation, situé sur la frontière de D. Prenons deux points $a$ et $b$ sur la frontière de D, et joignons-les par un arc simple de Jordan $asb$ intérieur à D. $D_0$ étant le domaine de Jordan limité par le contour $az_0bsa$, considérons les transformés $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ de $D_0$ par les itérées de $f(z)$, et soit $\Delta$ le plus grand domaine connexe contenu dans $D_0$, $D_1, \ldots, D_{n-1}$ et ayant $z_0$ sur sa frontière. $\Delta$ est un domaine de Jordan, il est invariant par la transformation $Z = f(z)$, et sa frontière renferme tout un arc $a'z_0b'$ qui fait partie de la frontière de D, les autres points de la frontière de $\Delta$ étant intérieurs à D.

Remarquons que l'arc $a'z_0b'$ est invariant par la transformation $Z=f(z)$ et comme cette transformation conserve le sens de parcours sur la frontière de D, il s'ensuit que les points $a'$ et $b'$ sont des points fixes de la transformation. On en déduit que tout point $z_0$, qui est situé sur la frontière de D, et qui est point fixe de la transformation, est limite de points fixes de la transformation situés sur la frontière de D aussi bien d'un côté de $z_0$ que de l'autre.

Cette remarque nous conduit au théorème suivant :

4. Théorème II. — *Soit* D *un domaine de Jordan, et* $Z=f(z)$ *une transformation continue cyclique, qui conserve le sens de parcours, et qui transforme biunivoquement* D *en lui-même. Si la transformation a un point fixe sur la frontière de* D, *alors tout point de cette frontière est aussi point fixe de la transformation.*

En effet désignons par $\Phi'$ l'ensemble des points fixes situés sur la frontière L de D. L'ensemble $\Phi'$ est fermé et par conséquent s'il ne comprenait pas tous les points de L, il existerait un arc de L dont aucun point, à part ses extrémités, ne ferait partie de $\Phi'$. Ceci est en contradiction avec la remarque qui précède ce théorème.

5. Soit $Z=f(z)$ la même transformation qu'au n° 3; $z_0$ et $z_1$ deux points fixes de cette transformation, et $D_0$ et $D_1$ deux domaines de Jordan invariants par la transformation $Z=f(z)$, dont $D_0$ contient $z_0$, et $D_1$ contient $z_1$ sans contenir $z_0$. Nous supposons en plus que les frontières $C_0$ et $C_1$ de ces domaines ont au moins un point commun. *Nous allons prouver que dans ces conditions tous les points de* $C_0$ *et de* $C_1$ *sont des points fixes.*

Il suffit de prouver, d'après le théorème II, qu'un des points communs à $C_0$ et $C_1$ est un point fixe.

Soit $\Delta$ le plus grand domaine connexe qui contient $z_0$, qui est contenu dans $D_0$, et qui est extérieur à $D_1$. Ce domaine existe, et il est simplement connexe car tout domaine de Jordan dont le contour appartient à $\Delta$ a tout son intérieur qui appartient aussi à $\Delta$; de plus sa frontière $\Gamma$ est un contour de Jordan d'après le théorème I.

La courbe $\Gamma$ a nécessairement des points qui ne sont pas sur $C_1$, et ces points forment un ensemble dénombrable d'arcs ouverts, les extrémités de chacun de ces arcs étant sur $C_1$. Nous désignons cet ensemble par E.

