Bulletin de la S. M. F.

P. Lévy

Sur les fonctions de lignes implicites

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 13-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__13_1>

SUR LES FONCTIONS DE LIGNES IMPLICITES [1];

PAR M. PAUL LÉVY.

INTRODUCTION.

L'étude des transformations ponctuelles dans l'espace à n dimensions conduit, lorsque le nombre n augmente indéfiniment et

---

[1] Le sujet du présent Mémoire a déjà fait l'objet d'une Communication verbale à la Société le 9 janvier 1919, et d'une Communication à l'Académie des Sciences, le 20 janvier.

qu'à la limite on remplace les coordonnées x_1, x_2, ..., x_n par des quantités dépendant d'une manière continue d'un paramètre, à l'étude des correspondances entre deux fonctions $u(s)$ et $v(s)$, définies toutes deux, pour fixer les idées, pour les valeurs de s comprises entre o et 1. Une pareille correspondance étant souvent donnée par une formule permettant de déterminer $v(s)$ lorsque l'on connaît $u(s)$, il est important de savoir résoudre cette formule par rapport à $u(s)$, et calculer cette fonction lorsque l'on connaît la fonction v.

Ce problème n'a été étudié jusqu'ici qu'au point de vue *local*, et dans le cas où la relation qui exprime v lorsque u est connu peut être différentiée.

La résolution par rapport à δu de la relation linéaire qui relie δu et δv, qui est en général ce qu'on appelle une *équation intégrale*, a été obtenue dans des cas importants par M. Volterra d'abord, puis par M. Fredholm. Dans les cas traités par ces savants, la solution rappelle tout à fait celle des équations algébriques linéaires, et présente un caractère tout différent suivant qu'une certaine quantité appelée *déterminant* de l'équation est nulle ou non. Dans d'autres cas, mis en évidence notamment par M. Picard, apparaissent des circonstances très différentes de celles qui se rencontrent dans la théorie des équations algébriques. Quoi qu'il en soit de la généralité de ces cas, l'importance au point de vue des applications des équations résolues par M. Fredholm conduit à porter surtout son attention sur les cas où l'expression de déterminant de l'équation a un sens; dans ces cas, l'équation a une solution déterminée et unique si le déterminant n'est pas nul, c'est-à-dire *en général*.

On peut alors aborder le problème, connaissant la fonction v qui correspond à une fonction particulière u, et sachant résoudre par rapport à δu la relation entre δu et δv, de déterminer la fonction U à laquelle correspond une fonction V *suffisamment peu différente de* v. C'est *le problème de l'inversion au point de vue local*, qui a été résolu à des points de vue différents par MM. E. Schmidt et Volterra, moyennant certaines conditions qui seront en général réalisées dans les applications.

Au point de vue local, il n'est pas douteux qu'une théorie définitive ait ainsi été établie.

Mais aucune tentative ne semble avoir été faite pour sortir de ce point de vue, et chercher à reconnaître à des caractères généraux de la relation donnée entre u et v, si la résolution par rapport à u est possible et unique par rapport à v. C'est ce problème que nous nous proposons de traiter, en généralisant les résultats obtenus par M. Hadamard dans le cas des transformations ponctuelles et exposés en 1906 dans ce Bulletin.

2. Rappelons d'abord brièvement les résultats obtenus par M. Hadamard.

Supposons que dans une transformation ponctuelle un point A d'un espace à n dimensions ait pour homologue un point B que nous nommerons son *image*. Les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de B sont supposées fonctions des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de A, uniformes, continues, admettant des dérivées, et telles que le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

soit de signe constant. (Si l'on suppose la continuité de toutes les dérivées des y par rapport aux x, il suffit de spécifier que ce déterminant ne s'annule pas.) A ces conditions, l'inversion est possible *au point de vue local*, c'est-à-dire que si un point b est l'image d'un point a, à tout point B *suffisamment voisin de* b correspond dans le voisinage de a un point A dont il est l'image.

Mais l'inversion est-elle possible dans tout l'espace? S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un point b_1 qui ne serait l'image d'aucun point, et lorsque B se déplacerait de b à b_1, il devrait à un certain moment passer en un point b' où l'inversion cesserait d'être possible; il est d'ailleurs évident qu'elle serait impossible, non seulement après b', mais pour ce point lui-même. Cela ne peut s'expliquer que si, pendant que B décrit le chemin de longueur finie bb', le point A dont il est l'image décrit un chemin de longueur infinie.

