BULLETIN DE LA S. M. F.

RAOUL BRICARD

Sur les systèmes « équilibrés » de quatre droites et sur les cubiques gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES SYSTÈMES « ÉQUILIBRÉS » DE QUATRE DROITES ET SUR LES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. RAOUL BRICARD.

I.

1. **Notations ; rappel de notions fondamentales.** — Dans ce travail, un *vecteur libre* sera toujours désigné par une minuscule grasse telle que $\mathbf{a}$.

Un *vecteur glissant* peut être considéré comme formé par l'association d'une droite, son *support*, et d'un vecteur libre parallèle à cette droite. Le vecteur glissant de support A et de vecteur libre $\mathbf{a}$ sera désigné par $\mathrm{A}\mathbf{a}$.

Le *comoment* de deux vecteurs glissants $\mathrm{A}\mathbf{a}$, $\mathrm{B}\mathbf{b}$ est un nombre relatif, ayant pour valeur absolue six fois le nombre qui mesure le volume d'un tétraèdre dont deux arêtes opposées sont portées par A et B, les longueurs de ces arêtes étant les modules respectifs de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$. Il est positif ou négatif suivant que, pour un observateur traversé des pieds à la tête par $\mathrm{A}\mathbf{a}$, $\mathrm{B}\mathbf{b}$ considéré comme représentant une force paraît provoquer une rotation de sens positif ou de sens négatif (le sens positif de rotation étant fixé par une convention initiale). Ce comoment sera désigné par $(\mathrm{A}\mathbf{a}, \mathrm{B}\mathbf{b})$. Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas nuls, il est nul quand A et B sont dans un même plan et dans ce cas seulement. Dans le cas général, on a

$$(\mathrm{A}\mathbf{a}, \mathrm{B}\mathbf{b}) = (\mathrm{B}\mathbf{b}, \mathrm{A}\mathbf{a}).$$

Un *torseur* $\mathfrak{T}$ ou système de vecteurs glissants sera considéré comme étant leur somme. L'*équivalence* de deux torseurs sera notée comme une égalité algébrique. On écrira donc des formules telles que

$$\sum_{1}^{m} A_i \mathbf{a}_i = \sum_{1}^{n} B_i \mathbf{b}_i.$$

Par exemple, la réduction à un vecteur glissant unique de trois vecteurs glissants parallèles $A\mathbf{u}$, $B\mathbf{u}$, $C\mathbf{u}$, de même vecteur libre $\mathbf{u}$, se traduit par l'égalité

$$A\mathbf{u} + B\mathbf{u} + C\mathbf{u} = X(3\mathbf{u}),$$

X étant la droite parallèle à A, B, C qui passe par le *point moyen* (ou centre des moyennes distances) de trois points quelconques appartenant respectivement à ces trois droites.

Le *vecteur libre* du torseur $\Sigma A_i \mathbf{a}_i$ est le vecteur libre $\Sigma \mathbf{a}_i$.

Le *comoment* des deux torseurs $\mathfrak{T} = \Sigma A_i \mathbf{a}_i$ et $\mathfrak{T}' = \Sigma B_j \mathbf{b}_j$ est la somme $\Sigma(A_i \mathbf{a}_i, B_j \mathbf{b}_j)$ où l'on forme toutes les combinaisons des indices i et des indices j. Ce comoment sera désigné par $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$. En particulier, si $\mathfrak{T}'$ est constitué par un vecteur glissant unique $B\mathbf{b}$, on peut considérer le comoment $(\mathfrak{T}, B\mathbf{b})$, qu'on appellera aussi *moment* de $\mathfrak{T}$ par rapport à $B\mathbf{b}$.

L'*automoment* du torseur $\Sigma A_i \mathbf{a}_i$ est la somme $\Sigma(A_i \mathbf{a}_i, A_j \mathbf{a}_j)$ des comoments des vecteurs glissants qui le constituent, pris deux à deux.

Si le vecteur libre d'un torseur est nul, l'automoment de ce torseur est nul aussi. Si l'automoment d'un torseur est nul, ou bien ce torseur a un vecteur libre nul, ou bien il est équivalent à un vecteur glissant unique.

Si deux torseurs ont même vecteur libre et s'ils ont mêmes moments par rapport à trois vecteurs glissants non parallèles à un même plan, ces deux torseurs sont équivalents.

