BULLETIN DE LA S. M. F.

J. WOLFF

Sur les limites radiales d'une fonction holomorphe dans un cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 167-173
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__167_0>

SUR LES LIMITES RADIALES D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE.

PAR M. JULIUS WOLFF

(Utrecht).

MM. Lusin et Priwaloff ont construit des fonctions $f(z)$ holomorphes pour $|z| < 1$ et telles qu'il existe un ensemble E d'arguments φ, de mesure 2π, pour lesquels

$$\lim_{r \to 1} f(re^{\varphi i}) = 0 \quad (^1).$$

Afin de donner une petite extension à ce résultat, nous allons montrer qu'on peut faire en sorte que, pour tous les arguments φ de E, la fonction tend vers zéro pour $r \to 1$, à rapidité donnée d'avance.

En effet, nous démontrerons la proposition suivante :

Soit donnée une fonction croissante $\psi(x)$ de la variable positive x, $\psi \to \infty$ pour $x \to \infty$ (à croissance aussi rapide qu'on le veut). Alors il existe une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ et telle que pour un certain ensemble E *d'arguments φ, de mesure 2π, on a*

$$\lim_{r \to 1} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right) . f(re^{\varphi i}) = 0.$$

1. Donnons-nous une suite de nombres positifs

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n \to 0,$$

et une série convergente de nombres positifs

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots, \qquad \eta_n < 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Posons pour $k = 1, 2, \ldots$

$$(1) \qquad \begin{cases} r_k = 1 - \varepsilon_{2k}, \\ R_k = 1 - \varepsilon_{2k+1}. \end{cases}$$

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 42, 1925, p. 147.

Soit n_k le plus petit entier satisfaisant à

$$(2)\qquad \left(\frac{r_k}{R_k}\right)^{n_k} \leqq \frac{1}{3}\eta_k,$$

et posons

$$(3)\qquad A_k = \frac{3}{R_k^{n_k}}.$$

Alors

$$(4)\qquad \begin{cases} |A_k z^{n_k}| \geqq 3 & \text{pour } |z| \geqq R_k, \\ |A_k z^{n_k}| \leqq \eta_k & \text{pour } |z| \leqq r_k. \end{cases}$$

Le produit infini

$$(5)\qquad f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - A_k z^{n_k})$$

converge uniformément pour $|z| \leqq \rho < 1$, ρ fixe, parce que à partir d'un certain k on a $\rho \leqq r_k$, donc $|A_k z^{n_k}| \leqq \eta_k$. Il s'ensuit que $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$.

Les zéros du binome $1 - A_k z^{n_k}$ sont tous situés dans la couronne $r_k < |z| < R_k$, à cause de (4). Remarquons maintenant que, β étant un de ces zéros, on a

$$|1 - A_k z^{n_k}| > \frac{c}{n_k} \qquad \text{pour } |z - \beta| = \frac{1}{n_k^2 A_k^{\frac{1}{n_k}}} = \rho_k,$$

c étant une constante positive.

On a

$$(6)\qquad \rho_k \sim \frac{1}{n_k^2} \qquad \text{pour } k \text{ infini.}$$

L'inégalité

$$(7)\qquad |1 - A_k z^{n_k}| > \frac{c}{n_k}$$

subsiste hors des n_k cercles γ_k de rayon ρ_k et ayant pour centres les n_k zéros de $1 - A_k z^{n_k}$.

Les relations (1) et (2) conduisent à

$$(8)\qquad n_k \sim \frac{\log \frac{1}{\eta_k}}{\varepsilon_{2k} - \varepsilon_{2k+1}} \qquad \text{pour } k \text{ infini.}$$

De (6) et (8) on conclut que la série $\Sigma n_k \rho_k$ converge, et parce que, pour k infini, les modules des zéros de $1 - A_k z^{n_k}$ tendent vers *un*, nous trouvons que les angles, sous lesquels on voit de l'origine tous les cercles γ_k, forment une série convergente. Il en résulte qu'il existe un ensemble E d'arguments φ de mesure 2π tels que le rayon d'argument φ ne coupe qu'un nombre fini de ces cercles γ_k au plus.

