A. ERRERA

Une contribution au problème des quatre couleurs

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 42-55
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__42_1>

UNE CONTRIBUTION AU PROBLÈME DES QUATRE COULEURS;

PAR M. ERRERA.

I. — INTRODUCTION.

1, 1. Nous nous proposons d'établir de nouvelles réductions dans le *problème des quatre couleurs*.

Les notions nécessaires sont assez simples et connues, pour qu'il nous suffise d'énumérer les termes employés ; ce sont ceux de notre Thèse ([1]), avec cette différence que nous appelons ici *arête*, un arc de Jordan simple ouvert, et *alignement*, une succession ouverte d'arêtes, au lieu de dire arête régulière ouverte et alignement simple ouvert.

Voici donc les dénominations adoptées : *sommets* et *arêtes* du *réseau; alignements*, *cycles* et *polygones;* réseaux *connexes;* réseaux *cubiques* (à sommets trièdres); *isthmes* et *feuilles; régions*, *faces;* deux faces ayant un ou plusieurs *côtés* (arêtes) communs sont *adjacentes*, et *simplement* adjacentes dans le premier cas.

Dans cette Note nous appellerons *carte géographique*, un réseau sans isthme tracé dans un plan (ou sur une sphère, ce qui revient au même), et les régions qu'il détermine; et nous ne considérerons ici comme un *polyèdre*, qu'une carte dont le réseau est connexe et cubique; on sait qu'alors les régions sont toutes des faces.

1, 2. Dans un polyèdre, nous désignerons respectivement par σ, α et π, les nombres, supposés finis, des sommets, arêtes et faces, et par π_n, avec $n > 1$, le nombre des faces ayant n côtés. Notre polyèdre satisfait donc à la relation bien connue (*voir* par exemple ([1]), p. 55)

$$4\pi_2 + 3\pi_3 + 2\pi_4 + \pi_5 = 12 + \pi_7 + 2\pi_8 + \ldots + (n-6)\pi_n + \ldots$$

que l'on obtient en tenant compte, dans la formule d'Euler, que trois arêtes aboutissent à chaque sommet; de plus, si toutes les faces ont au moins cinq côtés, cette relation devient simplement

$$\pi_5 = 12 + \pi_7 + 2\pi_8 + \ldots + (n-6)\pi_n + \ldots$$

où le second membre exprime le nombre des pentagones, qui ne peut donc être inférieur à 12; le nombre des hexagones n'apparaît pas.

1, 3. *Colorier* une carte, c'est donner à chaque face un indice ou une couleur, a, b, c, ..., de façon que deux faces adjacentes

---

([1]) Les numéros en petits caractères se rapportent à la liste bibliographique qui se trouve à la fin de la présente Note.

ne soient pas en *collision*, c'est-à-dire dotées de la même couleur; bien entendu, deux faces n'ayant que des sommets communs peuvent avoir la même couleur.

On ne sait pas si quatre couleurs suffisent à colorier toutes les les cartes possibles; mais on sait qu'elles sont nécessaires et que cinq suffisent toujours ([2]).

Nous appellerons *carte irréductible*, une carte, s'il en existe, impossible à colorier en quatre couleurs, et dont le nombre des faces soit le plus petit possible; on sait ([3]) que ce nombre dépasse 25.

En vertu des réductions classiques, on peut supposer ([4]) que le réseau d'une carte irréductible est connexe et cubique : c'est donc le réseau d'un polyèdre irréductible.

1, 4. Un système ordonné de faces, trois au moins, telles que chacune soit simplement adjacente à la précédente et à la suivante, et ne soit adjacente à aucune autre du système, s'appellera une *suite* si la première et la dernière ne sont pas adjacentes, et un *anneau* si elles le sont simplement.

Par extension, une face, ou deux faces simplement adjacentes, formeront une suite.

Quand un hexagone appartient à un anneau, ou à une suite dont il n'est pas une des extrémités, deux cas se présentent : ou bien les deux polygones voisins de l'hexagone lui sont adjacents le long de deux arêtes *opposées*, et dans ce cas nous dirons que l'hexagone est *médian* (M, *fig.* 1); ou bien ils lui sont adjacents le long de deux arêtes séparées par une seule arête, et alors nous dirons que l'hexagone est *scalène* (S, *fig.* 1).