2. Système équilibré de quatre vecteurs glissants. — Soient A, B, C, D quatre droites dont trois quelconques ne sont pas parallèles à un même plan, $\mathbf{d}$ un vecteur libre non nul parallèle à D. On sait qu'il existe trois vecteurs libres bien déterminés $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ respectivement parallèles à A, B, C, dont aucun n'est nul et tels qu'on ait

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0. \tag{2. 1}$$

Le torseur $\mathrm{A}\mathbf{a} + \mathrm{B}\mathbf{b} + \mathrm{C}\mathbf{c} + \mathrm{D}\mathbf{d}$ a un vecteur libre nul, donc un automoment nul. On a par conséquent, en explicitant cet automoment,

$$(2.\ 2)\quad (\mathrm{A}\mathbf{a},\ \mathrm{D}\mathbf{d}) + (\mathrm{B}\mathbf{b},\ \mathrm{D}\mathbf{d}) + (\mathrm{C}\mathbf{c},\ \mathrm{D}\mathbf{d}) + (\mathrm{B}\mathbf{b},\ \mathrm{C}\mathbf{c}) + (\mathrm{C}\mathbf{c},\ \mathrm{A}\mathbf{a}) + (\mathrm{A}\mathbf{a},\ \mathrm{B}\mathbf{b}) = 0.$$

Il résulte de là que, des trois relations

$$(2.\ 3)\qquad (\mathrm{A}\mathbf{a},\ \mathrm{D}\mathbf{d}) + (\mathrm{B}\mathbf{b},\ \mathrm{C}\mathbf{c}) = 0,$$

$$(2.\ 4)\qquad (\mathrm{B}\mathbf{b},\ \mathrm{D}\mathbf{d}) + (\mathrm{C}\mathbf{c},\ \mathrm{A}\mathbf{a}) = 0,$$

$$(2.\ 5)\qquad (\mathrm{C}\mathbf{c},\ \mathrm{D}\mathbf{d}) + (\mathrm{A}\mathbf{a},\ \mathrm{B}\mathbf{b}) = 0,$$

deux quelconques entraînent la troisième.

Je dirai, quand les quatre relations (2. 1), (2. 3), (2. 4), (2. 5) sont vérifiées (ce qui ne fait que trois conditions distinctes), que les quatre vecteurs glissants $\mathrm{A}\mathbf{a}$, $\mathrm{B}\mathbf{b}$, $\mathrm{C}\mathbf{c}$, $\mathrm{D}\mathbf{d}$ forment un *système équilibré*.

On fait immédiatement les remarques suivantes :

1° Les égalités (2. 1), (2. 3), (2. 4), (2. 5) n'étant pas altérées par une permutation quelconque effectuée entre les droites A, B, C, D, on voit que *les relations entre les quatre vecteurs glissants d'un système équilibré sont symétriques*.

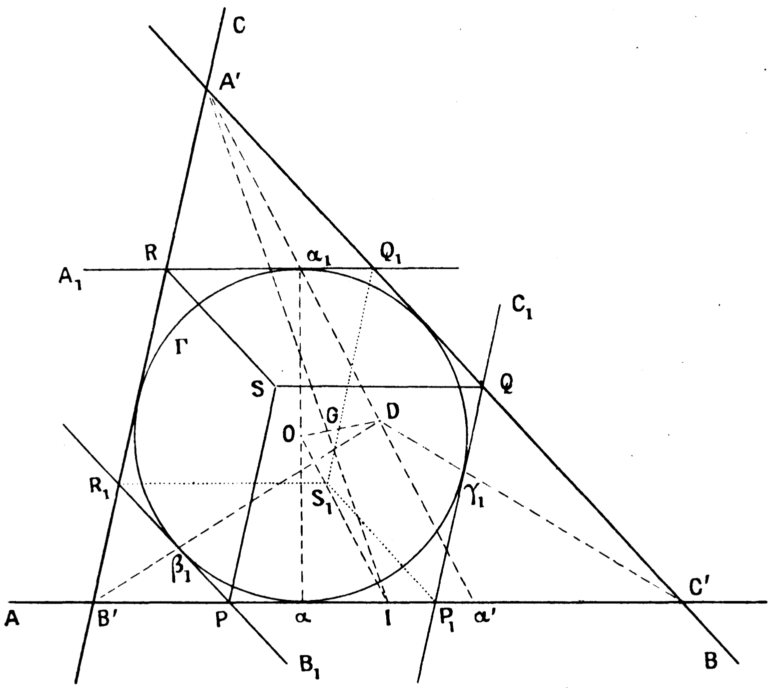
2° Si quatre vecteurs glissants forment un système équilibré, il en est de même du système obtenu en conservant leurs supports et en altérant leurs vecteurs libres dans un même rapport arbitraire. *On peut donc dire des droites mêmes qui sont ces supports qu'elles forment un système équilibré.*

Il resterait à examiner comment doit être modifiée la définition d'un système équilibré de quatre droites quand trois d'entre elles sont parallèles à un même plan. Je laisse de côté cette discussion facile, sans intérêt pour la suite.

