BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

Sur quelques propriétés des nombres transcendants de Liouville

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 74-99
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__74_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES TRANSCENDANTS DE LIOUVILLE;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. Dans cette Note ([1]), j'indique quelques résultats nouveaux relatifs aux nombres (transcendants) de Liouville.

J'introduis d'abord, pour une suite Σ convenablement définie de fractions rationnelles J_n ayant comme limite un nombre J de Liouville réel ou imaginaire, la notion de *suite complète;* je donne, lorsque J est réel (par suite aussi J_n), une condition suffisante pour que la suite Σ des J_n soit complète; quand on envisage toutes les fonctions rationnelles $F(x)$ de x à coefficients entiers réels, les suites des fractions $F(J_n)$ relatives aux divers nombres de Liouville $F(J)$ satisfont à cette condition, si celle-ci a lieu pour une d'elles.

D'autre part, j'établis d'une manière plus générale qu'antérieurement l'existence de nombres transcendants réels ou imaginaires qui dépendent algébriquement d'un nombre de Liouville J sans être des nombres de Liouville.

Ainsi, les deux racines imaginaires de $x^3 = J$ ne sont pas des nombres de Liouville; lorsque Σ satisfait à la condition suffisante précitée et que R est un nombre rationnel positif non carré, $J\sqrt{R}$, où J est réel, n'est pas un nombre de Liouville.

Incidemment, je prouve et j'utilise un lemme, déjà presque entièrement démontré au fond par moi antérieurement (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 20e cahier, 1919, p. 152-154; *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 217), et dont un cas particulier m'a déjà servi dans l'étude des points entiers des courbes unicursales.

En terminant, je signale quelques légers compléments, éclaircissements ou *errata* relatifs à mes écrits antérieurs sur les nombres de Liouville.

([1]) Cette Note a été déposée à la Société mathématique en juillet 1920; on en trouvera un résumé dans les *Comptes rendus* du 26 avril 1920, t. 170, p. 983.

PREMIÈRE PARTIE.

II. Un nombre de Liouville, réel ou imaginaire, peut toujours être défini [1] comme limite de la suite Σ de fractions rationnelles *distinctes* (c'est-à-dire inégales deux à deux), à dénominateurs réels, positifs et croissants

$$(1) \qquad J_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \qquad \ldots, \qquad J_n = \frac{P_n}{Q_n}, \qquad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes; soit

$$(2) \qquad |J - J_n| = Q_n^{-\lambda_n};$$

on a, par hypothèse, $P_n = p_n + ip'_n$, où p_n, p'_n, Q_n sont des entiers sans diviseur commun, en sorte que, si p_n ou p'_n est nul, p'_n ou p_n est premier à Q_n (je dirai ici pour simplifier que P_n et Q_n sont premiers entre eux, et que J_n est irréductible); on a $Q_{n+1} > Q_n > 1$, et $\lim Q_n = \infty$ pour $n = \infty$; enfin, λ_n est $\geqq 3$ (sauf légères modifications, il suffirait de prendre habituellement pour les raisonnements $\lambda_n \geqq 2 + \varepsilon$, ε étant un nombre donné, positif et arbitrairement petit); dès lors, J est un nombre de Liouville à la condition nécessaire et suffisante que $\lim \lambda_n = \infty$ pour $n = \infty$ (c'est-à-dire que λ_n dépasse le nombre arbitrairement grand λ dès que n dépasse un certain nombre ν).

Je désignerai, pour abréger, l'ensemble de ces conditions sous le nom de *conditions* (2).

On remarquera d'abord que, quand J est réel, il en est de même de J_n; en effet, soit J réel, $i_n = \frac{p_n}{Q_n}$, $i'_n = \frac{p'_n}{Q_n}$; on a

$$|J - J_n|^2 = (J - i_n)^2 + i'^2_n,$$

d'où $p'^2_n \leqq Q_n^{2-2\lambda_n}$, d'après (2), ce qui exige $p'_n = 0$.

Soit J réel ou non. Je considère une fraction rationnelle irréductible $J' = \frac{P'}{Q'}$ à dénominateur entier réel et positif $Q' > 1$, et

---

[1] Voir *I. T. N. T.*, p. 25 (ces abréviations désigneront mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1906).

n'appartenant pas à la suite (1), c'est-à-dire qu'il n'y a dans cette suite aucune fraction *égale;* je pose

(3) $$|J - J'| = Q'^{-\alpha'},$$

et soit α un nombre donné arbitraire $\geqq 3$; deux cas sont possibles :

1° On pourra choisir $\alpha = \mu$ de façon qu'il n'y ait aucune fraction J' pour laquelle $\alpha' \geqq \mu$; alors toutes les fractions J' n'appartenant pas à la suite (1) satisfont à la condition

(4) $$\alpha' < \mu, \qquad |J - J'| = Q'^{-\alpha'} > Q'^{-\mu}.$$

Je dirai que la suite (1) est une *suite complète* de fractions *caractéristiques* d'approximation de J. En effet, cette suite renferme toutes les fractions d'approximation (ou les réduites quand J est réel) qui peuvent servir à caractériser le nombre J comme nombre de Liouville, et que, pour ce motif, on peut appeler *caractéristiques* [1], c'est-à-dire toutes les fractions $J'' = \frac{P''}{Q''}$, où Q est réel, positif et premier à P'', avec

(5) $$|J - J''| = Q''^{-\alpha''}$$

en nombre infini, qui satisfont à la condition $\alpha'' > \beta$, où β est un nombre positif arbitrairement grand. Mais, bien entendu, quand on dira qu'une pareille fraction J'' est *caractéristique*, il ne faudra pas oublier que cette expression ne s'applique pas strictement à une fraction donnée fixe, mais à une fraction variable, laquelle appartient à une suite de fractions qui tendent vers J, et qui satisfait à (5) avec $\alpha'' > \beta$, cette suite étant même, si l'on veut, soumise aux conditions (2).

2° Pour toute valeur donnée μ de α, il y a une infinité de fractions J' telles que $\alpha' \geqq \mu$. On dira que la suite (1) est *incomplète :* il y a une infinité de fractions caractéristiques que cette suite ne renferme pas [2].

---

(1) Ce sont ces fractions qui interviennent dans mon énoncé de la fin de la page 44 (et même page ligne 15 en remontant) de mon *I. T. N. T.*, comme cela ne peut faire de doute d'après la démonstration.

(2) On doit remarquer que si, parmi les conditions (2), on supprime la con-

En vue des applications, il y a intérêt à savoir reconnaître si une suite (1) est complète. Je vais à cet égard indiquer une condition *suffisante*, en me bornant au cas où les fractions J_n, J', J'' et les nombres J sont réels. Alors, d'après les conditions (2) (voir *I. T. N. T.*, p. 5, n° 8), J_n est une réduite $\frac{\varpi_k}{\chi_k}$ de J, d'un certain rang k, qui croît avec n (par extension, quand J est négatif, j'appelle *réduite de* J celles de $|J|$ affectées du signe —).

III. On a toujours le droit de poser, la suite (1) étant complète ou non,

$$(6)\qquad Q_n^{\lambda_n} = Q_{n+1}^{\mu_n}.$$

Je vais d'abord montrer que le nombre μ_n ainsi défini *est limité supérieurement*. En effet, on a [*I. T. N. T.*, p. 5, n° 6, inégalité (7)], les J_n étant d'abord supposés irréductibles,

$$(7)\qquad |J - J_n| = \frac{\varepsilon_k}{\chi_k\chi_{k+1}} = Q_n^{-\lambda_n} = Q_{n+1}^{-\mu_n} \qquad \left(\frac{1}{2} < \varepsilon_k < 1\right),$$

et $Q_{n+1} \geqq \chi_{k+1}$, puisque $J_{n+1} \neq J_n$; donc

$$Q_{n+1}^{\mu_n} = Q_n^{\lambda_n} = \frac{\chi_k\chi_{k+1}}{\varepsilon_k}, \qquad Q_{n+1} \geqq \chi_{k+1} \geqq \varepsilon_k Q_n^{\lambda_n - 1},$$
$$Q_n^{\lambda_n} \geqq \varepsilon_k^{\mu_n} Q_n^{\mu_n(\lambda_n-1)} > Q_n^{\mu_n(\lambda_n-2)},$$

puisque $Q_n \geqq 2$; alors

$$(8)\qquad \mu_n \leqq \frac{\lambda_n \mathrm{L} Q_n}{\mathrm{L}\varepsilon_k + (\lambda_n - 1)\mathrm{L}Q_n} < \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 2}.$$

Donc, η étant un nombre positif donné arbitrairement petit, lorsque n dépasse un certain nombre ν qui dépend de η, on a

$$\mu_n \leqq 1 + \eta;$$

même, lorsque $Q_{n+1} = \chi_{k+1}$, la première inégalité (8) se transforme en égalité, et μ_n est compris entre

$$1 + \frac{1}{\lambda_n - 1} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{2}{\lambda_n - 2}.$$

---

dition que $\frac{P_n}{Q_n}$ soit irréductible, J ne cesse pas d'être un nombre de Liouville, et la distinction entre les suites complètes et incomplètes se fait comme dans le n° II, J' étant encore pris irréductible, de façon qu'il n'y ait dans la suite (1) aucune fraction *égale* à J'.