Pour exclure cette possibilité, M. Hadamard considère, pour chaque point a, le minimum μ de la quantité

$$\sqrt{\frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}},$$

ce minimum est positif lorsque Δ n'est pas nul, mais il n'existe aucun rapport déterminé entre lui et Δ, et la considération de μ permet d'obtenir des résultats que l'on ne pourrait obtenir en considérant seulement Δ. Soit μ_ρ le minimum de μ sur la sphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2.$$

M. Hadamard suppose que l'intégrale

$$\int_0^r \mu_\rho \, d\rho$$

augmente indéfiniment avec r. Sous cette condition, une ligne de longueur infinie ne pourra avoir pour image une ligne de longueur finie. Tout point B admet donc un point A dont il est l'image. M. Hadamard démontre de plus qu'il n'en admet qu'un. L'inversion de la transformation considérée est donc non seulement possible, mais uniforme.

FINITIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

3. Cherchons à étendre ces résultats au problème de calcul fonctionnel qui nous occupe.

Considérons donc une fonction $u(s)$, définie et uniforme pour les valeurs de s comprises entre 0 et 1, à laquelle correspondra une fonction $v(s)$, définie et uniforme pour les mêmes valeurs de s. A chaque fonction u correspondra une fonction v et une seule.

Nous écrirons dans la suite $u(s)$ et $v(s)$ lorsque nous considérerons les valeurs de ces fonctions pour une valeur déterminée de s, et simplement u et v lorsque nous considérerons les êtres analytiques constitués par l'ensemble des valeurs de ces fonctions lorsque s varie de 0 à 1.

En raison de la commodité du langage géométrique, nous conviendrons de représenter la fonction u par un point a d'un espace idéal E, et de même la fonction v par un point b d'un espace E'. La correspondance étudiée entre u et v pourra ainsi être considérée comme une transformation ponctuelle dans laquelle b sera dit l'image de a. Nous désignerons par A, B, a_0, b_0, ... les points correspondant respectivement à des fonctions U, V, u_0, v_0, ...

Mais le langage géométrique ne doit pas masquer une difficulté qui se présente. Quand devons-nous considérer un point comme voisin d'un autre? D'une manière plus précise, comment définirons-nous la *distance* entre deux points? Dans l'espace à n dimensions il ne peut y avoir ambiguïté sur la réponse à faire à la première de ces questions, et l'on n'a jamais considéré qu'une seule définition de la distance. Il n'en est pas de même dans le cas qui nous occupe. Bien des définitions sont possibles. Il est évidemment essentiel de leur imposer cette condition, que la distance d de deux points a et A ne soit nulle que si les fonctions u et U sont les mêmes. Les définitions qu'il y a intérêt à proposer ne sont donc pas les mêmes suivant qu'on impose ou non aux fonctions considérées certaines restrictions de continuité. Ainsi la définition donnée par la formule

$$(1) \qquad d^2 = \int_0^1 [U(s) - u(s)]^2 \, ds,$$

qui est la généralisation la plus naturelle de celle adoptée dans l'espace à n dimensions, convient si l'on ne considère que des fonctions continues, et ne convient pas si l'on considère l'ensemble de toutes les fonctions bornées.

On pourrait chercher, en employant le langage abstrait de M. Fréchet, à ne préciser la nature des conditions de continuité considérées et la définition de la distance. Il nous paraît préférable, pour faciliter l'exposé, de préciser ces conditions; nous terminerons par quelques remarques sur les généralisations possibles.

Nous allons ainsi, pour commencer, considérer l'*ensemble des fonctions sommables et des carrés sommables*. Nous entendons le mot *sommable* dans le sens qui résulte des travaux de M. Lebesgue, mais le lecteur qui n'est pas familiarisé avec ces travaux peut sans inconvénient supposer que nous appelons *sommable*, une fonction continue ou admettant une infinité dénombrable de points de discontinuité tels que l'intégrale de cette fonction ait un sens.

Nous ne considérerons pas comme distinctes deux fonctions qui ne diffèrent que pour des valeurs de s constituant un ensemble de mesure nulle.

A cette condition, nous pouvons définir la distance par la formule (1).

Nous dirons que le point A *tend* vers a ou *a pour limite a* lorsque d tend vers zéro. Nous dirons dans les mêmes conditions que U *tend* vers u, bien qu'il puisse exister des valeurs de s, constituant un ensemble de mesure nulle, pour lesquelles $U(s)$ ne tend pas vers $u(s)$. Nous pourrions dire, suivant une expression consacrée, que $U(s)$ *converge en moyenne* vers $u(s)$. Nous préférons l'expression indiquée pour faciliter l'extension au cas où nous modifierons la définition de la distance.