Soit $abc$ un des arcs de l'ensemble E (*fig.* 2). Les points $a$ et $c$ divisent $C_1$ en deux arcs. Soit $ab'c$ l'un de ces arcs, choisi arbitrairement. Nous appelons le domaine de Jordan intérieur au contour $ab'cba$, domaine associé à l'arc $abc$. Les domaines associés aux éléments de E forment un ensemble dénombrable de domaines que nous désignons par $\{U_i\}$. Nous allons montrer qu'au moins un de ces domaines renferme $z_0$. Soit en effet $defe'd$ (*fig.* 2) un domaine de l'ensemble $\{U_i\}$ ne renfermant pas $z_0$. Ce domaine est alors extérieur à $\Delta$, et si nous considérons le domaine formé de $\Delta$ augmenté d'une part des points de l'arc ouvert $def$ et d'autre part du domaine $defe'd$, la frontière de ce nouveau domaine s'obtient de la frontière de $\Delta$ à laquelle on supprime l'arc $fed$ et l'on ajoute l'arc $de'f$. Si donc, aucun des domaines de l'ensemble $\{U_i\}$ ne renfermait $z_0$, on aurait pu procéder pour chacun de ces domaines comme on vient de faire pour $defe'd$. Le domaine finalement obtenu renfermerait $\Delta$, donc $z_0$, et tous ses points frontières seraient des points de $C_1$, ce qui est impossible.

Soit $U_1 = abcb'a$ un domaine de l'ensemble $\{U_i\}$, qui renferme $z_0$. Le transformé $f(U_1)$ de $U_1$ par $f(z)$, renferme $z_0$ et sa frontière est formée de l'arc $f(abc)$ de $C_0$ et de l'arc $f(ab'c)$ de $C_1$. Comme $f(abc)$ ne peut pas traverser $abc$, il s'ensuit que l'on a

$$\text{ou bien}\quad f(U_1) \subset U_1 \qquad \text{ou bien}\quad f(U_1) \supset U_1,$$

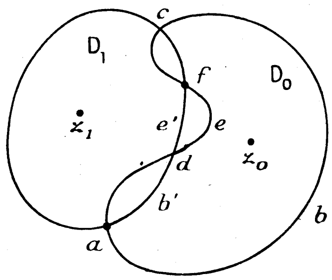


Fig. 2.

mais à moins d'avoir $f(U_1) = U_1$, ces relations sont incompatibles avec la condition $f_n(z) = z$.

On a donc

$$f(U_1) = U_1$$

et dans ces conditions, on a aussi

$$f(abc) = abc, \qquad f(ab'c) = ab'c,$$

ce qui entraîne que $a$ et $b$ sont des points fixes de la transformation $Z = f(z)$.

6. Théorème III. — *Si l'ensemble $\Phi$ des points fixes de la transformation $Z = f(z)$, définie comme pour le théorème II, renferme un continu* C [1], *alors cette transformation devient la transformation identique.*

Considérons l'ensemble $\Phi_1$ de points défini de la façon suivante : on considère un élément déterminé $z_0$ de C; un point $z$ de D est un élément de $\Phi_1$ si, et seulement si, $z$ est un élément de $\Phi$ et $\Phi$ est bien enchaîné entre $z_0$ et $z$. On a

[1] Nous appelons continu un ensemble parfait, formé de plus d'un point, et bien enchaîné entre deux quelconques de ses points.

$C \subset \Phi_1 \subset \Phi$, et il est facile de montrer que $\Phi_1$ est fermé. Nous allons prouver que $\Phi_1$ est identique à $\overline{D}$.

Supposons le contraire et soit $\alpha$ un point de D qui ne soit pas élément de $\Phi_1$. Comme $\Phi_1$ est fermé, il renferme un point $z_1$ dont la distance $r$ à $\alpha$ est en même temps la distance de $\alpha$ à $\Phi_1$. Dans le cercle de centre $\alpha$ et de rayon $r$ il n'y a alors aucun point de $\Phi_1$. Soit $z_2$ un autre point de $\Phi_1$. Nous distinguons deux cas :

*Premier cas.* — Le point $z_1$ n'est pas sur la frontière de D. Alors d'après le n° 3.1, on peut trouver un domaine de Jordan $\Delta$ contenant $z_1$ sans contenir $z_2$ ni $\alpha$ et qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$. Si nous montrons que sur la frontière $\Gamma$ du domaine $\Delta$ se trouve un point de $\Phi_1$, nous saurons, d'après le théorème II, que tout $\Gamma$ appartient à $\Phi$; et comme un point de $\Gamma$ appartient à $\Phi_1$, tout $\Gamma$ doit appartenir à $\Phi_1$, ce qui est en contradiction avec le fait qu'un arc de $\Gamma$ est à l'intérieur du cercle de centre $\alpha$ passant par $z_1$.