L'inégalité (8) se conserve quand la suite Σ n'est plus assujettie à ne contenir que des fractions irréductibles, tout en continuant à satisfaire aux autres conditions (2), si l'on suppose qu'aucune des fractions de Σ n'est égale à un entier ([1]). Il suffira, pour le montrer, puisque $Q_n \geqq \chi_k$, de voir que $Q_{n+1} \geqq \chi_{k+1}$, car les calculs ci-dessus, qui conduisent à l'inégalité (8), subsistent alors identiquement, et l'on a encore $\mu_n \leqq 1 + \eta$ pour $n > \nu$ comme ci-dessus.

En effet, réduisant les fractions de Σ, on obtient une suite Σ_1 de fractions irréductibles $j_n = \frac{r_n}{s_n}$ que l'on peut supposer rangées par ordre de dénominateurs non décroissants, avec $s_{n+1} \geqq s_n$,

$$(8\ bis) \qquad |J - j_n| = s_n^{-l_n}, \quad s_n^{\beta_n} = Q_m \qquad (j_n = J_m,\ l_n = \lambda_m \beta_n \geqq 3,\ \beta_n \geqq 1).$$

D'après cela, s_n étant $\geqq 2$, deux de ces fractions

$$j = \frac{r}{s}, \qquad j' = \frac{r'}{s'}$$

ne peuvent avoir même dénominateur, sans quoi on aurait

$$\frac{1}{s} \leqq |j - j'| \leqq |J - j| + |J - j'| = s^{-l} + s^{-l'},$$

avec $s \geqq 2$, l et $l' \geqq 3$, ce qui est impossible; donc $s_{n+1} > s_n$. Soit

$$s_n^{l_n} = s_{n+1}^{m_n},$$

et, par exemple,

$$j_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} = J_{m'} = \frac{P_{m'}}{Q_{m'}} \qquad (m' \neq m,\ Q_{m'} = s_{n+1}^{\beta_{n+1}}).$$

On va vérifier que l'on a, si $Q_{m'} = Q_m^{\sigma}$, $\sigma > 1$.

Or

$$s_n^{\beta_n \sigma} = s_{n+1}^{\beta_{n+1}} = s_n^{\frac{l_n \beta_{n+1}}{m_n}},$$

$$3 \leqq \lambda_m = \frac{l_n}{\beta_n} = \frac{\sigma m_n}{\beta_{n+1}} < \frac{\sigma l_n}{l_n - 2},$$

d'après (8), puisque la suite Σ_1 satisfait à (8); donc

$$(8\ ter) \qquad \sigma > 3 - \frac{6}{l_n} \geqq 1.$$

([1]) D'après (2), on voit de suite que Σ ne pourrait contenir plus d'une fraction égale à un entier, fraction que l'on peut supprimer [note ([2]) ci-après, p. 80, avant *Remarque* I].

Le fait que $Q_{m'}$ est plus grand que Q_m suffit à montrer que

$$J_n = j_n, \qquad m = n, \qquad Q_{n+1} \geqq s_{n+1} > s_n,$$

par suite que l'on a, en même temps que $Q_n \geqq s_n = \chi_k$,

$$Q_{n+1} \geqq s_{n+1} \geqq \chi_{k+1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons trouvé pour μ_n une limite supérieure; mais il n'y a pas forcément de limite inférieure; on imagine immédiatement des nombres de Liouville sur lesquels on peut le vérifier ([1]). Dans le cas où il existe une pareille limite inférieure, c'est-à-dire où il y a un nombre fixe positif ρ tel que

$$(9) \qquad \mu_n \geqq \rho > 0,$$

on peut vérifier que la suite (1) *est complète.*

En effet, je reprends la fraction J' réelle, irréductible, et n'appartenant pas à (1), qui donne lieu à l'égalité (3), avec $\alpha' \geqq 3$ et $Q' \geqq Q_1 > 1$; cette fraction J' est une réduite de J (*I. T. N. T.*, p. 5, n° 8). Q' est compris entre deux dénominateurs consécutifs Q_n, Q_{n+1} de deux fractions J_n, J_{n+1} de (1); on n'a pas $Q' = Q_n$,

---

([1]) Par exemple, il en sera ainsi pour les fractions continues ordinaires dont les quotients incomplets $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ont une limite supérieure fixe, sauf $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_s}, \ldots (n_1 < n_2 < \ldots < n_s < \ldots)$, où a_{n_s} est une fonction donnée de n_s croissant assez rapidement avec n_s pour que la fraction continue soit un nombre de Liouville, tandis que $n_s - n_{s-1}$ croît assez vite avec s. Si l'on pose, en effet,

$$\frac{P_s}{Q_s} = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{n_s - 1},$$

où $\frac{P_s}{Q_s}$ est la réduite d'indice n_s, P_s et Q_s étant premiers entre eux, $Q_s^{\lambda_s}$ sera de l'ordre de a_{n_s}, et $Q_{s+1} \geqq 2^{\nu_s}$, où $\nu_s = \frac{n_{s+1}}{2} - 1$ (voir *I. T. N. T.*, p. 3 et 42).

De même, soit un nombre J réel de Liouville défini par une suite (1) ou Σ satisfaisant à la condition (9); on peut toujours, et d'une infinité de manières, déduire de Σ une autre suite complète analogue Σ_2 de la forme (1), qui ne satisfait pas à une condition de la forme (9), mais dont les fractions ne sont pas toutes irréductibles. Pour une infinité de valeurs de n qui diffèrent de deux unités au moins, on remplacera $\frac{P_n}{Q_n}$ par $\frac{P_{1n}}{Q_{1n}}$, avec

$$P_{1n} = c_n P_n, \qquad Q_{1n} = c_n Q_n = Q_n^{\varphi_n}, \qquad \varphi_n \varphi'_n = \lambda_n,$$

en supposant que φ_n et φ'_n croissent au delà de toutes limites avec n (par exemple $\varphi_n = \varphi'_n = \sqrt{\lambda_n}$).

car si cette égalité avait lieu, il faudrait qu'on ait

$$\frac{1}{Q_n} \leqq \frac{|P' - P_n|}{Q_n} = J' - J_n| \leqq |J - J_n| + |J - J'| = Q_n^{-\lambda_n} + Q_n^{-\alpha'},$$

résultat absurde ; en vertu du même raisonnement, on n'a pas non plus $Q' = Q_{n+1}$; donc $Q_n < Q' < Q_{n+1}$. J' étant la réduite $\frac{\varpi_{k+l}}{\chi_{k+l}}$ d'indice $k+l$ $(l \geqq 1)$, on a, d'après (3) et (7),

$$Q' \geqq \chi_{k+1} \geqq \varepsilon_k Q_n^{\lambda_n - 1},$$

$$Q_{n+1} \geqq \chi_{k+l+1} \text{ (1) } \geqq \varepsilon_{k+l} Q'^{\alpha'-1} \geqq \varepsilon_{k+l}(\varepsilon_k Q_n^{\lambda_n} - 1)^{\alpha'-1},$$

et, d'après (6),

$$2^{\alpha'} Q_{n+1} = 2^{\alpha'} Q_n^{\frac{\lambda_n}{\mu_n}} \geqq Q_n^{(\lambda_n - 1)(\alpha' - 1)};$$

donc on a, *a fortiori*, puisque $Q_n > 1$,

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n} + \alpha' \geqq (\lambda_n - 1)(\alpha' - 1),$$

$$(10) \qquad \alpha' \leqq \frac{\frac{\lambda_n}{\mu_n} + \lambda_n - 1}{\lambda_n - 2}.$$

Cette inégalité est indépendante de la condition (9) ; quand cette dernière est réalisée, $\frac{1}{\mu_n} \leqq \frac{1}{\rho}$, et

$$(11) \qquad \alpha' \leqq \frac{\lambda_n\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) - 1}{\lambda_n - 2},$$

en sorte que α' est limité supérieurement, quel que soit n, le deuxième membre ayant la limite $1 + \frac{1}{\rho}$ pour $n = \infty$. La fraction J' satisfait à la condition (4) pour une valeur convenable de μ, et, par conséquent, comme on l'avait annoncé, *la condition* (9) *est suffisante pour que la suite* (1), *formée ou non de fractions irréductibles, soit complète* (2).

