BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DE LA GOUPILLIÈRE

Note sur la théorie des développoïdes

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 126-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__126_0>

Note sur la théorie des développoïdes;
par M. Haton de la Goupillière.

Séance du 10 janvier 1877.)

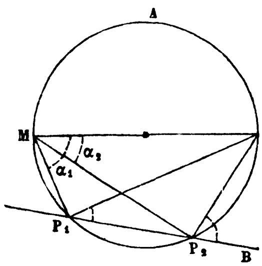
Je me propose d'appeler ici l'attention sur une propriété fort remarquable et déjà connue des développoïdes ([1]), qui peut s'énoncer de la manière suivante : « Si l'on prend la développoïde C_1 d'une courbe arbitraire C sous un angle α_1, puis la développoïde $C_{1,2}$ de celle-ci sous l'angle α_2, ou si, au contraire, on construit d'abord la développoïde C_2 de la proposée C pour l'angle α_2, et ensuite la développoïde $C_{2,1}$ de celle-ci sous l'angle α_1, quelque différentes que soient entre elles les lignes intermédiaires C_1 et C_2, les deux courbes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$ ainsi obtenues finalement coïncident entre elles. »

Ce théorème n'a été établi jusqu'ici que par l'emploi des coordonnées *naturelles,* c'est-à-dire en représentant les courbes par une équation entre leur rayon de courbure et leur angle de contingence. D'une part ces considérations se rattachent à une partie des Mathématiques plus élevée que la Géométrie élémentaire sur laquelle est uniquement fondée la démonstration que je propose plus loin. Celle-ci aura donc l'avantage de faire pénétrer plus facilement dans l'enseignement ordinaire cette intéressante proposition. Mais de plus on doit, je pense, considérer la démonstration ordinaire comme tout à fait insuffisante, ou du moins comme n'établissant qu'une partie seulement de l'énoncé, tel que je l'ai formulé. En effet, en obtenant pour les deux courbes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$ la même équation entre le rayon de courbure et l'angle de contingence, on prouve seulement qu'elles sont *superposables* et non qu'elles sont *superposées,* ou ne forment qu'une seule et même ligne. C'est à la fois un avantage des coordonnées naturelles dans certaines questions et un défaut dans d'autres occasions telles que celle-ci de fournir la *forme* sans avoir égard à la *situation* des lieux géométriques. Et lors

---

([1]) On appelle ainsi l'enveloppe des droites qui font un angle constant avec une courbe quelconque en chacun de ses points.

même que dans un problème les diverses équations obtenues seraient par la nature des choses rattachées à un même axe de comparaison, il resterait encore une incertitude complète sur la situation, car une translation arbitraire des diverses courbes de la question parallèlement à elles-mêmes et indépendamment les unes des autres ne modifierait en rien les angles qui servent à caractériser leurs divers points, pour en déduire par leurs équations respectives leur courbure en ces points. Il ne me serait pas difficile de produire des exemples de recherches dans lesquelles on obtient la même équation pour représenter dans une même question des courbes parfaitement distinctes. Je pense donc que sous ce rapport l'ancienne démonstration doit être considérée comme insuffisante, et



qu'un procédé géométrique direct, outre l'avantage de la simplicité, ajoutera à la portée de l'ancien théorème.

Supposons que M désigne le point décrivant de la courbe C qu'il est inutile de tracer, et MO son rayon de courbure (*voir* la *fig.*), par suite O le centre du cercle osculateur. On sait, d'après le théorème de Réaumur, que le point où l'oblique mobile touche sa développoïde s'obtient en y projetant orthogonalement le centre de courbure [1]. Si donc nous menons les deux obliques MP_1 et MP_2 faisant respectivement avec la normale MO les angles α_1 et α_2, les points P_1 et P_2

---

[1] Réaumur a établi cette propriété dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1709. M. Habich en a donné depuis une démonstration immédiate en remarquant que le mode de description de la courbe C revient au roulement sur la développée de la normale qui fait l'angle invariable α avec l'oblique qui enveloppe la développoïde. Le centre instantané de ce mouvement se trouve donc au centre de courbure, et sa projection sur la droite mobile fournit le point où elle touche son enveloppe.

des développoïdes C_1 et C_2 seront fournis par l'intersection de ces droites avec le cercle décrit sur MO comme diamètre. Or je dis que, si l'on joint P_1P_2, cette ligne sera à la fois tangente aux deux développoïdes du second ordre $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$. En effet, d'une part, elle passe par les points décrivants des premières développoïdes, à savoir P_1 de C_1 et P_2 de C_2. Il suffit donc de prouver qu'elle fait en P_1 l'angle α_2 avec la normale de C_1 et en P_2 l'angle α_1 avec la normale de C_2. Ces normales sont d'ailleurs P_1O et P_2O, puisque les tangentes des mêmes courbes sont P_1M et P_2M. Or on voit en premier lieu que l'angle P_2P_1O est inscrit sur le même arc OP_2 que P_2MO ou α_2. En second lieu on a pour l'angle BP_2O

$$BP_2O = 180^\circ - P_1P_2O = \frac{360^\circ - \text{arc}\, P_1AO}{2} = \frac{\text{arc}\, P_1P_2O}{2} = P_1MO = \alpha_1.$$

Il est donc établi que P_1P_2 touche à la fois les deux lignes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$. Mais la série de ces droites P_1P_2, dont chacune correspond à un point M de la proposée C, ne peut avoir qu'une seule enveloppe, et, par conséquent, cette enveloppe fournit à la fois les deux développoïdes du second ordre $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$, ainsi qu'il fallait le démontrer.