BULLETIN DE LA S. M. F.

LUCIEN FERAUD

# Formes de Pfaff et systèmes lagrangiens

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 59 (1931), p. 40-45
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__40_0>

## FORMES DE PFAFF ET SYSTÈMES LAGRANGIENS ;

PAR M. LUCIEN FÉRAUD.

A la fin d'une Note dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1], j'ai dû me borner à mentionner l'intérêt qu'il y aurait à se référer à la théorie des formes de Pfaff pour l'étude des transformations, que l'on est amené à faire en dynamique sur les systèmes d'équations et qui jouent dans maintes questions, en particulier dans la théorie de la stabilité de M. Birkhoff [2], un rôle fondamental.

En partant de cette remarque je me propose dans la première partie de ce travail de résumer, aussi brièvement que possible, les principaux résultats que l'on peut extraire des mémoires de M. Cartan [3], et en même temps de les donner sous la forme la plus propice à leur application aux problèmes de Mécanique.

Cette mise au point permet, presque immédiatement, d'obtenir deux résultats nouveaux, l'un et l'autre relatifs à des systèmes d'un type général : les *systèmes lagrangiens* (que l'on désigne encore sous le nom de *Lagrangiens généralisés; cf.* LEVI-CIVITA et AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, Partie I [v; 41]).

Le premier comporte la réduction de ces systèmes eux-mêmes à des formes canoniques et concerne leurs trajectoires. Le deuxième a pour objet des équations aux variations : il provient de l'étude d'un système lagrangien au voisinage de certains de ses points d'équilibre.

I. Soit (L) le système

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q'_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

---

(1) Tome 190, 1930, p. 358.

(2) *Dynamical systems* (*American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. IX. 1927), et *Stability and the Equations of Dynumicas* (*American Journal of Mathematics*, 49, I, 1927, p. 1).

(3) En particulier cf. *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 16, 1889.

où F est une fonction des $2n$ variables [1] $q$, $q'$, considérées comme indépendantes, qui est supposée holomorphe dans un certain domaine. Les équations

$$(1) \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial q'_i}$$

permettront d'éliminer les $q'$ lorsqu'on pourra les résoudre par rapport à ces variables. (L) se ramènera à un système canonique (H) par un changement de variables holomorphe tant que le Hessien

$$\Delta = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial q'_i \, \partial q'_j} \right|$$

sera différent de zéro.

En prenant

$$X_h = \frac{\partial F}{\partial q'_h}, \qquad x_h = q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$X_k = 0, \qquad x_k = q'_h \qquad (k = n+1, \ldots, 2n),$$

$$Q = \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial q'_i} q'_i - F,$$

(L) peut être regardé comme le *système caractéristique* [2] de la forme de Pfaff :

$$\omega + Q\,dt \qquad \left( \omega = \sum_1^{2n} X_i \, dx_i \right),$$

c'est-à-dire comme le système admettant pour invariant intégral $\int \omega + Q\,dt$.

On pourra encore dire que c'est le *système pfaffien* [3] :

$$(P) \qquad \sum_1^{2n} a_{ij} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

dont le déterminant $|a_{ij}|$ sera égal à $\Delta$. La transformation (1) réduit donc le système (P) à un système hamiltonien (H) à la condition que $\Delta$ soit différent de zéro.

---

(1) Dans le système Lagrangien le plus général, $t$ peut figurer explicitement dans F, nous n'envisagerons pas ce cas.

(2) CARTAN, *Leçons sur les Invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.

