BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BEGHIN

Sur les conditions d'application des équations de Lagrange à un système non holomorphe

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 118-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__118_0>

SUR LES CONDITIONS D'APPLICATION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE A UN SYSTÈME NON HOLONOME;

PAR M. HENRI BEGHIN.

M. J. Hadamard (¹) a étudié d'une manière générale les cas où les équations de Lagrange s'appliquent au nombre *minimum* de paramètres pour un système matériel soumis à des liaisons non holonomes.

Il en est ainsi dans le cas particulier où les équations de liaison aux différentielles totales forment un système complètement intégrable. L'établissement des équations de Lagrange, sans introduction de multiplicateurs, suppose en effet deux choses :

1° Les coordonnées de tout élément pourvu de masse doivent pouvoir se représenter, avant toute considération dynamique, par des expressions en termes finis de la forme $f(q_1, q_2, \ldots, q_h, t)$, où $q_1, \ldots, q_h$ désignent un nombre fini de paramètres, et t, le temps.

2° Dans tout déplacement $dq_1, \ldots, dq_h$, $(dt = 0)$, le travail élémentaire des forces de liaison est nul.

Dans le cas particulier considéré, le système est supposé dépendre de k paramètres $q_1, \ldots, q_k$ et de t, liés par $k - h$ équations non holonomes. Ces $k - h$ équations étant supposées pouvoir s'intégrer permettent de calculer $k - h$ paramètres en fonction des h autres $q_1, \ldots, q_h$, et de t; de sorte que la première condition énoncée est remplie : les coordonnées de tout élément pourvu de masse peuvent s'exprimer en fonction de $q_1, \ldots, q_h, t$.

D'autre part, le déplacement $dq_1, \ldots, dq_h (dt = 0)$ étant compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t, le

(¹) *Mémoire de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1895.

travail des forces de liaisons est nul dans ce déplacement, si les liaisons sont réalisées sans résistances passives (réactions normales en tous les contacts comportant un glissement, réactions obliques sans couples de résistance au roulement ou au pivotement en tous les contacts où le glissement est supposé nul).

Je me suis proposé de chercher, — étant donné un système de solides en contact entre eux et avec des obstacles étrangers fixes ou de mouvement connu d'avance en fonction du temps, les équations non holonomes exprimant uniquement des conditions de non-glissement —, si l'on peut reconnaître à des signes géométriques simples les cas où ces équations non holonomes forment un système complètement intégrable.

Ainsi, par exemple, pour deux profils invariables S et S_1, mobiles dans un même plan, et assujettis à rouler sans glisser l'un sur l'autre, la condition de non-glissement, une fois écrite la condition de contact, peut s'intégrer sous la forme

$$s - s_1 = C,$$

où s et s_1 désignent les abscisses du point de contact, sur les deux profils et C une constante. Cette condition ne constitue donc pas un obstacle à l'application des équations de Lagrange.

D'une manière plus générale, les conditions de non-glissement sont complètement intégrables et, par suite, permettent l'application des équations de Lagrange sans multipticateurs, toutes les fois que l'on connait d'avance, *avant toute considération dynamique*, les trajectoires, sur les corps qui roulent sans glisser, de leurs points de contact.

Je suppose, par exemple, qu'il s'agisse de deux solides S et S_1 limités par des surfaces tangentes l'une à l'autre. Leur position relative peut se déterminer par u, v et u_1, v_1, coordonnées curvilignes du point de contact I sur ces deux surfaces, et par θ, angle en I des lignes $u = \text{const.}$, $u_1 = \text{const.}$

La connaissance des trajectoires de I sur les deux surfaces entraîne la connaissance de relations de la forme

$$\begin{aligned} u &= \varphi(v), \\ u_1 &= \varphi_1(v_1), \\ \theta &= \psi(u, u_1), \\ s(u) - s_1(u_1) &= C; \end{aligned}$$

les cinq paramètres u, v, u_1, v_1, θ se réduisent ainsi à un seul, en fonction duquel ils s'expriment en termes finis, de sorte que les deux conditions d'application des équations de Lagrange sont remplies.