Prouvons que sur $\Gamma$ se trouve un point de $\Phi_1$. L'ensemble $\Phi$ est bien enchaîné entre $z_1$ et $z_2$. Donc étant donné un nombre positif $\varepsilon_m$ on peut trouver une ligne polygonale dont les sommets sont des points de $\Phi$, qui joint $z_1$ à $z_2$, et dont les côtés sont inférieurs à $\varepsilon_m$. En parcourant cette ligne de $z_1$ à $z_2$, nous désignons par $\alpha_m$ le dernier de ses sommets qui soit dans $\Delta$. Considérons alors une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_m\}$ qui converge vers zéro. A cette suite correspond comme il vient d'être dit, une suite de points $\{\alpha_m\}$, ces points appartenant à $\Phi$ et la distance de $\alpha_m$ à $\Gamma$ tendant vers zéro quand $m \to \infty$. La suite $\{\alpha_m\}$ a donc au moins un point limite $\alpha'$ sur $\Gamma$, et ce point est un point de $\Phi_1$. En effet, c'est un point de $\Phi$ car $\Phi$ est fermé; ensuite $\Phi$ est bien enchaîné d'une part entre $z_1$ et $\alpha'$, d'autre part entre $z_0$ et $z_1$ puisque $z_1 \in \Phi_1$, donc $\Phi$ est bien enchaîné entre $z_0$ et $\alpha'$. Donc $\alpha' \in \Phi_1$. C'est ce que nous voulions démontrer.

*Deuxième cas : Le point $z_1$ est sur la frontière de* D. — La frontière de D fait alors entièrement partie de $\Phi_1$, par conséquent le cercle de centre $\alpha$ et de rayon $r$ est intérieur à D. On procède comme dans le premier cas, en se servant du n° 3.3 au lieu du n° 3.1. Le point $z_1$ se trouve alors sur la frontière $\Gamma$ du domaine $\Delta$, ce qui signifie la démonstration.

7. Théorème IV. — *Soit le cercle* C, $|z| < 1$, *une transformation cyclique d'ordre n*, $Z = f(z)$, *qui transforme biunivoquement le cercle en lui-même et* $\varepsilon$ *un nombre positif arbitrairement petit. Il existe un domaine fermé de Jordan* $\overline{\Delta}$ (1) *ayant les propriétés suivantes :*

1° $\overline{\Delta}$ *est complètement intérieur à* C.

(1) Nous désignons par $\overline{\Delta}$ le domaine $\Delta$ augmenté de sa frontière.

2° *La distance de tout point de la frontière de* $\bar{\Delta}$ *à la frontière de* C *est inférieure à* $\varepsilon$.

3° $Z = f(z)$ *transforme biunivoquement* $\bar{\Delta}$ *en lui-même.*

Soit $p$ un point intérieur à C et $p' = f(p)$ son transformé. Considérons le cercle A, $|z| \leqq 1 - \varepsilon'$, avec $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et $\varepsilon'$ assez petit pour que $p$ et $p'$ soient intérieurs à A. Soient $A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-n+1}$ et $A_{-n} = A$ les transformés de A par les itérées de la fonction $z = f^{-1}(Z)$, inverse de $Z = f(z)$. Ces domaines sont des domaines de Jordan complètement intérieurs à C. On peut donc trouver un cercle B, $|z| \leqq 1 - \varepsilon''$, qui comprenne tous ces domaines en son intérieur. Alors les domaines $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ et $B_n = B$, transformés de B par $Z = f(z)$, renferment tous le cercle A. Si $\Delta$ est le plus grand domaine connexe contenu dans $B, B_1, \ldots, B_{n-1}$ et contenant A, comme $\Delta$ contient $p$ et $f(p)$, on a $f(\bar{\Delta}) = \bar{\Delta}$ et ce domaine $\bar{\Delta}$ répond à l'énoncé.