Dans les deux cas, l'hexagone présente quatre sommets communs avec les polygones voisins et deux sommets portant chacun une arête *libre*, c'est-à-dire quittant l'anneau ou la suite.

Quand un pentagone appartient à un anneau ou à une suite dont il n'est pas une extrémité, il ne porte qu'une arête libre.

1, 5. Nous dirons qu'un polyèdre *satisfait aux conditions* 1, 5, s'il ne contient aucune des configurations que voici :

1, 5, 1. Une face de moins de cinq côtés;

1, 5, 2. Deux faces ayant plus d'une arête commune, ou un anneau de moins de cinq faces (cette condition contient la précédente), ou un anneau de cinq faces qui n'entoure pas un pentagone;

1, 5, 3. Une arête comprise entre quatre pentagones, ou qui soit côté d'un hexagone et comprise entre lui et trois pentagones.

On sait [1], [5], [3] que tout polyèdre irréductible satisfait aux conditions 1, 5; autrement dit, si l'une de ces configurations se trouve dans un polyèdre, elle donne lieu à une réduction: d'ailleurs ce ne sont pas les seules connues [5], [3]. Ainsi que nous l'avons annoncé, nous allons en indiquer de plus générales, d'où nous tirerons un théorème curieux.

II. — Les anneaux.

2, 1. Soit Γ le réseau d'un polyèdre irréductible. Il est donc connexe, cubique, sans isthme et il satisfait aux conditions 1, 5.

2, 2. *Hypothèses.* — Nous admettrons que Γ possède un anneau Δ, dont nous fixerons une fois pour toutes un sens de parcours, et qui soit de l'un des types :

2, 2, 1. Anneau formé d'un nombre pair d'hexagones et d'un nombre pair de pentagones, ceux-ci groupés en suites paires; il est entendu que le nombre des hexagones ou des pentagones peut être zéro;

2, 2, 2. Anneau formé d'un nombre pair de pentagones et de deux polygones quelconques, Σ, Σ', consécutifs dans l'anneau;

2, 2, 3. Anneau formé d'un nombre pair de pentagones et d'un polygone quelconque, Σ.

Nous voyons qu'un anneau de pentagones, s'il est pair, rentre à volonté dans l'un des deux premiers cas, et dans le troisième, s'il est impair.

2, 3. Construisons le réseau *réduit* Γ', en effaçant les pentagones et les hexagones de l'anneau et en reliant deux à deux les arêtes libres par des arêtes *auxiliaires* (en pointillé sur les figures), comme ceci :

Dans le premier cas (2, 2, 1) nous relions les deux arêtes libres de chaque hexagone et de chaque paire de pentagones consécu-

Fig. 1.

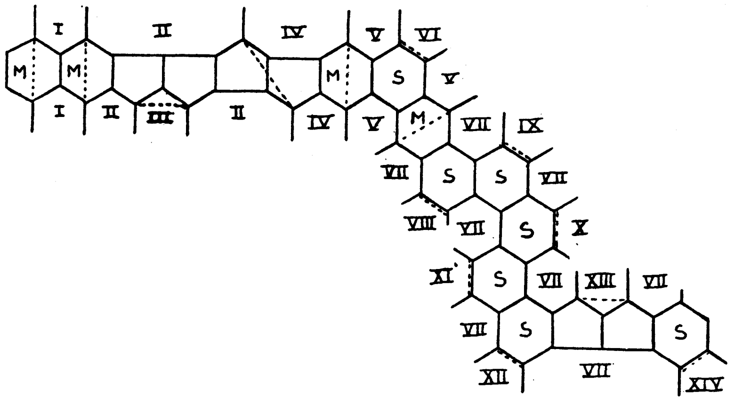


Fig. 1 *bis.*

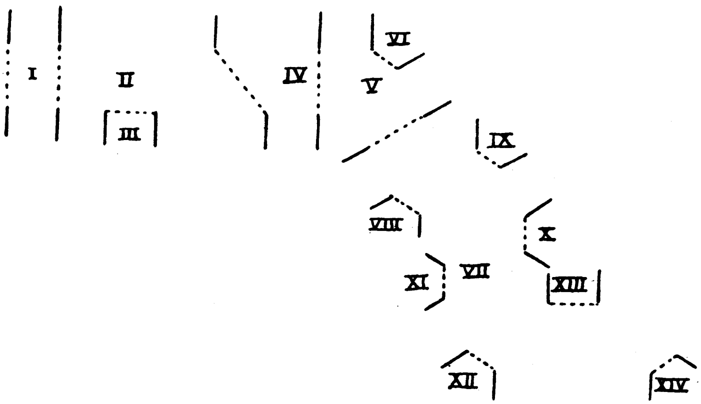


Fig. 2.