---

(1) Dans le cas où la suite (1) ou Σ n'est pas formée de fractions J_n toutes irréductibles, cette inégalité s'obtient en adjoignant à Σ entre J_n et J_{n+1} la fraction J', et appliquant à la suite Σ' ainsi obtenue les raisonnements faits précédemment sur Σ et Σ_1 pour aboutir à (8 *ter*).

(2) On observera en général que si, dans une suite complète, on supprime ou

Voici encore une autre conséquence de l'inégalité (10). Je suppose que la condition (9) soit satisfaite, non pour toute valeur de n, mais pour une infinité de valeurs n_1 de n. La fraction J' ne peut être comprise entre J_{n_1} et J_{n_1+1} que si (11), où $n = n_1$, a lieu; dès que n_1 dépasse une certaine limite ne dépendant, si l'on veut, que de J, J_{n_1} et J_{n_1+1} sont deux fractions d'approximation caractéristiques *consécutives* dans une suite complète de J.

Remarque I. — On peut retrouver ces résultats autrement. L'égalité (6) donne, en prenant les logarithmes, que les J_n soient ou non irréductibles,

$$\lambda_n \mathrm{L}Q_n = \mu_n \mathrm{L}Q_{n+1}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{n+r}\mathrm{L}Q_{n+r} = \mu_{n+r}\mathrm{L}Q_{n+r+1},$$

et, multipliant membre à membre,

$$\lambda_n \ldots \lambda_{n+r}\mathrm{L}Q_n = \mu_n \ldots \mu_{n+r}\mathrm{L}Q_{n+r+1}.$$

Si l'on extrait de la suite Σ une suite analogue Σ_2 satisfaisant aux conditions (2),

$$j_s = \frac{b_s}{c_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

de façon qu'il y ait dans Σ une infinité de fractions qui ne figurent pas dans Σ_2, on aura, pour une infinité de valeurs de s, par suite de n,

$$j_s = J_n, \qquad j_{s+1} = J_{n+r+1}; \qquad r > 0, \qquad q_s = Q_n, \qquad q_{s+1} = Q_{n+r+1};$$

la relation analogue à (6) pour Σ_2 étant

$$l_s \mathrm{L} c_s = m_s \mathrm{L} c_{s+1} = \lambda_n \mathrm{L}Q_n = m_s \mathrm{L}Q_{n+r+1},$$

on a, d'après (8),

$$(9\,bis) \qquad m_s = \frac{\mu_n \ldots \mu_{n+r}}{\lambda_{n+1}\ldots\lambda_{n+r}} \leqq \frac{1+\eta_n}{\lambda_{n+1}},$$

et $\lim \eta_n = 0$ pour n et s infinis : m_s tend vers zéro quand n croît indéfiniment, c'est-à-dire que, ε_1 étant un nombre positif quel-

---

ajoute un nombre fini de termes satisfaisant aux conditions (2), la nouvelle suite obtenue est encore complète. De même, pour tout nombre de Liouville réel J, la suite des réduites renferme nécessairement une suite complète de J (c'est-à-dire suffisante pour définir J), puisque toute fraction d'approximation caractéristique est une réduite.

conque arbitrairement petit, il y a un nombre χ croissant indéfiniment quand ε_1 tend vers zéro et tel que, pour une infinité de valeurs de $s \geqq \chi$, on a $m_s < \varepsilon$.

Or une suite incomplète est de la forme Σ_2, et l'on voit qu'elle ne peut satisfaire à une condition de la forme (9). Ceci démontre à nouveau qu'une suite qui satisfait aux conditions (6) et (9) est une suite complète.

De même, je suppose que Σ_2 satisfasse à une condition de la forme (9) pour une infinité de valeurs s_1 de l'indice s ($m_{s_1} \geqq \rho > 0$); dès que s_1 dépasse une certaine limite ne dépendant si l'on veut que de J, j_{s_1} et j_{s_1+1} ne peuvent donner lieu à aucune inégalité de la forme (9 *bis*) et sont par suite deux fractions caractéristiques d'approximation *consécutives* dans une suite complète de J.

Remarque II. — J'ai considéré antérieurement (*I. T. N. T.*, p. 230-233) des irrationnelles réelles J qui sont *régulières* dans ma première classification des fractions continues, et sont aussi des nombres de Liouville. Je vais vérifier que, avec la condition $k \geqq 3$ de la page 232 de cet Ouvrage, la suite de leurs réduites successives est, à partir d'un certain terme, une suite complète qui satisfait aux conditions (6) et (9). En effet, soit ici $J_n = \frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite : on a [*I. T. N. T.*, p. 232, équation (10_6)]

$$Q_n = Q_{n+1}^{\varepsilon''_n}$$

et [*I. T. N. T.*, p. 233, équation (12_6)]

$$Q_n^{\lambda_n} = Q_{n+1}^{1+\eta_n}, \tag{12}$$

où ε''_n et η'_n tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, si l'on pose encore

$$|J - J_n| = Q_n^{-\lambda_n}.$$

On voit que λ_n croît indéfiniment avec n, et que, dès lors, à partir d'une certaine valeur ν de n, on a $\lambda_n \geqq 3$ (ou $2+\varepsilon$) avec $Q_n > 1$. A partir de cette valeur, les termes de la suite des réduites satisfont aux conditions (12) et, en outre, aux conditions (6) et (9); ils forment donc une suite complète de J, en vertu de ces deux dernières conditions. On notera qu'ici $\lim \mu_n = 1$ pour $n = \infty$ [1].

IV. La considération des suites (1) complètes conduit à des conséquences intéressantes, comme on va le voir.

Je rappelle d'abord ici la définition que j'ai donnée d'un type de groupes de nombres de Liouville au point de vue des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique (*I. T. N. T.*, p. 34, et *Bull. Soc. math.*, 1907, p. 28; *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, J. Molk, t. I, vol. 3, fasc. 4, p. 381).

Soit [2] J un nombre de Liouville, réel ou imaginaire, défini comme limite d'une suite Σ, analogue à la suite (1), où provisoirement on ne suppose pas nécessairement $J_n = \frac{P_n}{Q_n}$ irréductible, c'est-à-dire que p_n, p'_n, Q_n peuvent avoir un diviseur commun. Soit maintenant J' un autre nombre de Liouville défini par une suite de fractions $J'_n = \frac{P'_n}{Q'_n}$ de même nature que Σ, et

$$|J - J_n| = Q_n^{-\lambda_n}, \qquad |J' - J'_n| = Q'^{-\lambda'_n}_n.$$

Soit encore

$$Q'_n = Q_n^{\sigma'_n}, \qquad \lambda'_n = \tau'_n \lambda_n, \quad Q_{n+1} > Q_n, \quad Q'_{n+1} > Q'_n. \tag{13}$$

J'envisage tous les nombres de Liouville J' ayant les propriétés

---

(1) On pourrait aussi remarquer, indépendamment des conditions (6) et (9), que toute suite (1) de fractions irréductibles dont les termes satisfont aux conditions (2) et constituent toutes les réduites du nombre réel J depuis la $\nu_1^{\text{ième}}$ (ν_1 arbitraire donné) est nécessairement complète, et que, d'après le début du n° III, on a $\lim \mu_n = 1$ pour $n = \infty$.