Ainsi, par exemple, les équations de Lagrange s'appliquent sans multiplicateurs à un solide roulant sans glisser sur un solide fixe qu'il touche en deux points ; car, dans ce cas, les trajectoires des deux points de contact peuvent se déterminer par des considérations *purement cinématiques.*

Si l'un des solides S est limité par une arête curviligne tangente à la surface du solide S_1, leur position relative peut se déterminer par u, paramètre fixant la position du point de contact I sur cette arête, u_1 et v_1 coordonnées curvilignes du point I sur la surface S_1, θ, angle de la tangente à l'arête avec la ligne $u_1 =$ const., α, angle du plan osculateur à l'arête avec le plan tangent à la surface S_1.

La connaissance de la trajectoire du point I sur S_1 entraîne la connaissance de relations de la forme

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \quad \theta = \psi(u, u_1), \quad s(u) - s_1(u_1) = C_j,$$

les cinq paramètres se réduisent à deux u et α, par exemple, liés aux autres par des équations en termes finis, et les équations de Lagrange s'appliquent au nombre minimum de paramètres.

Voici encore d'autres cas où les équations exprimant des conditions de non-glissement sont complètement intégrables :

J'imagine deux solides S et S_1 dont les surfaces soient applicables l'une sur l'autre : je les suppose assujettis à se toucher en un point occupant sur ces surfaces des positions homologues avec raccordement des directions homologues. Ces conditions, supposées réalisées à chaque instant, entraînent le non-glissement des surfaces S et S_1.

Or, ces conditions peuvent s'exprimer sous forme holonome :

$$u = u_1; \qquad v = v_1; \qquad \theta = 0;$$

deux de ces conditions pourraient évidemment être remplacées par les deux conditions de non-glissement, de sorte que ces dernières sont manifestement intégrables, et les équations de Lagrange s'appliquent au nombre minimum de paramètres.

Ainsi, elles s'appliquent à deux solides de révolution identiques, dont les axes se rencontrent, qui initialement se touchent en un point occupant sur les corps deux positions homologues, et qui, en outre, roulent sans glisser l'un sur l'autre en ce point. Ces deux corps restent constamment symétriques par rapport à leur plan tangent commun.

Je vais établir que ce sont là les seuls cas où les équations exprimant des conditions de non-glissement entre solides sont complètement intégrables :

Soit donc un système de solides invariables en contact entre eux et avec des obstacles étrangers fixes ou de mouvement connu d'avance en fonction de t. En certains de ces contacts, le glissement est supposé nul. Je vais établir que les équations exprimant ces conditions de non-glissement ne sont complètement intégrables que si ces contacts rentrent dans l'une ou l'autre des deux catégories suivantes :

a. Contacts tels que les trajectoires du point de contact sur les deux corps qui se touchent soient connues d'avance, avant toute considération dynamique;

b. Contacts entre solides limités par des surfaces applicables, le point de contact occupant des positions homologues sur les deux surfaces, avec raccordement des lignes homologues.

Je suppose donc un système dépendant des paramètres $q_1, \ldots, q_k$, t, liés par r équations de non-glissement

$$\begin{gathered} a_1^1 q'_1 + \ldots + a_1^k q'_k + a_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r^1 q'_1 + \ldots + a_r^k q'_k + a_r = 0. \end{gathered}$$

Ce système est supposé complètement intégrable, c'est-à-dire équivalant à r équations holonomes obtenues par intégration et contenant, de ce fait, des constantes arbitraires que je ne figure pas. Ces équations peuvent être résolues par rapport aux r paramètres $q_{h+1}, \ldots, q_k$ (on a posé $k = h + r$), de sorte que les coordonnées x, y, z du point de contact I de deux corps S et S', rapporté au corps S, et les coordonnées x', y', z', par rapport à des axes liés à S′ sont des fonctions de $q_1, \ldots, q_h$ et t, et l'on a

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial x}{\partial t} dt. \\
dy &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dz &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dx' &= \frac{\partial x'}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial x'}{\partial t} dt. \\
dy' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dz' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les déplacements $dq_1, \ldots, dq_h$ impliquant le non-glissement en tous ces contacts, les deux déplacements dx, dy, dz et dx', dy', dz' sont confondus en grandeur et direction; il en est ainsi en particulier pour les $h+1$ déplacements obtenus en faisant varier $q_1, \ldots, q_h, t$ *séparément*, déplacements qui sont deux à deux identiques dans le plan tangent commun aux deux corps S et S′ considérés.