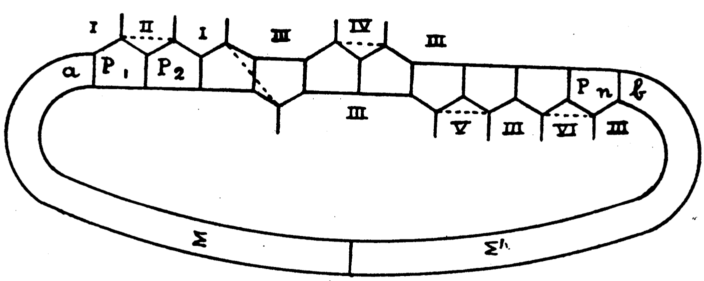


Fig. 2 *bis*.

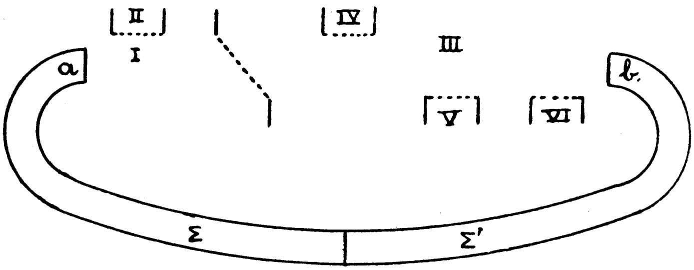


Fig. 3.

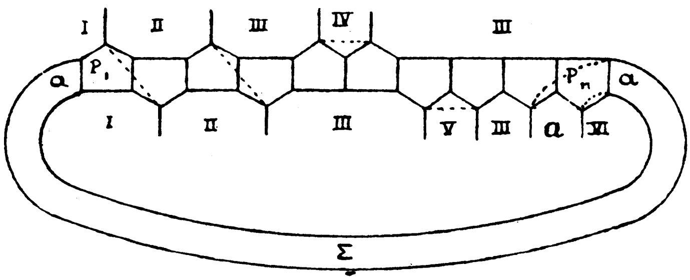


Fig. 3 *bis*.

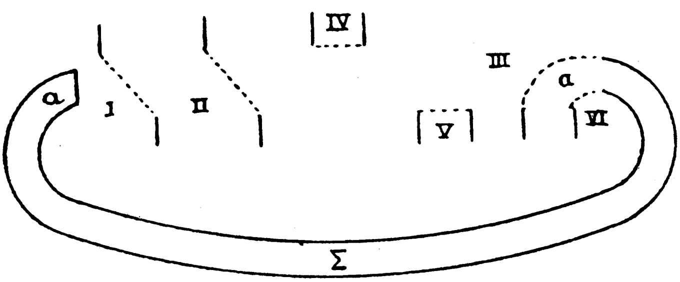


Fig. 4.

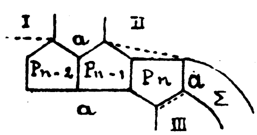
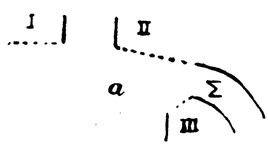


Fig. 4 *bis*.



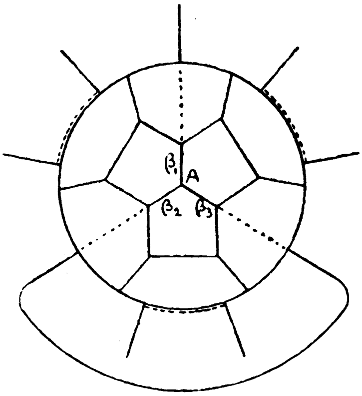


Fig. 5.

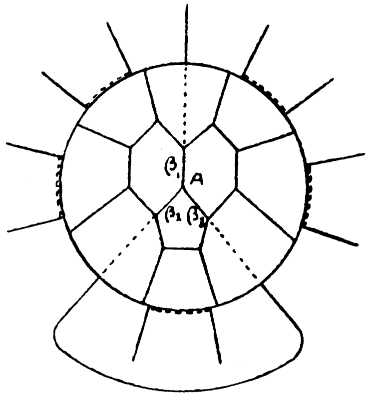


Fig. 6.