(2) Les définitions analogues données en détail dans mon *I. T. N. T.*, soit page 27, soit page 33-34, ne prêtent pas à ambiguïté. En voulant indiquer sous forme abrégée, dans le *Bull. Soc. math.*, 1907, page 28, une définition à peu près semblable à celle de mon *I. T. N. T.*, page 33-34, j'ai employé, en étant trop concis, un langage qui peut paraître ambigu, ou même inexact. Il n'est pas difficile de l'éclaircir ou de le rectifier en étudiant la démonstration du théorème I du *Bull. Soc. math.*, 1907, page 30. La rectification consistera à ajouter après les mots « communes », page 28, ligne 16, et « commun », même page, ligne 18, ces mots explicatifs : « en ce qui concerne chacun des nombres I', I'', ... »; c'est-à-dire que, par exemple, pour le nombre I', σ'_{n_1} a une limite inférieure fixe (>0) et une supérieure, τ'_{n_1} a une limite inférieure fixe (>0) [conditions reproduites dans les inégalités (14) ci-après, et dont je me suis toujours servi dans les applications, notamment dans le théorème I précité du *Bull. Soc. math.*].

suivantes : il y a une série S de valeurs n_1, n_2, ..., de n, en nombre infini, les mêmes pour tous les nombres J′, telle qu'on ait, pour ces valeurs de n,

$$(14) \qquad \sigma' > \sigma'_n > s' > 0 \quad \text{et} \quad \tau'_n > \tau' > 0,$$

où σ', s', τ' sont des nombres fixes, indépendants de n, *mais qui peuvent varier avec* J′. L'ensemble des nombres J′ (lequel comprend J) et des nombres rationnels réels ou imaginaires forme un groupe G au point de vue des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique; autrement dit, une fonction rationnelle, à coefficients rationnels ou imaginaires des nombres du groupe est un nombre qui appartient au groupe. On peut le vérifier comme dans mon *I. T. N. T.*, pages 27 et suivantes, ou comme dans la démonstration du théorème I de ma Note précitée du *Bull. Soc. math.*, 1907, page 30.

Ces propriétés subsistent quand on n'astreint pas τ'_n, pour la suite S des valeurs de n, à la condition (14), étant toujours entendu que $\lim \lambda'_n$ et $\lim \lambda_n$ sont infinies pour $n = \infty$.

A tout nombre de Liouville J et à toute suite Σ le définissant correspond toujours un pareil groupe G, de quelque façon qu'on choisisse S, car ce groupe contiendra toujours au moins les fonctions rationnelles de J, à coefficients rationnels réels ou imaginaires, fonctions qui forment, avec les nombres rationnels, réels ou imaginaires, un sous-groupe G′ de G.

Les propriétés précédentes se conservent quand on astreint J et les J′ à être réels, en leur adjoignant seulement les nombres rationnels réels. Dans ce cas, soient G_1 et G'_1 les groupes analogues à G et G′: ce sont des sous-groupes de G et G′, formés par ceux de leurs nombres qui sont réels.

A J et à chaque suite S correspondront ainsi des groupes G et G_1 (J étant réel dans le cas de ce dernier groupe), qui peuvent ne pas être les mêmes quand on fait varier S. Pour plus de précision, j'appelle G(S), G_1(S) les groupes G, G_1 correspondant à S, et soit S_1 une suite analogue à S, et dont les nombres appartiennent à S.

1° S'il n'y a qu'un nombre fini des valeurs de n comprises dans S qui n'appartiennent pas à S_1, on a

$$G(S) = G(S_1), \qquad G_1(S) = G_1(S_1).$$

2° S'il y en a un nombre infini, $G(S_1)$ et $G_1(S_1)$ contiennent respectivement $G(S)$ et $G_1(S)$, car tout nombre de Liouville J' satisfaisant à (13) et (14) pour la suite S y satisfait aussi pour la suite S_1.

3° Tous ces groupes contiennent respectivement les groupes qu'on peut désigner par $G(\Sigma)$ et $G_1(\Sigma)$, et qui correspondent au cas où S est formé de nombres consécutifs et contiennent, *a fortiori*, G' et G'_1.

4° Si la suite des fractions de Σ appartient à une autre suite Σ_1 définissant également J, $G(\Sigma)$ et $G_1(\Sigma)$ contiennent $G(\Sigma_1)$ et $G_1(\Sigma_1)$ respectivement.

V. Pour définir $G(S)$, on peut toujours remplacer Σ par la suite Σ_2 obtenue en supprimant dans Σ toutes les fractions dont l'indice n n'appartient pas à la suite S, et en changeant la numérotation des indices, de façon qu'ils soient consécutifs dans Σ_2; de même pour $G_1(S)$. On ne diminue donc pas la généralité en n'étudiant que les groupes $G(\Sigma)$ et $G_1(\Sigma)$. Peut-être reviendrai-je sur ce sujet plus tard.

VI. *Propriétés du sous-groupe* $G'_1(\Sigma)$. — Soient le nombre réel de Liouville J, et $F_1(x)$ une fonction rationnelle quelconque de x à coefficients entiers réels; soit encore, en supposant $n > \nu$, où ν est un nombre fixe suffisamment grand,

$$(15) \qquad h_1(x) = a_0 x^p + \ldots + a_p, \qquad F(x) = b_0 x^p + \ldots + b_p,$$

où les a_i, b_i sont entiers réels, un des deux coefficients a_0, b_0 étant $\neq 0$,

$$F_1(x) = \frac{h_1(x)}{F(x)}, \qquad J_n = \frac{P_n}{Q_n}, \qquad Q_n^p h_1(J_n) = h_1(P_n, Q_n) = \varphi_n,$$
$$Q_n^p F(J_n) = F(P_n, Q_n) = \psi_n,$$
$$(16) \qquad J'_n = F_1(J_n) = \frac{\varphi_n}{\psi_n}.$$

Les $J' = F_1(J)$ forment le sous-groupe de $G_1(\Sigma)$ désigné précédemment (n° IV) par $G'_1(\Sigma)$ ou G'_1. J'indiquerai par θ_1, θ_2, ...

des quantités qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$; on a

$$(17) \qquad \varphi_n = Q_n^{p+\theta_1}, \qquad \psi_n = Q_n^{p+\theta_2},$$

car, lorsque n croît indéfiniment, J_n tend vers J, et $h_1(J_n)$, $F(J_n)$ tendent vers $h_1(J)$, $F(J)$ qui sont $\neq 0$.

D'autre part, si

$$\zeta_n = J - J_n, \qquad A_n = F'_1(J_n + \gamma\zeta_n), \qquad \text{avec} \quad 0 < \gamma < 1,$$

on a

$$(18) \qquad \begin{cases} J' = F_1(J) = F_1(J_n) + A_n\zeta_n = J'_n + A_n\zeta_n, \\ |J' - J'_n| = |A_n\zeta_n| = |A_n| Q_n^{-\lambda_n} = \psi_n^{-l_n}: \end{cases}$$

$F'_1(J)$ est $\neq 0$, en sorte que $|A_n|$ reste compris, pour $n > \nu$, entre deux nombres fixes donnés > 0 [1]. On en déduit d'abord, si $\psi_n^{l_n} = \psi_{n+1}^{m_n}$, d'après (6), (16) et (17),

$$(19) \qquad \psi_n^{l_n} = Q_n^{\lambda_n+\theta_3} = Q_n^{l_n(p+\theta_4)} = Q_{n+1}^{m_n(p+\theta_5)} = Q_n^{m_n(p+\theta_6)\frac{\lambda_n}{\mu_n}}.$$

On voit aussitôt que $\frac{pl_n}{\lambda_n}$ et $\frac{pm_n}{\mu_n}$ ont pour limites l'unité quand n croît indéfiniment. On vérifie en particulier que, si (9) a lieu pour les μ_n, une condition analogue a lieu pour les m_n, et inversement. D'autre part, d'après (8), (17) et (19), avec les notations de (13), on a, que (9) soit ou non vérifié pour les μ_n, puisque ψ_n remplace Q'_n,

$$\lim \sigma'_n = p, \qquad \lim \tau'_n = \lim \frac{l_n}{\lambda_n} = \frac{1}{p}, \qquad \mu_n \leqq 1 + \theta_6, \qquad m_n \leqq \frac{1+\theta_7}{p}.$$

On trouve ainsi pour les nombres du groupe $G'_1(\Sigma)$ ces résultats : lorsque Σ satisfait à une condition de la forme (9), il en est de même des suites analogues Σ' des J'_n relatives aux nombres J' et il y a réciprocité : la suite Σ' des J'_n relative à un des nombres J' ne peut satisfaire à une condition de la forme (9) que s'il en est de même de Σ et de toutes les suites Σ' relatives aux nombres J' de $G'_1(\Sigma)$.