8. Théorème V. — *Si* D *est un domaine simplement connexe dont la frontière comprend plus d'un point, et* $Z = f(z)$ *une transformation cyclique d'ordre* $n \neq 1$ *qui transforme biunivoquement* D *en lui-même, et qui conserve le sens de parcours, alors cette transformation a un point fixe intérieur à* D *et un seul.*

A. Montrons que le cas général se ramène au cas particulier où D est le cercle $|z| < 1$.

En effet, soit $u = F(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme de D sur le cercle $|u| < 1$.

Considérons la transformation

$$(1) \qquad U = \psi(u), \qquad \text{où} \quad \psi(u) = F\big[f[F_{-1}(u)]\big],$$

$z = F_{-1}(u)$ étant la fonction inverse de $u = F(z)$.

La transformation (1) est définie et continue dans le cercle $|u| < 1$ et le transforme biunivoquement en lui-même. De plus, elle est cyclique d'ordre $n$, car d'une part on a

$$\psi_n(u) = F\big[f_n[F_{-1}(u)]\big] = F[F_{-1}(u)] = u,$$

et d'autre part pour $q < n$ on ne peut pas avoir $\psi_q(u) = u$, quel que soit $u$ avec $|u| < 1$, car ceci entraînerait $f_q(u) = u$.

Aussi, si $z_0$ est un point fixe de la transformation $Z = f(z)$, $u_0 = F(z_0)$ est un point fixe de la transformation $U = \psi(u)$; réciproquement si $u_0$ est un point fixe de la transformation $U = \psi(u)$, $z_0 = F_{-1}(u_0)$ est un point fixe de la transformation $Z = f(z)$. Ce que nous nous sommes proposé de prouver dans cette partie se trouve ainsi prouvé.

B. Prouvons le théorème énoncé en supposant que D est le cercle $|z| < 1$.

D'après le théorème IV, il existe un domaine fermé $\bar{\Delta}$, complètement intérieur à D, qui est transformé biunivoquement en lui-même par $Z = f(z)$. Donc d'après le théorème de Brouwer cette transformation a au moins un point fixe dans $\bar{\Delta}$, donc dans D.

Il reste à prouver que ce point fixe est unique. Nous procédons par l'absurde en prouvant que si la transformation $Z = f(z)$ a deux points fixes dans D, elle devient la transformation identique.

Nous supposons donc que la transformation $Z = f(z)$ a deux points fixes $z_0$ et $z_1$ dans le cercle $|z| < 1$, et sans diminuer la généralité de la démonstration nous pouvons supposer que $z_0 = 0$.

Désignons par $\{S_r\}$ la famille de tous les cercles de centre l'origine et de rayon plus petit que 1, et par $S_r$ celui de ces cercles qui a pour rayon $r$. A chaque cercle $S_r$ faisons correspondre par le procédé du n° 3.1, un domaine de Jordan $\Delta_r$ de frontière $\Gamma_r$, qui soit invariant par la transformation $Z = f(z)$. Nous obtenons ainsi une famille de domaines $\{\Delta_r\}$ en correspondance biunivoque avec les nombres $r$ de l'intervalle $\{0, 1\}$. Les domaines de cette famille ont les propriétés suivantes :

*a*. $r_1 < r_2$ entraîne $\Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2}$.

*b*. Soit $\rho$ une valeur fixe de $r$. Si $r$ tend vers $\rho - 0$, $\Delta_r$ tend vers $\Delta_\rho$; si $r$ tend vers $\rho + 0$, $\Delta_r$ tend vers un ensemble de points qui contient le domaine $\Delta_\rho$.