3. Construction d'une droite D de direction donnée, formant un système équilibré avec trois droites données A, B, C non parallèles à un même plan. — Le vecteur libre $\mathbf{d}$, de module quelconque, étant pris parallèle à D, les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont déterminés par (2. 1). D doit alors être telle que (2. 3) et (2. 4) soient vérifiées, ce qui impose deux conditions nouvelles à cette droite et achève de la déterminer.

Soient (H) l'hyperboloïde déterminé par A, B, C; O son centre; (Π) le plan diamétral de (H) conjugué de la direction de D. Faisons la figure en prenant le plan (Π) comme plan de projection, les

Fig. 1.



projetantes (en général obliques) étant parallèles à D (*fig.* 1). Sur cette figure, A, B, C forment un triangle. Soient A', B', C' ses sommets, G son centre de gravité ([1]). La droite D est représentée par un point.

Par chacune des droites A, B, C faisons passer deux plans respectivement parallèles aux deux autres droites (construction classique). On détermine ainsi un parallélépipède $PP_1QSR_1S_1Q_1R$

([1]) Si (H) a des génératrices parallèles à D, A, B et C concourent sur la figure et la démonstration doit être légèrement modifiée. Les conclusions restent d'ailleurs les mêmes que dans le cas général.

de centre O, que j'appellerai le *parallélépipède des trois droites* A, B, C. Appelons A_1, B_1, C_1 les arêtes de ce parallélépipède respectivement opposées à A, B, C. Ce sont trois génératrices de (H) appartenant au système opposé à celui de A, B, C.

Dans les égalités qui vont suivre, A′, B′, C′, O, G désigneront les projetantes passant par les points de mêmes noms.

Le torseur $O\mathbf{d} + A_1\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c}$ a un vecteur libre nul. Écrivons que son automoment est nul, en tenant compte que

$$(A_1\mathbf{a}, B\mathbf{b}) = (A_1\mathbf{a}, C\mathbf{c}) = 0,$$

car A_1 rencontre B et C. On obtient

$$(O\mathbf{d}, A_1\mathbf{a}) + (O\mathbf{d}, B\mathbf{b}) + (O\mathbf{d}, C\mathbf{c}) + (B\mathbf{b}, C\mathbf{c}) = 0.$$

Mais on a évidemment

$$(O\mathbf{d}, A_1\mathbf{a}) = -(O\mathbf{d}, A\mathbf{a}).$$

Donc

$$-(O\mathbf{d}, A\mathbf{a}) + (O\mathbf{d}, B\mathbf{b}) + (O\mathbf{d}, C\mathbf{c}) + (B\mathbf{b}, C\mathbf{c}) = 0.$$

De même

$$(O\mathbf{d}, A\mathbf{a}) - (O\mathbf{d}, B\mathbf{b}) + (O\mathbf{d}, C\mathbf{c}) + (C\mathbf{c}, A\mathbf{a}) = 0,$$
$$(O\mathbf{d}, A\mathbf{a}) + (O\mathbf{d}, B\mathbf{b}) - (O\mathbf{d}, C\mathbf{c}) + (A\mathbf{a}, B\mathbf{b}) = 0.$$

De ces trois relations on tire aisément

$$(3.1) \qquad (O\mathbf{d}, A\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}[(C\mathbf{c}, A\mathbf{a}) + (A\mathbf{a}, B\mathbf{b})].$$

Écrivons ensuite que l'automoment du torseur

$$A'\mathbf{d} + A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c}$$

est nul, en tenant compte que

$$(A'\mathbf{d}, B\mathbf{b}) = (A'\mathbf{d}, C\mathbf{c}) = 0.$$

On obtient

$$(3.2) \qquad (A'\mathbf{d}, A\mathbf{a}) + (B\mathbf{b}, C\mathbf{c}) + (C\mathbf{c}, A\mathbf{a}) + (A\mathbf{a}, B\mathbf{b}) = 0.$$

Cela posé, considérons le torseur

$$\mathfrak{T} = O(-2\mathbf{d}) + A'\mathbf{d} + B'\mathbf{d} + C'\mathbf{d} = O(-2\mathbf{d}) + G(3\mathbf{d})$$

et cherchons son moment par rapport à $\mathbf{Aa}$. On a

$$(\mathfrak{T}, \mathbf{Aa}) = [\mathrm{O}(-2\mathbf{d}), \mathbf{Aa}] + (\mathrm{A}'\mathbf{d}, \mathbf{Aa}),$$

d'où en tenant compte de (3. 1) et de (3. 2),

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}, \mathbf{Aa}) &= (\mathbf{Cc}, \mathbf{Aa}) + (\mathbf{Aa}, \mathbf{Bb}) - (\mathbf{Bb}, \mathbf{Cc}) - (\mathbf{Cc}, \mathbf{Aa}) - (\mathbf{Aa}, \mathbf{Bb}) \\ &= -(\mathbf{Bb}, \mathbf{Cc}).\end{aligned}$$