VII. *Propriétés du sous-groupe* $G'_1(\Sigma)$ (suite). — Je vais exa-

---

[1] Les fractions J'_n sont inégales, car

$$|\zeta_n|^{-1} = Q_{n+1}^{\mu_n}, \qquad |\zeta_{n+r}|^{-1} = Q_{n+r}^{\lambda_{n+r}}$$

et

$$|A_n\zeta_n| > |A_{n+r}\zeta_{n+r}| \quad \text{quand} \quad r \geqq 1.$$

miner spécialement le cas où $J_n = \frac{P_n}{Q_n}$ est irréductible, et je pose

$$\varphi_n = D_n P'_n, \qquad \psi_n = D_n Q'_n, \tag{19 bis}$$

D_n étant le plus grand commun diviseur de φ_n et ψ_n, en sorte que P'_n et Q'_n sont premiers entre eux, $J'_n = \frac{P'_n}{Q'_n}$ est irréductible; pour le nombre J', la suite Σ' sera celle de ces dernières fractions irréductibles.

J'établis d'abord un lemme préliminaire dont un cas particulier joue un rôle fondamental dans l'étude et la détermination des points entiers des courbes unicursales.

Lemme. — « Soit les fonctions rationnelles de x

$$F_1(x) = \frac{h_1(x)}{F(x)}, \quad \ldots, \quad F_k(x) = \frac{h_k(x)}{F(x)} \quad (k \geqq 1), \tag{20}$$

dont aucune ne se réduit à une constante, où $h_1, \ldots, h_k$, F sont des polynomes à coefficients entiers réels, et qui n'ont aucun polynome diviseur commun. Soit encore p le plus grand des degrés des polynomes $h_1, \ldots, h_k$, F,

$$h_i(x) = a_0^i x^p + \ldots + a_p^i, \qquad F(x) = b_0 x^p + \ldots + b_p, \tag{21}$$

un des coefficients a_0^i, b_0 étant $\neq 0$ par hypothèse. »

Je désigne par $\frac{P}{Q}$ une fraction irréductible, positive ou négative, avec $Q > 0$, et qui, quand on la substitue à x, n'annule aucun de ces $k+1$ polynomes, et je pose

$$Q^p h_i\left(\frac{P}{Q}\right) = h_i(P, Q), \qquad Q^p F\left(\frac{P}{Q}\right) = F(P, Q).$$

Alors, soient D le plus grand commun diviseur arithmétique des $k+1$ nombres $h_i(P, Q)$, $F(P, Q)$; β le plus grand commun diviseur des nombres a_0^i, b_0 : D divise $A\beta^\lambda$, où λ est limité en fonction de n et k, et où A est un polynome entier à coefficients entiers, indépendant de P et Q, et formé avec les coefficients des $k+1$ polynomes $h_i(x)$ et $F(x)$.

Ce lemme se trouve, au fond, déjà presque entièrement établi dans le n° XVIII de mon Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 20e cahier, 1919, p. 152-154. La démonstration publiée, basée sur l'identité de Bezout, se borne au cas où $D = F(P, Q)$; mais, en suivant identiquement les raisonnements et les calculs de ce n° XVIII, presque sans changement, on voit que D divise AQ^λ, en sorte qu'il me suffit, pour ce résultat, de renvoyer à ce numéro.

D'autre part, soit α_0 le plus grand commun diviseur de Q, des $h_i(P, Q)$ et de $F(P, Q)$, c'est-à-dire de Q et de D : c'est aussi celui de Q, des a_0^i et de b, et α_0 divise β.

$Q_1 = \frac{Q}{\alpha_0}$, les nombres $\frac{h_i(P, Q)}{\alpha_0}$, $\frac{F(P, Q)}{\alpha_0}$ n'ont pas de diviseur commun, pas plus que Q_1 et $\frac{D}{\alpha_0}$; dès lors, $\frac{D}{\alpha_0}$ divisant $\frac{AQ^\lambda}{\alpha_0} = A\alpha_0^{\lambda-1}Q_1^\lambda$, et étant premier à Q_1, divise $A\alpha_0^{\lambda-1}$; D divise $A\alpha_0^\lambda$, par suite $A\beta^\lambda$. C. Q. F. D.

Je me servirai ci-après de ce lemme en supposant $k = 1$; la démonstration directe dans ce cas est assez simple, et l'on peut prendre alors $\lambda = 2p - 1$.

D'après (16), (17), (19 *bis*) et ce lemme, D_n a une limite supérieure Δ indépendante de n, et l'on peut écrire

(17 *bis*) $$P'_n = Q_n^{p+\theta'_1}, \qquad Q'_n = Q_n^{p+\theta'_2};$$

en indiquant par $\theta'_1, \theta'_2, \ldots$ des quantités qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On peut alors raisonner avec P'_n, Q'_n, λ'_n, μ'_n comme on l'a fait au n° VI avec φ_n, ψ_n, l_n, m_n à propos de (18) et (19); les conclusions en ce qui concerne λ'_n, μ'_n et les suites Σ' des fractions irréductibles $\frac{P'_n}{Q'_n}$ sont identiquement les mêmes que pour l_n, m_n et les suites Σ' des fractions $\frac{\varphi_n}{\psi_n}$. Ainsi, par exemple, $\frac{p\lambda'_n}{\lambda_n}$, $\frac{p\mu'_n}{\mu_n}$ ont pour limites l'unité quand n croît indéfiniment, et

$$\lim \sigma'_n = p, \qquad \lim \tau'_n = \lim \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \frac{1}{p}, \qquad \mu_n \leqq 1 + \theta'_6, \qquad \mu'_n \leqq \frac{1 + \theta'_7}{p};$$

la suite Σ' des $\frac{P'_n}{Q'_n}$ ne peut satisfaire à une condition de la forme (9) pour un des nombres J' que s'il en est de même de Σ et de toutes les suites Σ' relatives aux nombres J' de $G'_1(\Sigma)$; ici les suites Σ et Σ'

sont toutes formées de fractions irréductibles. Lorsque $p > 1$, deux fractions consécutives de Σ' ne sont pas deux réduites consécutives de J', d'après ce qu'on a vu à propos de (8), puisque

$$p\mu_n \leq 1 + \theta'_7.$$

Voici une application de ce qui précède et du n° VI.

Soit la fonction Rx^p, où $R = \frac{p'}{q'}$ (p', q' entiers réels et premiers entre eux) est un nombre rationnel, et le nombre réel de Liouville RJ^p limite des fractions $\frac{p'P_n^p}{q'Q_n^p}$ formant une suite Σ'. On peut, comme dans (16), poser

$$\varphi_n = p'P_n^p, \qquad \psi_n = q'Q_n^p$$

ou réduire ces fractions à leur plus simple expression, P_n et Q_n étant dans ce dernier cas premiers entre eux.

Envisageant alors Σ et l'ensemble des suites Σ' relatives aux diverses valeurs en nombre infini de p, p', q', si une des suites Σ, Σ' satisfait à une condition de la forme (9), par suite est complète, il en est de même de toutes les autres.

DEUXIÈME PARTIE.

VIII. L'étude des nombres transcendants, indépendamment de la question de savoir s'il y en a, semble devoir comporter dès l'abord d'importants et difficiles problèmes généraux, notamment les suivants :

1° Définir des catégories particulières de pareils nombres, ou encore reconnaître si un nombre donné est transcendant.

Ainsi, on sait depuis de longues années que e, π et les nombres de Liouville sont transcendants. Soit encore

$$(22) \qquad \nu = a_1 e^{b_1} + \ldots + a_k e^{b_k},$$

où ν et les a_i ne sont pas tous nuls; si $b_1, \ldots, b_k$ sont des nombres distincts et $\neq 0$, on sait, d'après le théorème de Lindemann, que l'un des nombres ν, $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ est transcendant. De mon côté, j'ai établi l'existence de nombres transcendants d'origine variée (fractions continues quasi périodiques, racines $p^{\text{ièmes}}$ de certains nombres de Liouville, etc.; *voir* mon *I. T. N. T.*).

2° Distinguer les nombres transcendants les uns des autres. A ce point de vue, ma classification des nombres transcendants (voir *I. T. N. T.*) a donné un moyen puissant d'investigation.

3° Former des groupes de nombres transcendants (auxquels on peut adjoindre les nombres rationnels ou des nombres algébriques) tels que les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique effectuées sur les nombres du groupe donnent des nombres du groupe. A chaque groupe de nombres (transcendants ou non d'ailleurs) correspond ainsi une arithmétique plus ou moins analogue à celle des nombres rationnels. J'ai indiqué (*voir*, par exemple, *I. T. N. T.* et ci-dessus) des exemples étendus de groupes de nombres de Liouville.