Nous dirons qu'un point A dépend d'une manière *continue* d'un paramètre λ si la distance des points correspondant aux valeurs λ et λ_0 tend vers zéro lorsque λ tend vers λ_0. Cette définition s'étend au cas de plusieurs paramètres.

Le lieu des points qui dépendent d'une manière continue d'un paramètre sera dit une *ligne continue*.

On dira qu'une ligne continue dépendant d'un paramètre μ *se déforme d'une manière continue* s'il est possible de choisir sur cette ligne un paramètre λ tel que le point défini par ce paramètre dépende d'une manière continue de λ et de μ.

Une *ligne droite* sera le lieu des points correspondant aux fonctions $(1-\lambda)u_0+\lambda u_1$, u_0 et u_1 étant deux fonctions particulières et λ un paramètre variable.

On vérifie sans peine que la définition donnée de la distance vérifie cette condition que dans tout triangle chaque côté est au plus égal à la somme des deux autres, l'égalité n'étant réalisée que lorsque le triangle se réduit à trois points en ligne droite.

En appelant *module* d'une fonction u la distance du point qui la représente à celui qui représente l'origine [qui avec la définition précédente de la distance est le module quadratique moyen de $u(s)$], le résultat qui vient d'être énoncé géométriquement peut s'énoncer ainsi : le module d'une somme de deux fonctions u_0 et u_1 est au plus égal à celui de la somme u_0+u_1, l'égalité n'étant réalisée que si $u_1=cu_0$, c étant une constante positive.

Une *sphère* sera le lieu des points situés à une distance donnée d'un point déterminé appelé *centre*.

4. Nous aurons besoin dans la suite d'une condition pour reconnaître si une fonction qui varie a une limite. Il est évidemment indifférent pour établir la forme de cette condition de considérer

une fonction qui dépend d'un paramètre continu ou une suite de fonctions distinctes. Nous considérerons une suite de fonctions u_0, u_1, ..., u_n ..., etc., représentées par des points a_1, a_2, ..., a_n, ..., etc.

On pourrait énoncer une *condition de Cauchy* qui serait nécessaire et suffisante pour l'existence de la limite. Il sera plus simple, pour l'application que nous avons en vue, d'énoncer séparément une condition nécessaire et une condition suffisante.

1° *Condition nécessaire.* — Cette condition est que la distance $a_n a_{n+1}$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Cela résulte immédiatement de ce que, a étant la limite de a_n, cette distance est au plus égale à la somme des distances aa_n et aa_{n+1}, qui tendent vers zéro d'après notre définition de la limite.

2° *Condition suffisante.* — Cette condition est que la distance $d_n = a_n a_{n+1}$ soit le terme général d'une série convergente.

Pour le démontrer, observons que d'après l'inégalité de Schwarz

$$\delta_n = \int_0^1 | u_{n+1}(s) - u_n(s) | \, ds < d_n.$$

Donc d_n est le terme général d'une série convergente; en d'autres termes, la somme

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^1 | u_{n+1}(s) - u_n(s) | \, ds = \int_0^1 \sum_{n=1}^{n=\infty} | u_{n+1}(s) - u_n(s) | \, ds$$

est finie (l'inversion des signes de sommation et d'intégration est légitime puisque tous les éléments sont positifs). Il est donc impossible qu'il existe un ensemble de points de mesure positive pour lequel la fonction intégrée

$$\Sigma | u_{n+1}(s) - u_n(s) | \tag{2}$$

soit infinie. Il en résulte bien que $u_n(s)$ a une limite sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle [1], et par suite que u_n a

[1] Les fonctions $u_n(s)$ étant des fonctions sommables, il est aisé d'établir que l'ensemble des valeurs de s pour lesquelles la somme (2) est infinie a une mesure bien déterminée. Les deux hypothèses suivant lesquelles cette mesure est nulle ou positive sont donc les seules possibles. Cette remarque est essentielle pour permettre de considérer le raisonnement du texte comme rigoureux.

une limite au sens du paragraphe 3, cette limite étant d'ailleurs, comme chacune des fonctions u_n, une fonction intégrable et de carré intégrable.

En employant le langage géométrique, nous pouvons dire qu'*un point qui décrit un chemin de longueur finie a une limite.*

5. Considérons maintenant une correspondance entre les fonctions u et v, telle que u soit une *fonctionnelle linéaire continue* de v. D'une manière précise nous supposerons que :

1° Si v est de fonction sommable et de carré sommable, il en est de même de u.