D'autre part, on doit avoir, en vertu de (2. 3),

$$(\mathbf{Dd}, \mathbf{Aa}) = -(\mathbf{Bb}, \mathbf{Cc}).$$

Donc

$$(\mathfrak{T}, \mathbf{Aa}) = (\mathbf{Dd}, \mathbf{Aa})$$

et de même

$$(\mathfrak{T}, \mathbf{Bb}) = (\mathbf{Dd}, \mathbf{Bb}),$$
$$(\mathfrak{T}, \mathbf{Cc}) = (\mathbf{Dd}, \mathbf{Cc}).$$

D'ailleurs le vecteur libre de $\mathfrak{T}$ est $-2\mathbf{d} + 3\mathbf{d} = \mathbf{d}$. Donc $\mathfrak{T}$ et $\mathbf{Dd}$ ont même vecteur libre et ont aussi même moment par rapport à chacun des trois vecteurs glissants non parallèles à un même plan $\mathbf{Aa}$, $\mathbf{Bb}$, $\mathbf{Cc}$. On a par conséquent, en vertu du théorème rappelé à la fin du n° **1**,

$$\mathfrak{T} = \mathrm{O}(-2\mathbf{d}) + \mathrm{G}(3\mathbf{d}) = \mathbf{Dd},$$

d'où

$$\mathrm{G}(3\mathbf{d}) = \mathrm{O}(2\mathbf{d}) + \mathbf{Dd}.$$

Cela veut dire, en langage ordinaire, que le vecteur glissant $\mathrm{G}(3\mathbf{d})$ est la résultante des vecteurs glissants parallèles $\mathrm{O}(2\mathbf{d})$ et $\mathbf{Dd}$, le premier étant double du second. Par conséquent le point D de la figure est sur la droite OG et l'on a $\mathrm{OD} = 3\mathrm{OG}$. On aboutit, dans l'espace, à la construction suivante :

Construire les droites A', B', C' *parallèles à la direction donnée, chacune d'elles rencontrant deux des droites* A, B, C; *construire la droite moyenne* G *de* A', B', C'. *La droite cherchée* D *est homothétique de* G *par rapport au point* O, *le rapport d'homothétie étant égal à* + 3.

On voit que *la droite* D *de direction donnée, formant avec* A, B, C *un système équilibré, est unique*.

4. Remarque. — Soit, dans le système de représentation adopté,

Γ la conique de contour apparent de (H). C'est la trace de (H) sur le plan de (Π). Γ est inscrite à l'hexagone qui a pour côtés A, B_1, C, A_1, B, C_1. Soient α et α_1 ses points de contacts avec A et avec A_1. Ce sont les traces des droites de l'espace A et A_1.

Γ étant inscrite dans le quadrilatère $B'RQ_1C'$, on sait que $B'Q_1$ et $C'R$ se coupent sur $\alpha\alpha_1$; on a donc

$$\frac{R\alpha_1}{\alpha_1 Q_1} = \frac{\alpha C'}{B'\alpha},$$

d'où l'on conclut immédiatement que, si l'on appelle α' le point de rencontre de $A'\alpha_1$ et de $B'C'$, le segment $\alpha\alpha'$ a même milieu I que $B'C'$.

O étant le milieu de $\alpha\alpha_1$ et I le milieu de $\alpha\alpha'$, OI est parallèle à $\alpha_1\alpha'$. Si donc on désigne pour un instant par D' le point où OG rencontre $\alpha_1\alpha'$, on a

$$\frac{GD'}{OG} = \frac{GA'}{IG} = 2.$$

Donc $GD' = 2\,OG$ et $OD' = 3\,OG$. Par conséquent, le point D' se confond ave le point D. Ainsi :

Le point D *appartient à la droite* $A'\alpha_1$ *et de même aux droites analogues* $B'\beta_1$ *et* $C'\gamma_1$.

Considérons maintenant le dièdre que forment les deux faces, se coupant suivant la droite de l'espace A_1, du parallélépipède des trois droites A, B, C. L'une de ces faces contient B, l'autre C. La droite A' les rencontre donc aux points ($A'B$) et ($A'C$) où elle rencontre B et C, c'est-à-dire aux points où elle rencontre l'hyperboloïde (H). Le point A' de la figure, étant dans le plan diamétral de (H) conjugué de la direction de A', est donc le point moyen de ces deux points ($A'B$) et ($A'C$).