J'insisterai en particulier sur la question suivante. Dans le même ordre d'idées qu'à l'alinéa 2°, j'ai obtenu antérieurement le théorème suivant : « La condition nécessaire et suffisante pour que la racine $p^{\text{ième}}$ réelle positive d'un nombre N de Liouville réel et positif soit un nombre de Liouville est que ce nombre N renferme, parmi ses réduites *caractéristiques* [1], une infinité de puissances $p^{\text{ièmes}}$ exactes. » Une propriété analogue a d'ailleurs lieu pour un nombre N de Liouville imaginaire, les réduites caractéristiques étant alors remplacées par les fractions d'approximation caractéristiques, c'est-à-dire par celles qui satisfont à (5). On obtient ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^p = N \tag{23}$$

ait une racine qui soit un nombre de Liouville, et aussi, lorsque N est réel et positif, pour que cette racine soit réelle. En vue d'appliquer cette condition avec sûreté, il suffit de connaître la suite complète des fractions d'approximation caractéristiques de N, toutes réelles quand N l'est.

Il restait à vérifier qu'il y a bien des nombres de Liouville N qui ne sont puissances $p^{\text{ièmes}}$ d'aucun autre nombre de Liouville.

---

(1) *I. T. N. T.*, p. 44; au sujet de l'adjonction de ce mo , *voir* ci-dessus la note au bas de la page 3, n° II. *Voir*.encore *I. T. N. T.*, note au bas des pages 45-46.

Cela n'est pas évident *a priori*, et l'on peut se demander s'il n'y a pas de nombre de Liouville qui soit puissance $p^{\text{ième}}$ d'un autre nombre de Liouville, ou bien quel que soit p, ou bien pour une infinité de valeurs de p; on sait d'autre part que la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un nombre de Liouville est un nombre de Liouville.

J'ai pu opérer la vérification en question de deux façons différentes [*I.T.N.T.*, d'une part (1), p. 46-47; d'autre part, p. 236]. Cela n'était pas sans importance : quand $\xi = \sqrt[p]{\mathrm{N}}$ n'est pas un nombre de Liouville, c'est un nombre transcendant différent des nombres de Liouville.

IX. Ce résultat peut être étendu ou généralisé de diverses manières.

Soit le polynome

$$f(x) = x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p \qquad (p > 1), \tag{24}$$

(1) A propos de la première, je ferai la remarque suivante, en conservant les notations de *I. T. N. T.*, pages 46-47 :

1° J'aurais dû indiquer que les calculs de la page 46 sont faits dans l'hypothèse où c_n et c_{n+1} sont $\neq 0$, mais qu'ils s'étendent de suite au cas où $c_{n+1} = 0$;

2° Que les réduites désignées page 46 par $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ forment une série renfermant toutes les réduites caractéristiques; on le voit directement en quelques lignes si l'on raisonne comme on l'a fait pour arriver aux relations (10) ou (9 *bis*) du n° III précédent. Mais cela résulte aussi de ce n° III : en effet, si $0 \leqq c_n < q$ (n quelconque),

$$c_{m+1} = \ldots = c_{m+k-1} = 0, \qquad c_m \text{ et } c_{m+k} \neq 0,$$

on a ici

$$\mathrm{J}_n = \mathrm{P}_n \mathrm{Q}_n^{-1} = \mathrm{A} + \sum_1^n c_n q^{-2^{n^2}}, \qquad |\mathrm{J} - \mathrm{J}_m| < q^{1-2^{(m+k)^2}}$$

et, en posant

$$\mathrm{J}_m = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{J}_{m+k} = \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{S}_1}, \qquad \mathrm{S} = q^{2^{m^2}}, \qquad \mathrm{S}_1 = q^{2^{(m+k)^2}}$$

ces fractions étant irréductibles, on obtient

$$|\mathrm{J} - \mathrm{J}_m| = \theta \mathrm{S}_1^{-1} \qquad (1 < \theta < q).$$

Dès lors, ici, quand on envisage la suite Σ des fractions J_m, J_{m+k}, composée de fractions irréductibles, elle est de la forme (1); de plus, la quantité désignée par μ_n dans l'égalité (6) (où Q_n et Q_{n+1} sont remplacés par S et S_1) a évidemment pour limite l'unité, car $\theta^{-1}\mathrm{S}_1$ est la valeur du deuxième membre de (6). D'après (9) et ce qu'on a vu, au sujet de cette inégalité, dans le n° III, la suite Σ est une suite complète pour le nombre J, et en renferme toutes les réduites caractéristiques.

à coefficients entiers réels ou imaginaires ($a + bi$ est un entier imaginaire quand a, b sont des entiers réels, positifs ou négatifs, dont l'un peut être nul); je prends pour x un nombre de Liouville, réel ou imaginaire, défini par une suite Σ de fractions caractéristiques $x_m = \frac{r_m}{s_m}$ de la forme (1) et irréductibles au sens du n° II, s_m étant réel. On aura

$$|x - x_m| = s_m^{-\lambda_m},$$

$$J' = f(x) = f(x_m) \pm s_m^{-\lambda_m} f'(x_m \pm \gamma s_m^{-\lambda_m}) \qquad (0 < \gamma < 1),$$

$$J' = f(x_m) \pm s_m^{-\lambda'_m}, \qquad \lim \frac{\lambda'_m}{\lambda_m} = 1 \qquad \text{pour} \quad m = \infty;$$

$$J'_m = f(x_m) = \frac{r_m^p + a_1 r_m^{p-1} s_m + \ldots + a_p s_m^p}{s_m^p} = \frac{P'_m}{Q'_m},$$

où Q'_m est réel et n'a avec P'_m aucun facteur premier commun réel, est une fraction caractéristique de $f(x)$. Soit encore

$$(25) \qquad N_m = r_m^p + \ldots + a_p s_m^p, \qquad D_m = s_m^p.$$

1° Je me place d'abord dans le cas où x, x_m et les a_j, par suite aussi J', sont réels, c'est-à-dire que les nombres entiers ou rationnels que je considère sont les nombres ordinaires (ou naturels).

On notera en passant que, si la suite Σ satisfait alors à une condition de la forme (9), et, en conséquence, est complète, il en est de même pour la suite Σ' des fractions J'_m relatives à J', et réciproquement, d'après les n^{os} VI et VII.

Ici N_m est premier à D_m, et

$$(26) \qquad D_m = Q'_m, \qquad N_m = P'_m \equiv r_m^p \pmod{s_m}.$$

Quel que soit le nombre de Liouville réel x, le nombre de Liouville $f(x)$ est assujetti aux conditions (26). Or je vais montrer qu'on peut former des nombres J réels de Liouville tels que l'égalité

$$(27) \qquad J = f(x) = x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p \qquad (p > 1),$$

ne soit satisfaite par aucun nombre réel x de Liouville, et ceci quels que soient les entiers $p > 1$, a_1, ..., a_p, en sorte que les racines réelles des équations (27) corrélatives, qui sont évidemment des nombres transcendants, ne sont jamais des nombres de Liouville.

Pour le voir, on étendra l'exemple assez particulier, déjà rappelé au n° VIII, et que j'ai indiqué dans mon *I. T. N. T.*, p. 46-47. On prendra

$$(28) \qquad J = \sum_1^\infty b_k q^{-2^{\varphi_k}},$$

où q est premier et > 2, et b_k un entier qui est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de k et a une des valeurs $0, 1, \ldots, q-1$; φ_k est un entier positif qui croît avec k. Soit, par exemple,

$$b_r \text{ et } b_{r+s} \neq 0, \qquad b_{r+1} = \ldots = b_{r+s-1} = 0 \qquad (s \geqq 1);$$

je poserai

$$Q_n = q^{2^{\varphi_r}}, \qquad Q_{n+1} = q^{2^{\varphi_{r+s}}}, \qquad J_n = P_n Q_n^{-1} = \sum_1^r b_k q^{-2^{\varphi_k}},$$

et, comme dans (2),

$$(29) \qquad \begin{cases} |J - J_n| = Q_n^{-\lambda_n} = \theta_1 |b_{r+s}| q^{-2^{\varphi_{r+s}}} & (1 < \theta_1 \leqq q), \\ \lambda_n 2^{\varphi_r} Lq = 2^{\varphi_{r+s}} Lq - L\theta_1 - L|b_{r+s}|; \end{cases}$$

il suffira que $\varphi_{r+s} - \varphi_r$ croisse indéfiniment (¹) avec n pour que J soit un nombre de Liouville; ici b_r est le $n^{\text{ième}}$ de ceux des nombres b_k qui sont $\neq 0$. Avec ces conditions, la suite des fractions irréductibles J_n est une suite complète de la forme (1), car, d'après (6) et (29),

$$Q_n^{\lambda_n} = Q_{n+1}^{\mu_n} = \frac{Q_{n+1}}{\theta_1 |b_{r+s}|},$$

en sorte que $\lim \mu_n = 1$ pour $n = \infty$, et une relation de la forme (9) est vérifiée. Dès lors, si $f(x) = J'$ était égal à J, J'_m serait égale à une des fractions J_n, et, par exemple, $J'_m = J_n$. On aurait, d'après (26),

$$Q'_m = Q_n = s_m^p = q^{2^{\varphi_r}}, \qquad p = 2^{\theta_2} \qquad (\theta_2 \text{ entier} > 0),$$

et P'_m serait un résidu quadratique (mod q), comme aussi b_r. Il suffira, par suite, que ceux des b_k qui sont $\neq 0$ soient (à part un