2° u est une fonctionnelle continue de v, c'est-à-dire que si le point b représentant v tend vers un point b_0, le point a représentant u tend vers un point a_0, qui est naturellement celui qui correspond à b_0.

3° u est fonctionnelle linéaire de v, c'est-à-dire que la relation

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes, entraîne entre les fonctions u, u_1 et u_2, correspondant respectivement à v, v_1, v_2, la relation

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

Il suffit même, pour la remarque qui suit, de l'hypothèse que u soit homogène de degré en v, sans être linéaire, c'est-à-dire que $v = \lambda v_1$ entraîne $u = \lambda u_1$.

De ces hypothèses résulte que *le module de $\frac{v}{u}$ a une limite inférieure positive.*

Si en effet il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite de fonctions v_n de modules m'_n auxquelles correspondent des fonctions u_n de modules m_n tels que le rapport $\frac{m_n}{m'_n}$ augmente indéfiniment avec n. On pourrait alors faire en sorte, en multipliant au besoin les fonctions v_n par des facteurs constants convenables, que m'_n tende vers o et m_n vers 1, ce qui est contraire à l'hypothèse de la continuité à l'origine (point représentant la fonction $v = 0$)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

6. Considérons une correspondance entre un point a, représentant une fonction u, et un point b, représentant une fonction v et que nous appellerons *image* de a. Supposons vérifiées les conditions suivantes:

a. v est une fonctionnelle de u, définie d'une manière unique, continue et admettant une différentielle, c'est-à-dire que, u étant donné, on peut trouver une fonctionnelle linéaire δv de δu, fonction de s, telle que, V étant la fonction qui correspond à une fonction U tendant vers u, le module de $V - v - \delta v$ soit infiniment petit par rapport à celui de $\delta u = U - u$.

b. L'inversion est possible localement et est continue, c'est-à-dire que le point a et le nombre positif ε étant donnés, on peut trouver une petite sphère ayant pour centre son image b telle que tout point intérieur à cette sphère soit l'image d'un point et un seul d'un petit volume entourant a et tout entier intérieur à la sphère de centre a et de rayon ε.

Cette condition exige que la relation δu et δv soit résoluble par rapport à δu. Alors, d'après le paragraphe 5, le rapport du module de δv à celui de δu a une limite inférieure positive μ.

c. Lorsque le point a est intérieur à une sphère de rayon ρ ayant pour centre l'origine (point qui représente la fonction $u = 0$), en d'autres termes lorsque le module de u est inférieur à ρ, *μ admet une limite inférieure positive μ_ρ.*

Il faut remarquer que si dans le cas de l'espace à n dimensions étudié par M. Hadamard l'existence de μ_ρ résulte nécessairement de celle de μ, lorsqu'on suppose la continuité des dérivées premières (à cause de la continuité uniforme), il n'en est pas de même dans le cas qui nous occupe, même si l'on suppose que δv dépende d'une manière continue de u et de δu.

d. L'intégrale

$$\int_0^r \mu_\rho \, d\rho$$

augmente indéfiniment avec r.

De cette condition résulte évidemment qu'il ne sera pas possible que a décrive un chemin de longueur infinie pendant que b décrit un chemin de longueur infinie.

Sous ces conditions, l'inversion de la transformation est possible et uniforme; en d'autres termes, tout point b est l'image d'un point a et d'un seul.

7. Démontrons d'abord que *l'inversion est possible.*

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait imaginer un point B qui se déplace d'un point b_0 pour lequel l'inversion soit possible à un point b_1 pour lequel l'inversion soit impossible, et cela en suivant un chemin de longueur finie. Il devrait donc exister sur ce chemin au moins un point b tel que l'inversion soit possible un peu avant b et impossible après. Nous allons montrer que cela est en contradiction avec les hypothèses faites.

Lorsque B arrive en b en décrivant un chemin de longueur finie, le point A décrit aussi un chemin de longueur finie (condition d), et par suite a une limite a (§ 4), qui, à cause de la continuité (condition a), a pour image le point b. Mais alors l'inversion est possible dans tout l'intérieur d'une petite sphère entourant b (condition b) et par suite un peu au delà de ce point, contrairement à ce que nous avions supposé.

La possibilité de l'inversion est donc démontrée.

8. Démontrons maintenant que *l'inversion est uniforme.*

Considérons à cet effet deux points a_0 et a_1 ayant une image b et montrons qu'ils ne peuvent être distincts.