Deux cas sont à distinguer :

1°. *Les $h+1$ déplacements élémentaires du point de contact* I *des corps* S *et* S′ *ont tous le même support.* Dans ce cas, les dérivées partielles de x, y, z, par rapport à $q_1, \ldots, q_h, t$, sont proportionnelles, ou, ce qui revient au même, les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(y, z)}{D(q_i, q_j)}, \quad \ldots, \quad \frac{D(y, z)}{D(q_i, t)}, \quad \ldots$$

sont nuls. On sait que, dans cas, x et y sont liés par une relation indépendante de $q_1, \ldots, q_h, t$, et de même y et z. En d'autres termes, le lieu de I sur la surface S est déterminé en dehors de toute considération dynamique: il en est de même du lieu de I sur la surface S′.

2°. *Les $h+1$ déplacements élémentaires du point de contact* I *des corps* S *et* S′ *n'ont pas tous le même support.* Je suppose, par exemple, que les déplacements correspondant à dq_1 et à dq_2 aient des supports différents. Si je fais varier q_1 et q_2 en laissant fixes $q_3, \ldots, q_h, t$, je puis choisir $\frac{dq_1}{dq_2}$ de manière à donner au déplacement de I, dans le plan tangent commun à S et S′, telle direction que je voudrai, et, par suite, choisir arbitrairement la trajectoire du point I sur l'un des deux corps S ou S'. Ces trajectoires ne sont donc pas connues d'avance. On voit, en outre, que le fait que les positions du point I sur les deux surfaces dépend des paramètres q_1 et q_2 établit une corespondance ponctuelle entre ces surfaces.

Mais, d'après la propriété fondamentale du non-glissement, cette correspondance conserve les longueurs, de sorte que les surfaces S et S' sont applicables, elles se touchent en des points homologues et les courbes homologues (trajectoires éventuelles du point I) se raccordent en ce point.

Il est ainsi établi que se sont là les seuls cas d'intégrabilité des équations non holonomes exprimant des contacts sans glissement.

Par exemple, la condition d'intégrabilité n'est pas remplie par le roulement d'un cerceau sur une table, la trajectoire du point de contact sur la tableétant inconnue; elle est remplie par le roulement d'une sphère sur un plan et sur un cylindre fixe dont les génératrices sont perpendiculaires au plan; mais elle n'est pas remplie si le cylindre, supposé de révolution, tourne autour de son axe, d'un mouvement donné en fonction de t; dans ce cas, en effet, les trajectoires des points de contact sont connues sur le plan et sur le cylindre, mais inconnues sur la sphère, et l'on ne peut appliquer les équations de Lagrange sans multiplicateurs.

Il est intéressant de remarquer que la condition pour que deux surfaces applicables S et S' se touchent constamment en des points homologues avec raccordement des lignes homologues est que la condition soit remplie à l'instant initial et que, ensuite, le pivotement soit nul.

Soient, en effet, C et C' les trajectoires du point de contact I sur les surfaces S et S'; Σ et Σ', les développables circonscrites à C et C' le long de C et de C'; elles sont tangentes en I; soit P un plan roulant sans glisser sur Σ de manière à coïncider constamment avec le plan tangent en I; de même, P', un plan roulant sur Σ'.

Le glissement en I étant nul, le mouvement $\frac{P'}{P}$ est une rotation autour de la normale en I.

Cela posé, le mouvememt $\frac{S'}{S}$ se décompose en $\frac{S'}{P'}$; $\frac{P'}{P}$; $\frac{P}{S}$. Le premier et le troisième sont des roulements autour des génératrices de Σ et de Σ' passant par I; le deuxième est une rotation autour de la normale; il en résulte que cette relation $\frac{P'}{P}$ n'est autre que le pivotement $\vec{\omega}$ du mouvement $\frac{S'}{S}$.

Or, I décrit dans P une courbe γ; dans P', une courbe γ'. γ et C sont homologues dans le roulement $\frac{P}{\Sigma}$, donc ont même centre de courbure géodésique K, puisque la déformation des surfaces conserve la courbure géodésique; de même γ' et C' ont même centre de courbure géodésique K'.

La formule d'Euler-Savary appliquée au mouvement $\frac{P'}{P}$ s'écrit

$$\frac{1}{\mathrm{IK}} - \frac{1}{\mathrm{IK'}} = -\frac{\omega}{V},$$

où V désigne la vitesse du point I; elle fait connaître la relation entre la différence des courbures géodésiques des courbes C et C' et le pivotement. Pour que les courbes C et C' soient homologues dans la transformation qui applique les surfaces S et S' l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'elles aient même courbure géodésique; donc que le pivotement ω soit nul.