Comme le point D de la figure est sur $A'\alpha_1$, la droite D rencontre les faces du même dièdre et le plan de la figure en trois points qui sont homothétiques, par rapport au point α_1, respectivement des points ($A'B$), ($A'C$) et A'. Donc le troisième de ces points est le point moyen des deux premiers. Les dièdres d'arêtes B_1 et C_1 donnent lieu à des remarques semblables. Ainsi :

Chacun des dièdres, ayant pour arêtes A_1, B_1, C_1, *du paral-*

lélépipède des trois droites A, B, C *intercepte sur la droite* D *un segment dont le milieu est le point* D *de la figure.*

Réciproquement, *une parallèle aux projetantes, sur laquelle les dièdres* A_1, B_1, C_1 *interceptent trois segments ayant même point milieu, se confond nécessairement avec* D. Il suffit, pour le reconnaître, d'établir qu'il n'y a qu'une droite de direction donnée qui possède la propriété dont il s'agit. Or le milieu commun des segments interceptés sur une telle droite par les trois dièdres appartient aux plans diamétraux conjugués de la direction donnée par rapport aux trois quadriques dont chacune est formée par les deux faces de l'un des dièdres. Si ces trois plans avaient plus d'un point commun, ils auraient une droite commune. On en conclut que si l'on forme un trièdre en menant par un point O des parallèles Ox, Oy, Oz à A_1, B_1, C_1, les plans diamétraux conjugués de la direction donnée par rapport aux trois quadriques dont chacune est formée par deux faces du trièdre auraient aussi une droite commune. Prenons pour axes de coordonnées Ox, Oy, Oz. Soient l, m, n les paramètres directeurs de la direction donnée. Les trois quadriques dont il s'agit ont pour équations respectives

$$yz = 0, \qquad zx = 0, \qquad xy = 0,$$

et les plans diamétraux conjugués de la direction (l, m, n) par rapport à ces quadriques ont pour équations

$$ny + mz = 0, \qquad lz + nx = 0, \qquad mx + ly = 0.$$

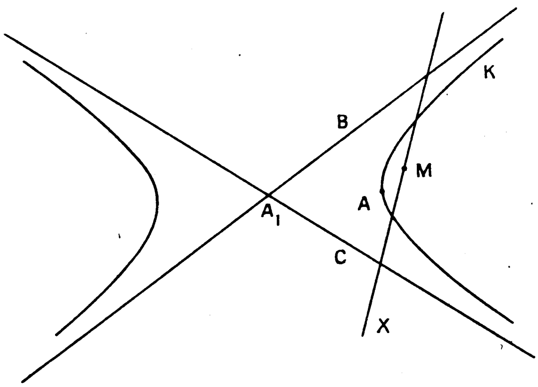
Ils ne peuvent se couper suivant une droite que si l'on a $lmn = 0$, c'est-à-dire si la direction donnée et deux droites A, B, C sont parallèles à un même plan. Ce cas est exclu. Donc, etc.

5. **Congruence des droites D qui forment un système équilibré avec les droites A, B, C.** — Ces droites sont assujetties à deux conditions distinctes, puisqu'il existe, comme on l'a vu au n° 3, une droite D et une seule de direction donnée. Elles forment donc une congruence. On va reconnaître *qu'elle est identique à celle des cordes de la cubique gauche* K *qui a pour asymptotes* A, B, C (cubique gauche bien déterminée, comme on sait).

Pour démontrer cela, projetons K sur un plan quelconque, les projetantes étant parallèles à A (*fig.* 2). A est représentée par un point. La droite A_1 de la figure 1 est représentée par le point de rencontre de B et de C. La projection de K est l'hyperbole qui passe par le point A et qui a pour asymptotes B et C.

Soit X une corde quelconque de K. C'est en projection une corde de l'hyperbole K et son milieu M est aussi le milieu du segment intercepté sur cette corde par les asymptotes B et C. Or les droites B et C de la figure ne sont autres que les traces des deux

Fig. 2.



plans parallèles aux projetantes (A_1 B) et (A_1 C), plans qui forment le dièdre d'arête A_1 du parallélépipède des trois droites A, B, C. On en conclut que, dans l'espace, le milieu de la corde X est aussi le milieu du segment intercepté sur cette corde par le dièdre considéré. Un raisonnement pareil s'applique aussi à chacun des dièdres B_1 et C_1. On voit donc que :

Les trois dièdres d'arêtes respectives A_1, B_1, C_1 *du parallélépipède des trois droites* A, B, C *interceptent sur toute corde de la cubique gauche* K *trois segments ayant le même point milieu, qui est aussi celui de la corde.*

On en conclut, en vertu des résultats obtenus au n° **4**, que toute corde de K forme avec A, B, C un système équilibré. Réciproquement, toute droite formant avec A, B, C un système équilibré est une corde de K (parce qu'il n'y a qu'une telle droite et aussi qu'une seule corde de K de direction donnée).

Le théorème énoncé au début de ce paragraphe est donc établi. En le rapprochant des résultats obtenus au n° 3, on voit qu'il donne le moyen, étant donnée une cubique gauche, de construire par des opérations linéaires la corde de cette courbe qui est parallèle à une droite donnée, c'est-à-dire le point double de la projection (parallèle) de la cubique gauche sur un plan quelconque.