(¹) Avec plus de précision, soit δ un nombre donné arbitrairement grand : il suffira que l'on puisse trouver, pour toute valeur de δ, un nombre ν tel que

$$\varphi_{r+s} - \varphi_r > \delta$$

lorsque r est $> \nu$.

nombre fini) des résidus non quadratiques $(\mathrm{mod}\, q)$, pour que les racines réelles des équations (27) corrélatives soient des nombres transcendants qui ne sont pas des nombres de Liouville ([1]).

On pourrait aussi supposer que q n'est pas premier; le raisonnement et les conclusions seront analogues, pourvu de plus que b_k soit pris premier à q.

2° Je suppose maintenant que x, x_m, les a_j et J' puissent être imaginaires. On a

$$N_m \equiv r_m^p (\mathrm{mod}\, s_m), \qquad D_m = s_m^p,$$

s_m étant réel. On opèrera dans le domaine ([2]) des nombres entiers ou rationnels imaginaires $a + bi$ formés avec $i = \sqrt{-1}$. Je passe les détails de raisonnement : on reconnaîtra que, si D est le plus grand diviseur réel naturel commun à N_m et à D_m, c'est une puissance de 2, r_m^p et s_m ne pouvant avoir d'autre facteur premier réel commun que 2. On aura

$$N_m = DP'_m, \qquad D_m = s_m^p = DQ'_m.$$

Envisageant encore les nombres J réels définis par (28), q étant un nombre naturel premier, on aurait, en admettant que $J' = J$, pour une certaine valeur de n,

$$s_m^p = DQ'_m = 2^{k_m p} q^{2^{\varphi_r}} \qquad (q > 2,\ \varphi_m \text{ entier} \geqq 0,\ p = 2^\theta),$$
$$N_m \equiv r_m^p \equiv 2^{k_m p} P_n \quad (\mathrm{mod}\, s_m), \qquad J'_m = J_n;$$

P_n, qui est réel, devrait être encore un résidu quadratique $(\mathrm{mod}\, q)$, mais, si r_m n'est pas réel, dans le domaine des nombres $a + bi$. En choisissant ceux des b_k qui sont $\neq 0$ de façon qu'ils soient (à part un nombre fini) des non-résidus ([3]) quadratiques $(\mathrm{mod}\, q)$, on voit que les racines des équations (27), où J est réel, sont encore des

---

([1]) Quand Σ satisfait à une condition de la forme (9), par conséquent est une suite complète, il en est de même de la suite des J'_m qui doit alors coïncider avec celle des J_n (à un nombre limité de fractions près). A chaque valeur de n dépassant un certain nombre ν correspond une valeur de m telle que $J'_m = J_n$. Dans ce cas il suffit, pour l'impossibilité de (27), qu'il y ait parmi les b_k une infinité de résidus non quadratiques $(\mathrm{mod}\, q)$.

([2]) *Voir* BACHMANN, *Die Lehre von der Kreistheilung*, Leipzig, Teubner, 1872, p. 150 et suiv.

([3]) On prendra $q = 4h + 1$, et b_λ non-résidu quadratique dans le domaine des nombres naturels ou ordinaires.

nombres transcendants réels ou imaginaires qui ne sont pas des nombres de Liouville.

On peut résumer comme il suit les résultats obtenus ci-dessus :

Théorème. — « Il existe une infinité de nombres transcendants réels de Liouville, satisfaisant à une condition de la forme (9), et de la forme (28), tels que, J étant l'un d'eux, aucune des équations

$$f(x) = x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p = \mathrm{J} \qquad (p > 1)$$

n'ait pour racine un nombre de Liouville réel ou imaginaire (ni, bien entendu, un nombre algébrique), quels que soient le degré $p > 1$ et les entiers réels ou imaginaires $a_1, \ldots, a_p$. »

X. Je reprends l'équation (23), où N est un nombre réel de Liouville, et je suppose qu'elle admette pour racine un nombre imaginaire de Liouville J limite d'une suite (1) ou Σ de fractions $\mathrm{J}_n = i_n + i.i'_n$; J_n^p est, comme on sait (nos VI et VII, par exemple), une fraction d'approximation caractéristique de $\mathrm{J}^p = \mathrm{N}$, et, par suite, est réelle (n° II). Un premier cas possible est celui où $i_n = 0$, $\mathrm{J} = i\mathrm{J}'$, J' étant un nombre de Liouville réel, et $\mathrm{J}^p = i^p \mathrm{J}'^p = \mathrm{N}$, ce qui exige que l'on ait p pair et $\mathrm{N} = (-1)^{\frac{p}{2}} \mathrm{J}'^p$. Un autre cas sera celui où i_n et i'_n sont $\neq 0$; on a

$$i_n = \frac{p_n}{\mathrm{Q}_n}, \qquad i'_n = \frac{p'_n}{\mathrm{Q}_n},$$

et

$$\mathrm{J}_n^p = \frac{(p_n + i p'_n)^p}{\mathrm{Q}_n^p}$$

est réel, donc aussi

$$(p_n + i p'_n)^p = \mathrm{A}_n.$$

J'opère dans le domaine des nombres complexes $a + bi$: si ϖ^k est la plus haute puissance du nombre premier ordinaire $\varpi = 4h + 3$ qui divise $p_n + i p'_n$, A_n est divisible par ϖ^{kp} ; si $(a + bi)^{k'}$ est la plus haute puissance du nombre premier complexe $a + bi$ (alors $a^2 + b^2$ est un nombre premier ordinaire $4h' + 1$), non diviseur de 2, qui divise $p_n + i p'_n$, $(a + bi)^{k'p}$ est la plus haute puissance de $a + bi$ qui divise A_n, en sorte que $(a - bi)^{k'p}$ divise A_n, $(a - bi)^{k'}$ divise $p_n + i p'_n$; p_n et p'_n sont divisibles par $(a^2 + b^2)^{k'}$; finalement $p_n + i p'_n$ est de la forme $c_n (1 + i) i^q$, où c_n est un entier ordinaire réel pair ou impair; $\frac{c_n}{Q_n}$ a pour limite [1] (*I. T. N. T.*, p. 45-46) un nombre réel de Liouville J', et

$$J = (1 + i) i^q J',$$
$$N = J^p = (1 + i)^p i^{pq} J'^p = (1 + i)^{\frac{p}{2}} (1 - i)^{\frac{p}{2}} i^{pq + \frac{p}{2}} J'^p;$$

or le coefficient de J'^p dans le dernier membre est un entier réel égal à $\frac{A_n}{c_n^p}$ et aussi à $2^{\frac{p}{2}} i^{pq+\frac{p}{2}}$; donc p est pair, ainsi que $pq + \frac{p}{2}$, ce qui exige $p = 4h$:

$$N = J^p = (-1)^h 2^{\frac{p}{2}} J'^p;$$

on obtient ainsi ce résultat :

Théorème. — « Soit N un nombre réel de Liouville : si l'équation $x^p = N$ a une ou des racines qui sont des nombres de Liouville, celles-ci sont d'une des formes

$$\pm J, \quad \pm i J, \quad (1 + i) i^q J' \quad (q = 0, 1, 2 \text{ ou } 3),$$

où J et J' sont des nombres réels de Liouville.