Soit OA un tel rayon, alors OA contient un segment BA, qui ne coupe aucun γ_k. Soit z un point de BA et

$$(9) \qquad r_p < |z| = r \leq r_{p+1}.$$

Alors les relations (4), (7) et (8) donnent

$$|f(z)| = |1 - A_p z^{n_p}| . \prod_{k=1}^{p-1} |1 - A_k z^{n_k}| . \prod_{k=p+1}^{\infty} |1 - A_k z^{n_k}| >$$

$$> 2^{p-1} . \frac{c}{n_p} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \eta_k) > \frac{d . 2^p (\varepsilon_{2p} - \varepsilon_{2p+1})}{\log \frac{1}{\eta_p}},$$

d étant une constante positive.

Choisissons

$$\eta_k = \frac{1}{(k+1)^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Alors $\log \frac{1}{\eta_p} \sim 2 \log p$ pour p infini.

On a donc

$$(10) \qquad |f(z)| > (\varepsilon_{2p} - \varepsilon_{2p+1}) e^{hp},$$

h étant une constante positive.

Donnons-nous maintenant une fonction continue, positive et croissante $y = \psi(x)$ de la variable positive x (croissante vers l'infini aussi rapidement qu'on le veut).

Soit $x = \Phi(y)$ la fonction inverse, donc

$$\psi \{ \Phi(y) \} = y.$$

Choisissons pour $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$ le plus grand des deux nombres $e^{-\frac{1}{4}hk}$ et $\frac{1}{\Phi(k)} - \frac{1}{\Phi(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (¹).

(¹) Sans nuire à la généralité on peut supposer $\Phi(1) > 1$ et $\sum_{k=1} e^{-\frac{1}{4}hk} < 1$, de sorte que l'on peut substituer les ε_{2k} et ε_{2k+1} dans (1).

Alors

(11) $$\varepsilon_k \geq \frac{1}{\Phi(k)}.$$

De (1) et (9) il résulte

$$\varepsilon_{2p+2} \leq 1 - r.$$

Donc à cause de (11),

$$\Phi(2p+2) \geq \frac{1}{1-r},$$

$$\psi\{\Phi(2p+2)\} = 2p+2 \geq \psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

L'inégalité (10) devient maintenant

$$|f(z)| > e^{\frac{1}{2}hp} > e^{\left\{\frac{1}{4}\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)-\frac{1}{2}\right\}h},$$

$\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)$ tendant vers l'infini pour r tendant vers *un*, nous trouvons que, si φ appartient à un ensemble E de mesure 2π,

(12) $$\lim_{r\to 1} |f(re^{\varphi i})| . \left\{\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{-1} = \infty.$$

2. Dans le paragraphe précédent nous avons construit des fonctions, holomorphes dans le cercle unité, tendant vers l'infini sur une pleine épaisseur de rayons, à rapidité donnée à l'avance.

Il s'agit maintenant d'en déduire des fonctions ayant la même propriété, sans s'annuler en aucun point.

Pour chaque zéro β_k du binome $1 - A_k z^{n_k}$ exécutons la construction suivante :

Traçons les deux rayons

(13) $$\varphi = \arg\beta_k \pm \mu_k, \qquad \mu_k < \frac{1}{n_k^2}, \qquad \ldots.$$

Diminuons le domaine $|z| \leq 1$ en omettant les n_k domaines

$$r_k \leq r < 1, \qquad \arg\beta_k - \mu_k < \varphi < \arg\beta_k + \mu_k.$$

Nommons Δ_k le domaine restant. Les n_k zéros β_k de $1 - A_k z^{n_k}$ étant entre les cercles $|z| = r_k$ et $|z| = R_k$, la fonction

$$\log|1 - A_k z^{n_k}|$$

est harmonique dans Δ_k. Ce domaine Δ_k étant simplement connexe on peut trouver une fonction u_k, *harmonique dans tout le plan fini* et telle que dans Δ_k

$$(14) \qquad \left| \log|1 - A_k z^{n_k}| - u_k \right| < \frac{1}{2^k}.$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge uniformément pour $|z| \leq \rho < 1$, car à partir d'un certain k, le cercle $|z| \leq \rho$ est dans Δ_k. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log|1 - A_k z^{n_k}|$$

étant uniformément convergente, la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ l'est aussi, à cause de (14).