(3) BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, *loc. cit.*

Nous commençons par nous reporter à la théorie des expressions de Pfaff, plus particulièrement à un des premiers Mémoires (1899) de la série donnée par M. Cartan aux *Annales de l'École Normale supérieure*. Il y est établi que la réduction de $\omega$ à sa forme canonique $\Omega$ dépend de deux théorèmes fondamentaux (¹) dont les énoncés peuvent être réunis de la manière suivante :

*Une forme de Pfaff $\omega$ de classe $2m$ peut être ramenée à*

$$\Omega = \sum_1^m y_i dz_i$$

*et une forme $\omega$ de classe $2m-1$ à*

$$\Omega = de + \sum_1^m y_i dz_i;$$

*dans les deux cas le changement de variables qui effectue la transformation est holomorphe au voisinage de tout point pour lequel les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ ne sont pas tous nuls.*

Le symbole $\omega^{(2m-2)}$ représente *la dérivée extérieure* d'ordre $2m-2$; ces dérivées extérieures se définissent à l'aide des formules

$$\omega^{(2m-2)} = \frac{1}{m!}[(\omega')^{m-1}\omega]; \qquad \omega^{(2m-3)} = \frac{1}{m!}(\omega')^{m-1},$$

où $\omega'$ désigne le covariant bilinéaire de $\omega$. Rappelons encore que $\omega$ est de classe $p$ lorsque tous les coefficients ds $\omega^{(p)}$ sont nuls et qu'il n'en est pas de même pour $\omega^{(p-1)}$.

Pour abréger nous indiquerons par la notation $\varpi \equiv 0$ que la forme différentielle $\varpi$ a tous ses coefficients nuls et par $\varpi \not\equiv 0$ l'hypothèse contraire; les conditions pour que $\omega$ soit de classe $p$ pourront alors s'écrire $\omega^{(p)} \equiv 0$, $\omega^{(p-1)} \not\equiv 0$.

Pour énoncer avec plus de facilité les résultats qui nous intéressent nous définirons de la manière suivante la classe d'une expression de Pfaff $\omega$ sur une variété V.

Soit dans l'espace $x_1, \ldots, x_{2n}$ une variété V à $2n-p$ dimen-

(¹) Pages 261-265.

sions définie par $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$, nous dirons que sur cette variété V, $\omega$ est de classe $2n - p - q$ lorsque en tenant compte des relations $f_i = 0$, $df_i = 0$, on aura non seulement $\omega^{(2n-p)} \equiv 0$ mais encore

$$\omega^{(2n-p-1)} \equiv 0, \qquad \omega^{(2n-p-2)} \equiv 0, \qquad \ldots,$$

jusqu'à

$$\omega^{(2n-p-q)} \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \omega^{2n-p-q-1} \not\equiv 0.$$

Nous pouvons alors extraire des deux théorèmes fondamentaux que nous avons rappelés ci-dessus les conclusions suivantes :

1° Lorsque sur une variété V l'expression $\omega$ sera de classe impaire $2h - 1$ elle se réduira à

$$\Omega = de + \sum_{1}^{h} y_i dz_i.$$

2° Lorsque sur V l'expression $\omega$ sera de classe paire $2h$, la forme canonique correspondante $\Omega$ sera

$$de + \sum_{1}^{h} y_i dz_i \qquad \text{si} \qquad \omega^{(2h-2)} \equiv 0$$

et

$$\sum_{1}^{h} y_i dz_i \qquad \text{si} \qquad \omega^{(2h-2)} \not\equiv 0.$$

On entend toujours que le changement de variables qui transforme $\omega$ en $\Omega$ est holomorphe en tout point de la variété et que dans $\Omega$ ne figurent que des variables indépendantes.

Appliquons maintenant les résultats qui viennent d'être mis en évidence au problème de la réduction à une forme canonique d'un système (L) ou ce qui revient au même d'un système (P). Au lieu de supposer comme on le fait d'ordinaire que $\Delta = |a_{ij}|$ est différent de zéro pour tout point de l'espace des phases nous donnons plus de généralité à la question en complètant les résultats classiques par la recherche des trajectoires tout entière situées sur des variétés V sur lesquelles en tout point $\Delta = 0$. Le système (L) ne sera plus résoluble par rapport aux $q''$. M. Levi-Civita dit alors qu'il cesse d'être normal (1).