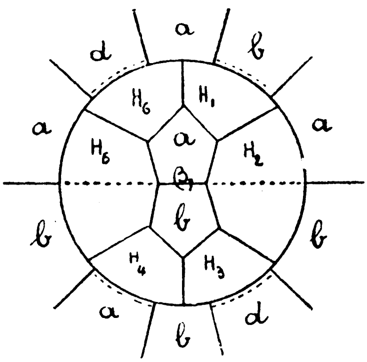


Fig. 7.

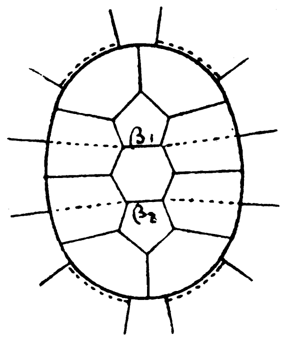


Fig. 8.

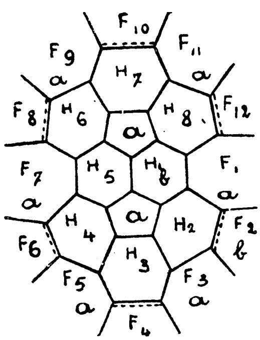


Fig. 9.

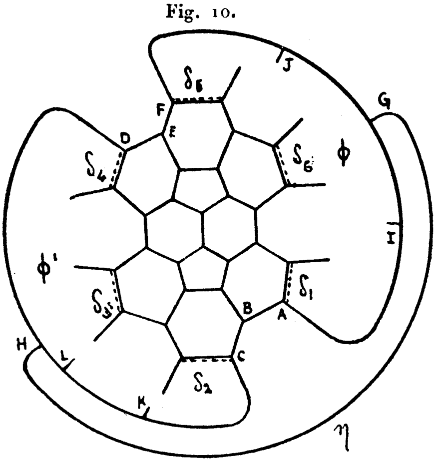


Fig. 10.

tifs; les figures 1, 1 *bis* montrent une portion de l'anneau et ce qu'elle devient; les chiffres romains seront expliqués plus tard.

Dans le deuxième (2, 2, 2) nous relions les arêtes libres des paires de pentagones, mais sans toucher à Σ et Σ' (*fig.* 2, 2 *bis*).

Dans le troisième (2, 2, 3) nous faisons de même, sauf pour la dernière paire, que nous relions à Σ, ainsi qu'il est indiqué aux figures 3, 3 *bis*, 4, 4 *bis*.

Cette construction est toujours possible, et parfois de plusieurs manières également bonnes, par exemple si l'anneau Δ est formé uniquement de pentagones, que l'on peut accoupler alors de deux façons.

Nous constatons que le réseau réduit Γ' est cubique, mais qu'il n'est pas nécessairement connexe, et qu'il peut contenir des isthmes; dans le cas où il n'en contiendrait pas, et puisque Γ est irréductible, Γ', ayant moins de faces, est coloriable.

2, 4. Nous allons indiquer plusieurs configurations où le réseau Γ' ainsi défini ne peut pas avoir d'isthme.

2, 4, 1. Supposons d'abord que Γ contienne un sommet A, commun, soit à trois pentagones, entourés eux-mêmes de six hexagones formant l'anneau Δ (*fig.* 5), — ce cas a déjà été étudié ([3]) par M. Franklin, — soit à un pentagone et deux hexagones, entourés de huit hexagones formant Δ (*fig.* 6); sur ces figures nous marquons toujours, concurremment avec les arêtes de Γ, les arêtes auxiliaires de Γ'. Je dis que Γ' ne peut contenir d'isthme.

Autrement, à supposer d'abord que l'arête β_1 soit un isthme, on pourrait, sur le réseau Γ', aller d'un côté à l'autre de β_1, sans rencontrer d'arête; un tel trajet, reporté sur Γ, traverserait au plus cinq faces formant un anneau qui n'entoure pas un pentagone; donc (1, 5, 2) β_1, et de même β_2 et β_3, appartiennent à des cycles.