Une ligne C allant de a_0 en a_1 a pour image une ligne fermée C commençant et finissant en b. On peut évidemment supposer que C′, sans cesser de commencer et finir en b, se déforme d'une manière continue et finisse par se réduire au point b. La ligne C qui a C′ pour image doit pendant ce temps varier d'une manière continue [1]; ses extrémités varient donc d'une manière continue.

[1] On peut considérer que ce point n'est pas évident. Observons que la ligne C décrit dans sa déformation une *surface*, sur laquelle un point B peut être déterminé par deux paramètres. Ce fait qu'il n'y ait que deux paramètres permet d'employer les raisonnements basés sur la continuité uniforme et rendre parfaitement rigoureux le raisonnement du texte. Ces raisonnements sont trop connus pour qu'il soit utile d'y insister.

Mais comme ses extrémités ont constamment b pour image, et que dans le voisinage de chacun des points a_0 et a_1 il n'existe aucun autre point ayant b comme image (condition b), elles ne peuvent se détacher de a_0 et a_1. Comme C doit se réduire à un point en même temps que C′, ses extrémités a_0 et a_1 ne peuvent être distinctes.

Le théorème fondamental est donc bien démontré.

GÉNÉRALISATIONS DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

9. On peut, de bien des manières, généraliser le théorème précédent en modifiant la nature des restrictions de continuité imposées aux fonctions considérées; on peut aussi leur imposer des conditions d'égalité ou même d'inégalité. La nature des restrictions qu'il est utile de considérer et par suite la définition de la distance qui sera la plus indiquée dépendent de la nature de la correspondance envisagée. Nous allons le préciser par des exemples avant de montrer à quelles conditions notre théorème fondamental sera applicable.

10. Considérons d'abord la correspondance entre u et v définie par la formule

$$v(s) = \int_0^s u(t)\,dt. \tag{3}$$

Si la fonction u est supposée continue, il faut supposer la fonction v continue, à dérivée continue, et de plus s'annulant pour $s = 0$. Ces conditions sont nécessaires pour que l'inversion soit possible localement, et si elles sont réalisées il n'y a aucune difficulté à passer du point de vue local au point de vue général.

Les points a et b qui représentent respectivement u et v ont alors pour lieux deux domaines différents E et E′. Dans le domaine E, on peut garder la définition habituelle de la distance; mais il n'est pas indiqué de la garder dans E′, dont tous les points représentent des fonctions admettant des dérivées; il est préférable dans E′ de définir la distance δ par la formule

$$\delta^2 = \int_0^1 \left[\frac{dV(s)}{ds} - \frac{dv(s)}{ds}\right]^2 ds. \tag{4}$$

De cette manière, la fonction u pourra être considérée comme une fonctionnelle continue de v, et l'on se rend compte que notre théorème généralisé sera applicable. Au contraire, si l'on gardait la définition initiale de distance, u ne dépendrait pas de v d'une manière continue.

11. Considérons maintenant la correspondance définie par la formule

$$v(s) = u(s) + \mathfrak{M}\,|[u]|, \tag{5}$$

$\mathfrak{M}\,|[u]|$ désignant le plus petit des nombres M tels que

$$u(s) \leqq \mathrm{M}\,; \qquad (0 \leqq s \leqq 1),$$

c'est-à-dire la limite supérieure (au sens algébrique) de $u(s)$ quand s varie de 0 à 1.

Il suffit pour que la fonction v soit bien définie que la fonction u soit bornée supérieurement; et inversement, si v est bornée supérieurement, on peut obtenir u par la formule

$$u(s) = v(s) - \frac{1}{2}\mathfrak{M}\,|[v]|. \tag{6}$$

Dans l'étude d'une telle correspondance aucune autre restriction de continuité que l'existence d'une borne supérieure n'est nécessaire, et il faut considérer comme distinctes deux fonctions qui diffèrent pour une seule valeur de s. Il y a alors lieu d'appeler distance des points a et A le module maximum de $\mathrm{U}(s) - u(s)$, et de ne pas distinguer entre le domaine lieu de b et le domaine lieu de a.

12. Si l'on envisage des généralisations telles que celles qui résultent des exemples précédents, à quelles conditions notre théorème sera-t-il applicable? Nous ne recommencerons pas la démonstration, mais indiquerons seulement les circonstances nouvelles ou qu'il paraît utile de préciser.