» 1° Si p est impair, il ne peut y avoir qu'une pareille racine qui est réelle et de la forme $\pm$ J, et l'on a

$$N = \pm J^p;$$

» 2° Si $p = 4h + 2$, il ne peut y avoir que deux pareilles racines, soit $\pm$ J, soit $\pm i$J, et l'on a

$$N = J^p \quad \text{ou} \quad N = - J^p;$$

» 3° Si $p = 4h$, il ne peut y avoir que quatre pareilles racines, quand h est impair, soit $\pm$ J et $\pm i$J, soit $(1 + i) i^q J (q = 0, 1, 2, 3)$, et l'on a

$$N = J^p \quad \text{ou} \quad N = (-1)^h 2^{2h} J^p;$$

quand $h = 2l$, on peut avoir l'un des deux mêmes cas, ou, s'il existe un nombre réel J' de Liouville tel [2] que $J^2 = 2J'^2$, huit pareilles racines $\pm$ J, $\pm i$J, $(1 + i) i^q J'$. »

---

[1] Soit $J = \xi_1 + i\xi_1'$, où ξ_1, ξ_1' sont réels; ξ_1, ξ_1' sont des nombres de Liouville correspondants, et $(\xi_1 + i\xi_1')(\alpha + \beta i)$, avec α, β rationnels ordinaires, est un nombre de Liouville.

[2] Il reste à savoir si l'égalité $J^2 = 2J'^2$ est possible.

D'après cela, les autres racines de $x^p = N$, quand il y en a, ce qui est le cas général, sont des nombres transcendants distincts des nombres de Liouville.

Ainsi, quand on prend *a priori* $N = J^p$, où p est un nombre premier impair et J un nombre réel quelconque de Liouville, $Je^{\frac{2k\pi i}{p}}$, k n'étant pas divisible par p, est un nombre transcendant qui n'est pas un nombre de Liouville.

XI. Voici encore une autre application du n° X :

Soient I un nombre de Liouville réel défini par une suite complète (1) ou Σ satisfaisant à une condition de la forme (9), et R un nombre rationnel réel positif ou négatif; l'équation (23), où $N = RI^p$, peut-elle avoir pour racine un nombre de Liouville? Dans le cas de l'affirmative, RI^p est, d'après le théorème précédent, d'une des formes $\pm J^p$ ou $(-1)^h 2^{2h} J^p$ (ces conditions sont nécessaires et suffisantes, et la dernière forme exige $p = 4h$); I_m désignant une quelconque des réduites caractéristiques de I, les fractions RI_m^p sont (n° VI) les réduites caractéristiques de RI^p, puisque Σ satisfait à une condition de la forme (9), et constituent une suite complète Σ' de fractions caractéristiques de RI^p, obéissant à une inégalité (9). D'autre part, soit J_n une réduite caractéristique de J; $\pm J_n^p$ ou $(-1)^h 2^{2h} J_n^p$, suivant les cas, en est une de RI^p et est égale à une des fractions RI_m^p, au moins en général. Il en résulte aussitôt que, suivant les cas [1],

$$\pm R \quad \text{ou} \quad (-1)^h R.2^{-2h}$$

doit être une puissance $p^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel réel. Si aucune de ces dernières conditions, qui sont nécessaires et suffisantes, n'a lieu, l'équation (23) $x^p = RI^p$ a pour racines p nombres transcendants dont aucun n'est un nombre de Liouville. Exemple : cas où R est rationnel positif sans être une puissance $p^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel, et où, en outre, si $p = 8l$, $R.2^{4l}$ n'en est pas non plus une.

Les considérations des n$^{\text{os}}$ IX à XI constituent des extensions,

---

[1] Ces deux conditions s'excluent l'une l'autre; la relation $J^2 = 2J'^2$ du théorème du n° X est impossible, et l'équation (23) n'a ici jamais plus de quatre racines qui soient des nombres de Liouville.

qui ne nous paraissent pas sans importance, de nos résultats antérieurs relatifs à l'équation (23), et, en partie, de ceux relatifs aux irrationnelles quadratiques formés avec un nombre de Liouville (cas où $p = 2$, *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 213 et 220). Ces considérations établissent avec précision l'existence de catégories très vastes de nombres transcendants réels ou imaginaires, *distincts des nombres de Liouville*, et qui en dépendent algébriquement. Une de ces catégories, indiquée au théorème du n° X, est plus étendue encore que celle des nombres de Liouville.

XII. Pour terminer, je signalerai dans ce numéro quelques éclaircissements ou errata relatifs à mes publications concernant les nombres de Liouville :

1° *Bull. Soc. math.*, 1907, page 28, lignes 16 et 18; *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, J. Molk, t. I, vol. 3, fasc. 4, page 381, lignes 20 et 21. *Voir* la note ([1]) au bas de la page 83, n° IV ci-dessus. *Bull. Soc. math.*, 1907, p. 30, ligne 14, au lieu de : h_n^2, lire : $\frac{h_n^2}{2}$.

2° *I. T. N. T.*, page 39, ligne 23, ajouter pour plus de clarté : « La même conclusion s'applique alors à tout nombre de L_k (λ étant convenablement choisi pour le nombre), car c'est une somme d'un nombre fini de produits de la forme Π. »

3° *I. T. N. T.*, énoncé de la fin de la page 44 : *voir* la note ([1]) au bas de la page 76, n° II précédent.

4° *I. T. N. T.*, pages 46-47 : *voir* la note ([1]) au bas de la page 91, n° VIII précédent; p. 46, ligne 9, lire : $Q_n^{-\nu_n}$.

5° *I. T. N. T.*, page 55, lignes 9, 13, 18, 23 : il aurait mieux valu avertir le lecteur qu'à partir de la ligne 9, pour simplifier l'écriture, on remplaçait b_{h_m+1} par b_m, h_m désignant dès lors un entier quelconque assez grand; page 54, ligne 25, ajouter : (raisonnement analogue à celui de la page 48); supprimer la note ([1]) au bas de la page 55.

6° *I. T. N. T.*, pages 53, 55, 235. J'ai indiqué dans mon *I. T. N. T.*, page 53, le théorème suivant :

« Si une irrationnelle réelle

$$I = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots$$

(I positif, a_i entier positif) a son développement en fraction continue ordinaire d'ordre (k, ρ), l'irrationnelle $J = \frac{MI + N}{M'I + N'} > 0$, où M, N, M', N' sont des entiers réels, positifs ou négatifs, avec $MN' - NM' \neq 0$, a son développement en fraction continue ordinaire $b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + \ldots$ de même ordre. »

Cet énoncé est exact avec la classification des fractions continues ordinaires exposée page 9 de mon Ouvrage, classification que j'ai utilisée jusqu'aux Notes I et II, pages 219 et 228, et que j'ai appelée ultérieurement [p. 219, note (1)] la *troisième*. J'ai introduit aussi deux autres classifications, dont la possibilité est indiquée par moi dans la note (1) au bas de cette page 9, mais que je n'ai considérées de plus près que vers la fin de l'Ouvrage [note (1) précitée au bas de la page 219, page 228 et page 237]. L'énoncé ci-dessus, dans la première classification, doit être légèrement modifié, lorsque k est > 0, ainsi que dans la deuxième, lorsque k est < 0; tout ce qu'on peut dire alors, c'est que les fractions J ont même indice k que I.

Pour le vérifier, envisageons par exemple la première classification; il n'y a qu'à reprendre les calculs depuis la page 54, ligne 20, jusqu'à la page 55, ligne 15, en remplaçant, puisque l'on opère dans la première classification, à la ligne 21 de la page 54,

$$e_k(n^{\rho+\varepsilon}) \quad \text{par} \quad e_k(n)^{\rho+\varepsilon},$$

et changeant les calculs en conséquence : je n'entre pas davantage dans le détail.

Mais ceci entraîne une rectification ailleurs. Dans la démonstration du théorème de la page 235, il y a confusion, à partir de la ligne 4, entre la première et la troisième classification, en sorte que, comme on le voit facilement, après ce que je viens de dire, page 235, lignes 4 et 10, (k, ρ'') et (k, ρ) sont à remplacer par (k, ∞) et, ligne 16, dans l'énoncé, le signe $\leqq$ doit être substitué au signe $<$ (on pose $(k, \infty) = (k + 1, 0)$. Page 235, ligne 5, au lieu de : ordre, lire : indice.

7° *I. T. N. T.*, page 234, dernière ligne, remplacer e_{k+1} par e_k.

8° *I. T. N. T.*, page 240, ligne 8, au lieu de : $a_n >$, lire : $a_n =$.