Observons encore que la symétrie des relations qui existent entre les quatre droites d'un système équilibré permet d'énoncer la propriété suivante :

Si de quatre droites l'une est une corde de la cubique gauche qui a pour asymptotes les trois autres, cette relation (double) subsiste quand on permute entre elles, d'une façon quelconque, les quatre droites.

Je laisse au lecteur le soin de reconnaître que cette proposition peut aisément être obtenue comme conséquence du théorème de Lamé sur les réseaux ponctuels de quadriques.

6. **Autre propriété des systèmes équilibrés.** — Soient A, B, C trois droites non parallèles à un même plan et $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ trois vecteurs libres qui leur sont respectivement parallèles. Posons

$$(6.\ 1)\qquad \left\{\begin{aligned} -\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} &= \mathbf{d}, \\ -\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} &= \mathbf{d}_1, \\ \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c} &= \mathbf{d}_2, \\ \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c} &= \mathbf{d}_3. \end{aligned}\right.$$

Il existe quatre droites D, D_1, D_2, D_3, respectivement parallèles aux vecteurs $\mathbf{d}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, tels que les systèmes de vecteurs glissants, tous de vecteur libre nul,

$$\begin{array}{llll} D\mathbf{d}, & A\mathbf{a}, & B\mathbf{b}, & C\mathbf{c}, \\ D_1\mathbf{d}_1, & A\mathbf{a}, & B(-\mathbf{b}), & C(-\mathbf{c}), \\ D_2\mathbf{d}_2, & A(-\mathbf{a}), & B\mathbf{b}, & C(-\mathbf{c}), \\ D_3\mathbf{d}_3, & A(-\mathbf{a}), & B(-\mathbf{b}), & C\mathbf{c} \end{array}$$

sont équilibrés. Je dis que *le système de vecteurs glissants* $D\mathbf{d}$, $D_1\mathbf{d}_1$, $D_2\mathbf{d}_2$, $D_3\mathbf{d}_3$, *dont le vecteur libre* $\mathbf{d}+\mathbf{d}_1+\mathbf{d}_2+\mathbf{d}_3$ *est nul en vertu des* (6. 1), *est équilibré.*

Considérons en effet le torseur $D\mathbf{d}+D_1\mathbf{d}_1+A(2\mathbf{a})$. On constate que son vecteur libre est nul, donc son automoment l'est aussi, ce qui donne

$$(6.\ 2)\qquad (D\mathbf{d},\ D_1\mathbf{d}_1) + 2(D\mathbf{d},\ A\mathbf{a}) + 2(D_1\mathbf{d}_1, A\mathbf{a}) = 0.$$

De même le torseur $D_2\mathbf{d}_2 + D_3\mathbf{d}_3 + A(-2\mathbf{a})$ ayant un vecteur nul, on a

$$(6.\ 3)\qquad (D_2\mathbf{d}_2,\ D_3\mathbf{d}_3) - 2(D_2\mathbf{d}_2,\ A\mathbf{a}) - 2(D_3\mathbf{d}_3,\ A\mathbf{a}) = 0.$$

Mais, en vertu des hypothèses,

$$(6.\ 4)\qquad (D\mathbf{d},\ A\mathbf{a}) = -(B\mathbf{b},\ C\mathbf{c}),$$

$$(6.\ 5)\qquad (D_1\mathbf{d}_1,\ A\mathbf{a}) = -[B(-\mathbf{b}),\ C(-\mathbf{c})] = -(B\mathbf{b},\ C\mathbf{c}),$$

$$[D_2\mathbf{d}_2,\ A(-\mathbf{a})] = -[B\mathbf{b},\ C(-\mathbf{c})]$$

ou

$$(6.\ 6)\qquad (D_2\mathbf{d}_2,\ A\mathbf{a}) = -(B\mathbf{b},\ C\mathbf{c}),$$

et de même

$$(6.\ 7)\qquad (D_3\mathbf{d}_3,\ A\mathbf{a}) = -(B\mathbf{b},\ C\mathbf{c}).$$

En ajoutant (6. 2) et (6. 3) en tenant compte de (6. 4), (6. 5), (6. 6) et (6. 7), on obtient

$$(D\mathbf{d},\ D_1\mathbf{d}_1) + (D_2\mathbf{d}_2,\ D_3\mathbf{d}_3) = 0.$$

De même

$$(D\mathbf{d},\ D_2\mathbf{d}_2) + (D_3\mathbf{d}_3,\ D_1\mathbf{d}_1) = 0,$$

$$(D\mathbf{d},\ D_3\mathbf{d}_3) + (D_1\mathbf{d}_1,\ D_2\mathbf{d}_2) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

II.