Il s'ensuit que si Γ' contenait un isthme, comme alors il contiendrait au moins une feuille [*voir* ([1]), p. 13], celle-ci serait enfermée dans un cycle tel que $\beta_2\ \beta_3$.

Or toute feuille de Γ', reportée sur Γ, devrait s'appuyer sur l'anneau Δ ou le traverser, sans quoi ce serait une feuille de Γ, qui n'en peut avoir; une telle feuille serait en contact avec deux faces adjacentes le long de l'isthme et adjacentes à Δ.

Il s'ensuivrait qu'une feuille de Γ', enfermée dans un cycle tel que $\beta_2\beta_3$, serait, sur Γ, entourée d'un anneau de moins de cinq faces, et cela n'est pas (1, 5, 2), Donc Γ' n'a pas d'isthme.

C. Q. F. D.

2, 4, 2. Supposons ensuite que Γ contienne, soit deux pentagones adjacents, entourés d'un anneau Δ de six hexagones (*fig.* 7), soit un hexagone adjacent à deux pentagones entre lesquels il soit médian (1, 4), ces trois polygones entourés d'un anneau Δ de huit hexagones (*fig.* 8). Je dis que Γ' est encore sans isthme.

On démontrera comme avant, que β_1 et β_2 ne sont pas des isthmes; donc ces arêtes appartiennent certainement à des cycles ; la démonstration s'achève comme précédemment.

2, 5. *Corollaire.* — Si le réseau irréductible Γ contient l'une des configurations précédentes, le réseau réduit Γ' est coloriable.

III. — La réduction.

3, 1. *Théorème.* — Soit Γ le réseau d'un polyèdre irréductible possédant un anneau Δ qui réponde à l'un des trois types du paragraphe 2, 2, et dont le réseau réduit Γ' soit sans isthme. Je dis que cet énoncé implique contradiction.

3, 2. *Démonstration.* — Nous savons (2, 3) que Γ' est coloriable.

Reportons un coloriage de Γ' sur Γ, qui sera donc complètement colorié, à l'exception de l'anneau Δ ; et encore les faces Σ, Σ' seront-elles coloriées, si elles existent dans Δ.

Dans ce report, les faces de Γ qui répondent à une même face de Γ', auront forcément la même teinte : c'est ce qu'indiquent les *chiffres romains* (*fig.* 1 à 4 *bis*).

La construction montre que toute face non coloriée de Δ, est adjacente à deux couleurs seulement, sauf les faces P_1, P_n adjacentes à Σ, Σ' (*fig.* 2, 3 et 4) qui peuvent toucher à trois couleurs.

Nous dirons que l'anneau Δ, ou l'une de ses suites de faces est *dichrome*, si toutes les faces de l'anneau ou de la suite sont adjacentes aux deux mêmes couleurs ; une suite dichrome peut être constituée d'une seule face.

Nous établirons la contradiction en coloriant le polyèdre irréductible Γ.

3, 2, 1. Dans l'hypothèse 2, 2, 1 des hexagones et des pentagones, il faut distinguer deux cas.

3, 2, 1, 1. Si l'anneau Δ est dichrome, soient a, b les seules couleurs qui lui soient adjacentes. Comme par hypothèse le nombre des faces de Δ est pair, nous pouvons leur donner alternativement les couleurs c, d, et toute la carte est coloriée.

C. Q. F. D.

3, 2, 1, 2. Supposons maintenant que plus de deux couleurs touchent à l'anneau; il contiendra donc au moins deux suites dichromes.

Colorions une première suite, adjacente aux couleurs a, b, par exemple, à l'aide des couleurs c, d. Nous avons le *choix* de commencer par c ou d.

Après cela vient une suite en contact avec deux couleurs, dont l'une est a ou b, par exemple a, c; il faut donc teinter la suite en b, d. Si la première suite finissait par d, nous n'aurions plus de choix et devrions commencer par b; mais si elle finissait par c, le choix serait sauf, puisque nous commencerions par b ou d *ad libitum*.

Pour garder ce degré de liberté, il suffit donc d'utiliser le choix initial de la première suite dichrome, de façon à ménager celui de la seconde. Et ce raisonnement vaut de proche en proche; de manière que la dernière suite présente encore un choix initial. Nous l'emploierons à fermer le circuit, sans qu'il y ait collision de couleurs avec le polygone de l'anneau par lequel nous avons commencé. C. Q. F. D.