Considérons aussi un domaine de Jordan $\Delta_{z_1}$, qui contient $z_1$ sans contenir l'origine et qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$. Ce domaine existe d'après le n° 3.1. Désignons par $\Gamma_{z_1}$ sa frontière.

Nous distinguons deux cas :

*Premier cas : Un des contours $\Gamma_r$ rencontre le contour $\Gamma_{z_1}$.* — Alors en appliquant ce qui a été établi au n° 5, ainsi que les théorèmes II et III, on conclut que la transformation $Z = f(z)$ doit se réduire à la transformation identique.

*Deuxième cas : Aucun des contours $\Gamma_r$ ne rencontre le contour $\Gamma_{z_1}$.* — Dans ce cas les domaines de la famille $\{\Delta_r\}$ se divisent en deux classes :

1° La classe A formée des domaines $\Delta_r$ qui ne contiennent pas $\Delta_{z_1}$.

2° La classe B formée des domaines $\Delta_r$ qui contiennent $\Delta_{z_1}$.

Aucune des deux classes n'est vide, l'existence d'éléments de la classe B étant une conséquence du théorème IV. Remarquons aussi que tout élément de la classe B contient tous les éléments de la classe A. Il s'ensuit qu'il existe un nombre $\rho$ tel que

$$r < \rho \quad \text{entraîne} \quad \Delta_r \in A \qquad \text{et} \qquad r > \rho \quad \text{entraîne} \quad \Delta_r \in B,$$

Comme le domaine $\Delta_\rho$ est la limite de toute suite de domaines $\Delta_{r_n}$ où $\{r_n\}$ est une suite qui tend vers $\rho - 0$, on conclut que $\Delta_\rho \in A$.

Considérons la limite de $\Delta_r$ quand $r \to \rho + 0$. Cette limite existe car $r_1 < r_2$ entraîne $\Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2}$, et elle est un ensemble de points qui contient d'une part le domaine $\Delta_\rho$ et d'autre part le domaine $\Delta_{z_1}$. Soit $\mathcal{D}$ le plus grand domaine connexe contenu dans $\lim\limits_{r \to \rho+0} \Delta_r$ et contenant $\Delta_{z_1}$; $\mathcal{D}$ est simplement connexe car tout contour de Jordan dont tous les points appartiennent à $\mathcal{D}$ a tout son intérieur qui appartient aussi à $\mathcal{D}$. Remarquons aussi que si $\alpha$ est un point quelconque de sa frontière de $\mathcal{D}$, la distance de $\alpha$ à $\Gamma_r$ tend vers zéro quand $r$ tend vers $\rho + 0$. De plus $\mathcal{D}$ est invariant par la transformation $Z = f(z)$ car chacun des domaines $\Delta_r$ ainsi que le domaine $\Delta_{z_1}$ le sont.

D'après le n° 3.2 il existe un domaine de Jordan $\Delta$ invariant par la transformation $Z = f(z)$, contenant le domaine $\mathcal{D}$, et tel que la distance de tout point de sa frontière à la frontière de $\mathcal{D}$ soit inférieure à un nombre positif donné $\varepsilon$ arbitrairement petit. On choisit $\varepsilon$ de façon que l'origine soit extérieure à $\Delta$. Dans ces conditions pour $r$ supérieur et assez voisin de $\rho$, la frontière $\Gamma_r$ de $\Delta_r$ aura des points communs avec la frontière $\Gamma$ de $\Delta$. Par conséquent, en appliquant d'abord le n° 5 et ensuite les théorèmes II et III, on conclut que la transformation $Z = f(z)$ doit se réduire à la transformation identique.

Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré dans tous les cas.