7. Quadriques de révolution contenant une cubique gauche. — Soient K une cubique gauche, A, B, C ses trois asymptotes, α_0, β_0 et γ_0 les points à l'infini de celles-ci. Par K passent ∞^2 quadriques dont les coniques à l'infini contiennent toutes les points α_0, β_0, γ_0. Réciproquement il existe une quadrique (Q) et une seule contenant K et une conique quelconque Γ_0 qui passe par α_0, β_0 et γ_0. Pour que (Q) soit de révolution, il faut et il suffit que Γ_0 soit bitangente à l'ombilicale. Or on sait que, dans un plan, il existe quatre coniques passant par trois points donnés et bitangentes à une conique donnée. Il existe donc quatre quadriques de révolution contenant K. Ce sont naturellement des hyperboloïdes à une nappe, si les asymptotes A, B et C sont réelles.

Les axes de ces quatre quadriques sont parallèles à ceux de quatre cônes de révolution qui passent par les arêtes, supposées parallèles à A, B, C, d'un trièdre. On reconnaît aisément par des considérations élémentaires que le plan passant par deux quelconques de ces derniers axes est perpendiculaire au plan passant par les deux autres. Donc les axes des quatre quadriques de révolution (Q) sont tels qu'un plan parallèle à deux de ces axes est perpendiculaire à un plan parallèle aux deux autres. Je dirai que quatre droites satisfaisant à ces conditions [qui se réduisent à deux distinctes et qui déterminent d'une manière unique la direction de l'une des droites quand on connaît celles des trois autres (1)] forment un système *orthique*.

Ces résultats ont été donnés par Cremona, il y a longtemps. Je vais montrer que l'on peut préciser les relations entre les axes des quatre quadriques de révolution. J'établirai à cet effet que :

1° *l'un quelconque de ces axes et les trois asymptotes d'une certaine cubique gauche forment un système équilibré;*

2° *les quatre axes forment un système équilibré.*

8. **Traitement d'un problème préliminaire.** — Soient données trois droites de l'espace A, B, C, non parallèles à un même plan et ne se rencontrant pas deux à deux. *Cherchons le lieu d'un point tel que ses projections sur* A, B, C *soient alignées.*

Le problème peut s'énoncer ainsi : soit G une génératrice variable de l'hyperboloïde (H) défini par A, B, C, G étant du système opposé à celui de ces trois droites. Elle les rencontre en trois points α, β, γ par lesquels on mène trois plans perpendiculaires respectivement à A, B, C. *Quel est le lieu de leur point de rencontre* M?

Soient A'_0, B'_0, C'_0 les droites à l'infini perpendiculaires respectivement à A, B, C. Les trois plans dont il est question dans

(1) A moins cependant que ces trois dernières directions ne soient deux à deux rectangulaires. La direction de la quatrième droite est alors indéterminée. Je laisserai de côté ce cas particulier.

l'énoncé sont $(A'_0\alpha)$, $(B'_0\beta)$, $(C'_0\gamma)$. Pris deux à deux, ils engendrent des faisceaux homographiques. Par conséquent, le lieu de leur point commun M est, en vertu d'un théorème connu, une cubique gauche K' qui a pour cordes A'_0, B'_0, C'_0. Autrement dit, les points à l'infini de K' sont les sommets α'_0, β'_0, γ'_0 du triangle formé par A'_0, B'_0, C'_0.

α'_0 est le point à l'infini des droites perpendiculaires à la fois à B et C. De même β'_0 et γ'_0, etc.

Cherchons la tangente à K' en α'_0, c'est-à-dire l'asymptote de cette cubique gauche, perpendiculaire à la fois à B et à C. Pour cela, revenons à la figure 1. Trois positions correspondantes de α, β, γ sont le point à l'infini α_0 de A et les points Q_1 et R de la figure. Au plan $(A'_0\alpha_0)$, c'est-à-dire au plan de l'infini, correspondent les plans (B'_0Q_1) et (C'_0R), c'est-à-dire les plans menés perpendiculairement à B en Q_1 et à C en R. Les trois plans $(A'_0\alpha_0)$, (B'_0Q_1) et (C'_0R) se coupent en α'_0. La tangente à K' en ce point est la droite commune aux deux derniers plans, c'est-à-dire aux plans menés perpendiculairement à B en Q_1, et à C en R. Je dirai que cette droite A'' et les droites analogues B'' et C'' sont *associées* aux droites A, B, C. Ainsi :

Le lieu des points dont les projections sur A, B, C *sont alignées est la cubique gauche* K' *ayant pour asymptotes les droites* A'', B'', C'' *associées à* A, B, C (¹).