A titre d'exemple, la figure 7 montre comment on colorie un anneau Δ de six hexagones entourant deux pentagones : le reste du polyèdre étant colorié après réduction, les choix successifs se présentent par exemple en H_1, H_3, H_4 et H_6; suivons la règle : l'anneau reçoit les couleurs c, d, a, c, d, b, pour H_1, ..., H_6.

3, 2, 2. Dans l'hypothèse 2, 2, 2, les deux polygones Σ, Σ' portent par exemple les couleurs a, b respectivement.

Alors, ou bien le pentagone P_1 (*fig.* 2) est adjacent à trois couleurs ; on donnera donc la quatrième à P_1, puis à P_2 la couleur a de Σ ; ou bien P_1 est adjacent à deux couleurs seulement, et cela introduit un *choix* initial.

De proche en proche, ou bien tous les pentagones de rang pair seront coloriés en a, ou bien un pentagone de rang impair présentera un choix.

On pourra donc colorier tout l'anneau Δ sans collision : dans le premier cas, parce que Σ' n'est pas teinté en a ; dans le second, parce qu'en raisonnant comme nous l'avons déjà fait (3, 2, 1, 2), nous conserverons jusqu'à la fin notre degré de liberté.

C. Q. F. D.

3, 2, 3. Dans l'hypothèse 2, 2, 3, le polygone quelconque Σ porte la couleur a, par exemple (*fig.* 3 et 4).

En raisonnant comme dans le dernier cas (3, 2, 2), mais en nous arrêtant à l'antépénultième pentagone, P_{n-2}, ou bien il est colorié en a, comme Σ, auquel P_n est adjacent, et le coloriage s'achève sans peine ; ou bien un choix s'est déjà présenté, que nous avons pu conserver jusqu'en P_{n-2}, ce qui nous permet encore de terminer sans collision. C. Q. F. D.

Donc, dans tous les cas, Γ est colorié, et cela démontre le scolie qui généralise des résultats de M. Birkhoff [5] et de M. Franklin [3], et que nous énoncerons comme suit :

3, 3. *Scolie.* — Un réseau connexe, cubique, et sans isthme, satisfaisant aux conditions 1, 5, est réductible, quand il possède un anneau qui répond aux hypothèses 2, 2, si toutefois le réseau réduit est sans isthme. Tel est le cas, si le réseau contient l'une des configurations 2, 4.

L'exemple que donne M. Franklin [3] dans sa figure 7, est donc réductible par notre procédé (type 2, 4, 2) [*].

---

[*] Depuis la rédaction de la présente Note, nous avons trouvé un exemple de réseau irréductible par tous les procédés connus à ce jour; nous l'avons indiqué lors du Congrès de Liége de l'Association française pour l'Avancement des Sciences et le publions dans les Comptes rendus de ce Congrès (Paris, 1925, Masson et C^{ie}).

IV. — Les conséquences.

4, 1. Les propositions qui précèdent nous permettent d'établir un théorème d'un genre que nous croyons nouveau :

Théorème. — Un polyèdre, dont toutes les faces sont des pentagones ou des hexagones, est réductible.

4, 2. *Démonstration.* — Supposons qu'il existe un polyèdre de cette sorte qui soit irréductible. Son réseau Γ est connexe, cubique, sans isthme, et satisfait aux conditions 1, 5; de plus, le nombre des pentagones est 12, quel que soit celui des hexagones (1, 2).

Or, en vertu de la condition 1, 5, 3, Γ ne peut contenir de pentagone adjacent à trois pentagones consécutifs, ou à un hexagone compris entre deux pentagones, bref à deux pentagones non consécutifs.

D'autre part, le scolie 3, 3 montre que Γ ne peut renfermer de pentagone adjacent à deux pentagones consécutifs ou à un seul pentagone.

Donc les douze pentagones sont forcément isolés les uns des autres.

Maintenant, d'après le même scolie, Γ ne contient pas un hexagone adjacent à deux pentagones entre lesquels il soit médian, ni un pentagone adjacent à deux hexagones consécutifs entourés de huit hexagones.

Il ne reste donc qu'une hypothèse à considérer : le polyèdre irréductible Γ contient un hexagone adjacent à deux pentagones entre lesquels il soit scalène (1, 4). Je dis que nous sommes amenés à une contradiction.