1° L'existence de la quantité μ sera toujours une conséquence de la condition b, le raisonnement du paragraphe 5 étant indépendant de la définition de la distance.

Ainsi dans l'exemple de la relation (3) et si l'on garde la définition de la distance considérée d'abord, cette quantité n'existe pas, mais la condition b n'est réalisée qu'en ce qui concerne la possibilité de l'inversion et non en ce qui concerne la continuité. Mais, avec la définition de la distance correspondant naturellement au champ fonctionnel dans lequel la fonction v est située, la continuité de l'inversion est assurée et la quantité μ existe.

2° Nous avons eu besoin pour démontrer l'unicité de l'inversion d'admettre que la ligne C′ puisse se déformer d'une manière continue de façon à se réduire à un point. Il faudra s'assurer que cela est possible, c'est-à-dire que le domaine C′ est à *connexion linéaire simple*. Si les restrictions de continuité imposées à la fonction v ne risquent pas d'empêcher cette condition d'être réalisée, il n'en est pas de même des conditions d'égalité ou d'inégalité.

3° S'il y a des conditions d'inégalité limitant l'un des domaines E ou E′, il est essentiel que la définition de distance soit modifiée d'après ces conditions de manière à faire paraître ce domaine infini. Il faut donc que les points qui, d'après les conditions d'inégalité, limitent ce domaine soient considérés comme lui étant extérieurs, et que la définition de la distance soit telle que ces points ne puissent être atteints de l'intérieur par un chemin de longueur finie, mais que deux points intérieurs soient toujours à une distance finie l'un de l'autre.

Ainsi, si le domaine E′ est constitué par les points représentant les fonctions v telles que

$$\int_0^1 [v(s)]^2\, ds < 1,$$

on pourra définir la distance de deux points b et B, représentant les fonctions v et V, par la formule

$$d^2 = \int_0^1 \left[\frac{V(s)}{1 - M^2} - \frac{v(s)}{1 - m^2}\right]^2 ds,$$

dans laquelle m et M représentent les modules quadratiques moyens des fonctions v et V. A cette condition on pourra appliquer notre théorème. En effet, $v(s)$ est lié d'une manière biunivoque par la formule

$$w(s) = \frac{v(s)}{1 - m^2}$$

à une fonction w qui elle ne vérifie aucune condition d'inégalité et l'on peut appliquer notre théorème à la correspondance entre les fonctions u et w.

13. On peut chercher dans un autre ordre d'idées l'extension de notre théorème en faisant disparaître la condition que les fonctionnelles considérées admettent une différentielle. On se rend compte en effet que cette condition facilite les raisonnements, mais n'est pas essentielle.

Les conditions essentielles sont évidemment :

1° Que v dépende de u d'une manière continue; sans cette condition le principe du raisonnement par continuité manquerait et toute la théorie précédente disparaîtrait.

2° Que l'inversion soit possible localement. (L'existence des différentielles n'a d'autre intérêt que d'aider à reconnaître si cette condition est réalisée.)

3° Que le domaine E′ soit à connexion linéaire simple.

4° Qu'on puisse donner une définition de la distance dans chacun des domaines E et E′ telle que ces domaines soient tous les deux infinis dans tous les sens, que tout chemin de longueur finie ait une limite, et qu'à un chemin de longueur infinie dans E ne puisse correspondre un chemin de longueur finie dans E′.

Comme exemple simple de relation pour laquelle la notion de différentielle ne s'applique pas en chaque point, nous n'avons qu'à reprendre l'exemple du paragraphe **11**. Pour faciliter le langage, bornons-nous à considérer le cas où u est une fonction continue.

Pour les fonctions u n'atteignant leur maximum $\mathfrak{M}$ que pour une valeur s_1 de s, v admet une différentielle définie par la formule

$$\delta v(s) = \delta u(s) + \delta u(s_1).$$

Mais si u atteint son maximum pour deux valeurs s_1 et s_2, on ne peut savoir *a priori* laquelle des expressions

$$\delta u(s) + \delta u(s_1), \qquad \delta u(s) + \delta u(s_2)$$

représente au second ordre près la variation de v. Si

$$\delta u(s) = f(s)\, d\lambda, \qquad f(s_1) \neq f(s_2),$$

l'une de ces expressions conviendra pour $d\lambda > 0$ et l'autre pour $d\lambda < 0$. On est ainsi dans le cas correspondant à celui des fonctions d'une variable ayant une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Comme le montre la formule (6), cela n'empêche pas l'inversion de la correspondance d'être possible d'une manière unique.