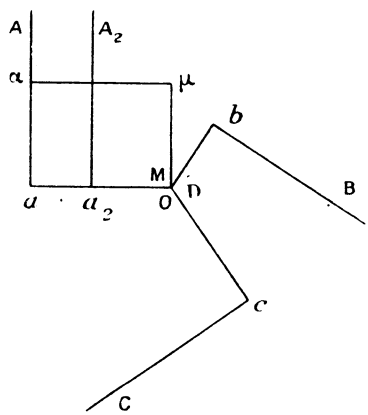
On peut appeler K' *cubique gauche pédale* du système des trois droites A, B, C.

9. Relations avec la cubique gauche K' des axes des quadriques de révolution qui contiennent la cubique gauche K. — Soient (H') l'un des hyperboloïdes de révolution qui contiennent K, O son centre, D son axe. Faisons la figure (*fig.* 3) en projection orthogonale sur le plan équatorial de (H'), supposé horizontal pour simplifier le langage. Soient a, b, c les traces de A, B, C. Appelons θ la valeur commune des angles que font avec D les droites A, B, C convenablement orientées.

(¹) Ce théorème est énoncé partiellement dans les *Compléments de Géométrie moderne*, de CH. MICHEL, Paris, 1926 (p. 313, question n° 70).

Le point à l'infini α_0 de A appartient à K et par suite à (H'). Il existe donc sur cet hyperboloïde deux génératrices passant par α_0, c'est-à-dire parallèles à A. Soient A_2 l'une d'elles, a_2 sa trace. Le plan (Oa_2A_2) est le plan tangent à (H) au point α_2. Ce plan contient A, qui touche la cubique gauche K au même point. Donc la trace a de A est sur Oa_2. Or cette dernière droite est perpendiculaire à A_2 (dans l'espace et sur la figure). Par conséquent Oa est perpendiculaire à A; de même Ob à B, Oc à C.

Fig. 3.



Soit maintenant M un point quelconque de D. Désignons par z sa cote. Cherchons sa projection sur A. Pour cela, projetons d'abord M sur le plan (OaA). On obtient un point μ tel que $O\mu$ soit perpendiculaire sur la figure à Oa, qui est la trace du plan considéré. Projetons ensuite le point μ en α sur A. La droite $\mu\alpha$ est parallèle à Oa. En vertu du théorème des trois perpendiculaires, α est la projection cherchée.

On a de plus, $a\alpha$ étant le segment de l'espace,

$$a\alpha = O\mu = z\cos\theta$$

et, par conséquent,

$$\text{Cote du point } \alpha = a\alpha\cos\theta = z\cos^2\theta.$$

On trouve les mêmes valeurs pour les cotes des points β et γ, projections du point M sur B et sur C. Par conséquent, *les projections sur les asymptotes* A, B, C *d'un même point* M *de l'axe* D *sont dans un même plan horizontal, c'est-à-dire perpendiculaire à* D.

Réciproquement, trois points α, β, γ de A, B, C situés dans un même plan horizontal sont les projections sur ces asymptotes d'un même point de D.

Or il existe dans (H′) deux génératrices horizontales, de système opposé à celui de A, B, C (imaginaires, bien entendu). On peut donc trouver de deux manières sur A, B, C trois points α, β, γ qui appartiennent à un même plan horizontal et qui de plus sont en ligne droite. Il existe par conséquent sur D deux points dont les projections sur A, B, C sont alignées. Ces deux points appartiennent à la cubique gauche K′ pédale du système des trois droites A, B, C. Ainsi :

L'axe de chacune des quadriques de révolution qui contiennent la cubique gauche K, *ayant pour asymptotes* A, B, C, *est une corde de la cubique gauche* K′ *qui a pour asymptotes les droites* A″, B″, C″ *associées à* A, B, C, *au sens du n°* 9.

Donc (n° 5), *l'axe de l'une quelconque de ces quadriques forme avec* A″, B″, C″ *un système équilibré.* Comme on connaît les directions des quatre axes, définies d'une manière simple, on peut les construire par le procédé indiqué à la fin du n° 3.

10. **Relations entre les quatre axes.** — Soient **a**, **b**, **c** des vecteurs libres *unitaires* parallèles respectivement aux droites A, B, C. Posons, en employant le signe $\wedge$ pour la multiplication vectorielle,

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a}', \quad \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}', \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}'.$$

O étant un point quelconque, soient Ox, Oy, Oz trois demi-droites issues de ce point, parallèles respectivement à A, B, C et orientées comme les vecteurs libres **a**, **b**, **c**. Soient encore X l'axe du cône de révolution bien déterminé qui a pour trois de ses génératrices les demi-droites Ox, Oy, Oz. X est parallèle à l'axe D de l'une des quadriques de révolution qui contiennent la cubique gauche K.

X est la droite commune aux plans bissecteurs intérieurs des angles $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$, $\widehat{xOy}$ et par conséquent est perpendiculaire