9. Nous nous sommes occupé dans le théorème V de tranformations cycliques qui conservent le sens de parcours. Nous allons maintenant considérer des transformations cycliques qui changent le sens de parcours, cette phrase ayant la signification que nous lui avons attribuée dans l'Introduction [1].

Théorème VI. — *Si* D *est un domaine simplement connexe dont la frontière comprend plus d'un point, et* $Z = f(z)$ *une transformation cyclique d'ordre n qui transforme le domaine* D *en lui-même, et qui change le sens de parcours, alors n est nécessairement égal à* 2.

On peut comme pour le théorème V supposer que D est le cercle $|z| < 1$.

D'après le théorème IV, il existe un domaine fermé de Jordan $\bar{\Delta}$ intérieur à D et qui est transformé biunivoquement en lui-même par $Z = f(z)$. Quand $z$ parcourt la frontière de $\Delta$ dans un sens, Z parcourt la même frontière dans le sens opposé, ce qui nous prouve l'existence de deux points fixes $z_1$ et $z_2$ sur cette frontière. Or ces points sont aussi points fixes pour la transformation $Z_2 = \varphi(z)$, avec $\varphi(z) = f_2(z)$. Mais cette dernière transformation est cyclique,

(1) Remarquons que les procédés expliqués aux n$^{os}$ 3.1, 3.2 et au début du n° 3.3 s'appliquent aussi dans le cas où $Z = f(z)$, change le sens de parcours.

conserve le sens de parcours, et transforme biunivoquement D en lui-même; de plus elle a deux points fixes $z_1$ et $z_2$ dans D. Elle se réduit donc d'après le théorème V à la transformation identique, ce qui nous prouve le théorème énoncé.

THÉORÈME VII. — *Dans les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, l'ensemble des point fixes de la transformation forme une ligne de Jordan.*

Le théorème sera vrai dans le cas général pourvu qu'il le soit dans le cas où D est un domaine de Jordan et $f(z)$ définie et a les propriétés de l'énoncé dans le domaine fermé $\overline{D}$. En effet nous pouvons d'abord supposer que D est le cercle ouvert $|z|<1$. Ensuite d'après le théorème IV il existe une suite de domaines fermés de Jordan $\{\overline{\Delta}_j\}$, tels que

$$\overline{\Delta}_j \subset \overline{\Delta}_{j+1}, \qquad \lim_{j\to\infty} \overline{\Delta}_j = D.$$

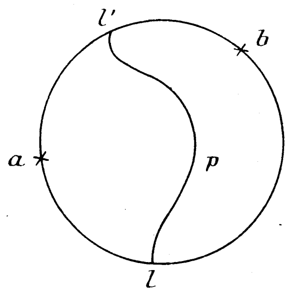


Fig. 3.

Le théorème énoncé sera évidemment vrai pourvu qu'il le soit pour chacun des domaines $\overline{\Delta}_j$. Il suffit donc de le démontrer pour un pareil domaine que nous représentons encore par $\overline{D}$.

La transformation $Z=f(z)$ a sur le contour de $\overline{D}$ deux points fixes et deux seulement [1], $z_0$ et $z_1$, qui divisent ce contour en deux arcs $alb$ et $al'b$; ces arcs se permutent par la transformation (*fig.* 3).

A. Sur tout arc de Jordan $lpl'$, qui joint un point $l$ de $alb$ à un point $l'$ de $al'b$, se trouve au moins un point fixe. En effet soit $\Delta^1$ le domaine intérieur au contour $alpl'a$ et $\Delta$ le domaine, invariant par la transformation $Z=f(z)$, qui lui correspond par le procédé du n° 3.3. Sur la frontière de $\Delta$, qui est un contour de Jordan, se trouvent deux points fixes [1] dont l'un est le point $a$ et l'autre est un point qui, étant fixe, se trouve nécessairement sur l'arc $lpl'$ aussi.

---

[1] Parce que la transformation change le sens de parcours.