Donc pour $|z| < 1$ la fonction

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

est harmonique. Soit $v(z)$ conjuguée à $u(z)$, donc $u(z) + iv(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$.

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ étant convergente, il suit de (13) qu'il existe un ensemble F de valeurs de φ, de mesure 2π, tel que le rayon $z = re^{\varphi i}$, $0 \leq r \leq 1$ est dans Δ_k à partir d'un certain k, dépendant de φ. Les ensembles E et F ont en commun un ensemble G de mesure 2π.

Soit OA un rayon dont l'argument φ appartient à G. A partir d'un certain k on a la relation (14) pour tous les points de OA, donc

$$\log|f(z)| - u(z)$$

est bornée sur OA.

Donc à cause de (12),

$$\lim_{r \to 1} \left\{ u(re^{\varphi i}) - \log \psi\left(\frac{1}{1-r}\right) \right\} = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{r \to 1} \left\{ \log|e^{u+vi}| - \log \psi\left(\frac{1}{1-r}\right) \right\} = +\infty,$$

$$\lim_{r \to 1} e^{-u-vi}\, \psi\left(\frac{1}{1-r}\right) = 0.$$

La fonction e^{-u-vi} étant holomorphe pour $|z| < 1$ la proposition énoncée au début de cet article est démontrée.

3. Comme dans l'exemple de **MM.** Lusin et Priwaloff l'ensemble G est de la première catégorie : réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses.

Nous pouvons démontrer qu'il en est ainsi toujours.

En effet, soit $f(z)$ holomorphe et non identiquement nulle pour $|z| < 1$ et

$$\lim_{r \to 1} f(re^{\varphi i}) = 0$$

pour les valeurs φ d'un ensemble G de mesure 2π. Nous allons démontrer que G est de première catégorie.

Nommons E_n l'ensemble des valeurs de φ, telles que

$$\left| f \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{\varphi i} \right\} \right| > M,$$

n étant un entier positif et M un nombre positif arbitraire. E_n est un ensemble d'intervalles, ou vide. Je dis que l'ensemble

$$\sum_{n=m}^{\infty} E_n = H_m$$

est partout dense, pour chaque valeur de m. En effet, dans le cas contraire $|f|$ serait bornée supérieurement sur des arcs

$$r = 1 - \frac{1}{n}, \qquad n = m,\ m+1, \qquad \ldots, \qquad \varphi' < \varphi < \varphi'', \qquad \varphi' \text{ et } \varphi'' \text{ fixes.}$$

G étant de mesure 2π, on peut supposer que φ' et φ'' appartiennent à G. Alors $|f(z)|$ est bornée sur les deux rayons OA′ et OA″ d'arguments φ' et φ'', donc aussi dans le secteur OA′A″.

Mais dans ce cas nous savons que l'ensemble des valeurs de φ, pour lesquels $\lim_{r \to 1} f(re^{\varphi i}) = 0$, est de mesure nulle [1]. Cette contradiction montre bien que H_m est partout dense.

Soit

$$\lim_{m \to \infty} H_m = H.$$

---

[1] *Théorème des frères Riess* (Congrès de Stockholm, 1916).

Les points de H sont étrangers à G.

H étant l'ensemble commun d'une infinité d'ensembles d'intervalles partout denses, donc un *résiduel* (selon la terminologie de M. Denjoy), G est de première catégorie.

Remarquons que nous avons même montré que, si une fonction $f(z)$, holomorphe pour $|z| < 1$, tend vers zéro sur un ensemble dense de rayons, $|z|$ tendant vers *un*, les rayons sur lesquels $f(z)$ est bornée ont des arguments dont l'ensemble est de première catégorie. En effet, en notant H_k l'ensemble H correspondant à $M = k$, on n'a qu'à remarquer que l'ensemble commun des résiduels H_k, $k = 1, 2, \ldots$, est encore un résiduel.