En effet, le réseau Γ comprend alors une configuration Δ particulière (*fig.* 9) de deux pentagones et huit hexagones, que nous traiterons comme nous avons fait des anneaux.

Formons le réseau réduit Γ', en effaçant ces hexagones et ces pentagones, et en reliant les arêtes libres par des arêtes auxiliaires (en pointillé sur la figure). *A supposer* Γ' exempt d'isthmes, nous pouvons le colorier, Γ étant irréductible.

Reportons les couleurs sur Γ, dont les faces F_1, F_3, F_5, F_7, F_9 et F_{11} seront coloriées en a; donnons cette couleur a aux deux pentagones; il reste à traiter les hexagones $H_1, \ldots, H_8$.

Donnons alors à H_1 la couleur b de F_2; nous constatons que $H_2, \ldots, H_7$ sont en contact avec deux couleurs seulement; en raisonnant comme au paragraphe **3, 2, 1**, ou bien la suite est dichrome, ou elle ne l'est pas; dans les deux cas nous pouvons sauvegarder le choix initial jusqu'en H_7, et nous arranger pour que H_7 soit colorié comme F_{12} ou comme H_1, ou bien F_{12} et H_1 ont la même couleur; il reste donc toujours une couleur pour H_8, et Γ est colorié, ce qui est absurde d'un réseau irréductible.

Le théorème sera donc établi, si nous montrons qu'effectivement Γ' est sans isthme, ce que nous avons supposé jusqu'ici. Pour cela, admettons qu'il n'en soit pas ainsi; on sait ([1]), p. 13, qu'alors Γ' comprend au moins deux feuilles, Φ, Φ' (*fig.* 10).

Chaque feuille devra s'appuyer sur la configuration Δ, ne pouvant être feuille de Γ, qui, par hypothèse, en est exempt; de plus, comme une feuille de Γ' n'est attachée au reste du réseau (c'est la définition) que par une seule arête, et que Γ satisfait à la condition **1, 5, 2**, cette feuille devra s'appuyer sur Δ par deux arêtes auxiliaires non consécutives au moins, c'est-à-dire telles que $\delta_1\delta_3$ ou $\delta_2\delta_4$; et encore ce ne peut pas être $\delta_1\delta_3$, pour le même motif. Donc on peut supposer que Φ s'appuie sur $\delta_1\delta_3$ et Φ' sur $\delta_2\delta_4$.

Il s'ensuit que les sommets C et D sont reliés par un alignement, et de même F et A; et que ces alignements portent respectivement les sommets G et H, reliés par l'isthme η; les feuilles de Γ', reportées sur Γ, sont alors effectivement entourées chacune d'un anneau de six faces, ce qui est permis; remarquons ici que c'est bien une seule arête η qui relie GH.

Or l'alignement AGF doit porter au moins deux sommets I, J, d'où partent des arêtes qui entrent dans la feuille Φ, sans quoi il longerait un anneau de moins de six faces n'entourant pas un pentagone; de même l'alignement CHD, deux sommets K, L. Mais cela n'est pas possible, puisque les faces AGHCB et FGHDE ont au plus six sommets.

Donc Γ' ne peut contenir d'isthme, ce qui établit le théorème.

4, 3. *Remarque.* — Nous avons montré incidemment qu'un polyèdre à sommets trièdres, et dont les faces sont des pentagones et des hexagones, contient l'une au moins des configurations réductibles ci-dessus énumérées; cela peut amener à voir une relation entre le théorème des quatre couleurs et le problème peu étudié des polyèdres possibles.

Bibliographie.

(1) Errera, *Du Coloriage des Cartes...* (*Thèse*, Bruxelles, 1921, Falk fils, Van Campenhout, successeur, et Paris, 1921, Gauthier-Villars).

(2) Heawood, *Quart. J. of pure and appl. Math.*, Londres, 1890, XXIV, p. 332-338.

(3) Franklin, *The Four Color Problem*, *Diss.*, *Am. J. of Math.*, Baltimore, 1922, XLIV, 3, p. 225-236.

(4) Kempe, *Am. J. of Math.*, Baltimore, 1879, II, 3, p. 193-200.

(5) Birkhoff, *Am. J. of Math.*, Baltimore, 1913, XXXV, 2, p. 115-128.