B. Considérons l'ensemble E formé des points de D qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Aucun point de E n'est fixe pour la transformation $Z = f(z)$.

2° Tout point de E peut être joint à un point au moins de l'arc ouvert $alb$ par un arc de Jordan intérieur à D et sur lequel ne se trouve aucun point fixe.

Considérons aussi l'ensemble $E_1$ de points de D défini d'une façon analogue à l'ensemble E, mais relativement à l'arc $al'b$.

D'après la partie A aucun point ne peut faire partie en même temps de E et de $E_1$.

D'après leur définition les deux ensembles E et $E_1$ sont connexes; nous allons montrer qu'ils sont simplement connexes. En effet soit C un contour de Jordan dont tous les points font partie de E; montrons que tout l'intérieur de C fait partie de E. D'abord si à l'intérieur de C il y avait un point fixe $z_0$, le plus grand domaine connexe contenant $z_0$ et contenu dans les domaines intérieurs à C et à $f(C)$, serait invariant par la transformation $Z = f(z)$, et sa frontière serait une courbe de Jordan sur laquelle se trouveraient deux points fixes. Ces points fixes appartiendraient alors à C, donc aussi à E, ce qui est contraire à la définition de cet ensemble. Comme l'intérieur de C ne comprend aucun point fixe, il s'ensuit qu'il appartient à l'ensemble E. Donc E est simplement connexe et la même démonstration s'applique aussi à l'ensemble $E_1$.

Soit F la frontière de E. Cette frontière est formée de l'arc $alb$ et d'un continu linéaire L comprenant $a$ et $b$, et dont tous les autres points sont intérieurs au cercle D. D'après la définition de E il s'ensuit que L est formé de points fixes. Alors comme on a évidemment

$$f(E) = E_1, \qquad f(alb) = f(al'b)$$

on conclut que la frontière de $E_1$ est formée de l'arc $al'b$ plus le continu L. Le continu L forme donc l'ensemble des points fixes de la transformation $Z = f(z)$. Il nous reste à prouver que ce continu est une ligne de Jordan. Il suffit, d'après un théorème de Schœnflies (¹) de prouver que tout point de L est accessible de l'intérieur de E et de l'intérieur de $E_1$.

Soit $\alpha$ un point de L. Considérons une suite $\{C_n\}$ de cercles de centre $\alpha$ et dont les rayons forment une suite décroissante qui tend vers zéro. A chaque cercle $C_n$ de cette suite, nous faisons correspondre par le procédé du n° 3.1, un domaine de Jordan $\Delta_n$ de frontière $\Gamma_n$, qui reste invariant par la transformation $Z = f(z)$. Sur $\Gamma_n$ se trouvent alors deux points fixes $a_n$ et $b_n$; ces points appartiennent à L, et divisent $\Gamma_n$ en deux arcs, l'arc $a_n l_n b_n$ situé dans E et l'arc $a_n l'_n b_n$ situé dans $E_1$. Les points $l_n$ et $l'_n$ étant choisis arbitrairement sur ces arcs, on

(¹) SHOENFLIES, *Die Lehre von den Panktmannigbaligkeiten*, § 11 et 12, Chap. V.

peut joindre $l_n$ à $l_{n+1}$ par un arc de Jordan $l_n l_{n+1}$, situé dans la partie de E qui est intérieure à $\Delta_n$ et extérieure à $\Delta_{n+1}$. On obtient ainsi une suite d'arcs de Jordan

$$l_1 l_2, \quad l_2 l_3, \quad \ldots, \quad l_n l_{n+1}, \quad \ldots$$

qui forment une ligne de Jordan intérieure à E, et ayant $\alpha$ comme seul point limite situé sur la frontière de E. Donc $\alpha$ est accessible de l'intérieur de E, et en opérant d'une manière analogue avec les points $l'_n$, on obtient que $\alpha$ est aussi accessible de l'intérieur de $E_1$.