(1) *Loc. cit.* Chap. V, n° 41; Chap. X, n° 1, Es 10-16; Chap. XI, n° 20.

Des conclusions que nous avons tirées de la théorie de M. Cartan et de la formule (¹)

$$(\omega')^m = \sqrt{|a_{ij}|}\,dx_1\ldots dx_{2n},$$

il résulte que les trajectoires dont nous nous sommes proposés la recherche seront données par un système qui se décomposera en deux parties :

1° Un certain nombre $2r$ de relations finies

$$\frac{\partial Q}{\partial y_h} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r);$$

2° Un système de $2n - 2r$ équations différentielles

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial Q(y_i \mid z_i)}{\partial z_k}, \qquad \frac{dz_k}{dt} = -\frac{\partial Q(y_i \mid z_i)}{\partial y_k}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = r+1, \ldots, n).$$

Sans entrer dans cette première étude dans le détail des circonstances qui peuvent alors se présenter, on peut dire qu'en général les trajectoires cherchées seront situées sur une variété $V_1$ contenue dans V et se détermineront sur $V_1$ par un système canonique. En particulier si F est homogène et du premier degré par rapport aux $q'$ on retrouve le résultat connu (²) : le système (L) est indéterminé ; d'une manière plus précise dans le système réduit auquel on arrive dans ce cas, les relations finies seront satisfaites d'elles-mêmes, il n'y aura donc plus que les $2n - 2r$ équations différentielles qui seront du type canonique si l'on considère dans leurs seconds membres $2r$ des variables comme des indéterminées.

II. La considération de certains points d'équilibre conduit à une autre application des résultats rappelés au paragraphe précédent.

Soit O un point d'équilibre que l'on prend comme origine ; adoptons pour le système (L) les notations qui le mettent sous la

(¹) Elle s'établit en exprimant de deux manières le dernier multiplicateur du système (P) cf : *On Birkhoff's Pfaffian Systems* (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 32, n° 4, p. 817-831), ou PAINLEVÉ, *Sur les transformations des équations de la dynamique* (*Journal de Liouville*, 4ᵉ série, tome X, 1894) (Lemme, p. 38-39).

(²) *Loc. cit.*, C.X, Es 10-16 ; C.XI, n° 20.

forme (P), on a ainsi

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \qquad (j = 1, \ldots, 2n).$$

Le système ($V_0$) des équations aux variations au voisinage d'un tel point sera le système caractéristique de la forme $\overline{\omega} + \overline{\overline{Q}}dt$; $\overline{\omega}$ s'obtient en prenant dans les coefficients de $\omega$ seulement les termes du premier degré et $\overline{\overline{Q}}$ en limitant Q à ses termes du second degré. Si $(\overline{\omega}')^m \equiv 0$ le système ($V_0$) n'est pas normal; la forme réduite à laquelle il se réduira — par une substitution linéaire — dépendra alors de la classe de $\overline{\omega}$.

Lorsque l'expression $\overline{\omega}$ sera de classe $2r$ ou $2r-1$ elle se réduira — à une différentielle totale exacte près — à $\sum^r y_i dz_i$; le système ($V_0$) pourra donc être décomposé en deux parties :

1° $2n - 2r$ relations linéaires

$$\frac{\partial \overline{\overline{Q}}(y_i \mid z_i)}{\partial y_h} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{Q}}(y_i \mid z_i)}{\partial z_h} = 0 \qquad (h = r+1, \ldots, n);$$

2° Un système de $2r$ équations différentielles

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{Q}}(y_i \mid z_i)}{\partial z_k}, \qquad \frac{dz_k}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{Q}}(y_i \mid z_i)}{\partial y_k}$$
$$(k = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, n).$$

L'étude de ce système se poursuivra en envisageant d'abord la résolution des $2n - 2r$ relations linéaires par rapport à certaines des variables $y_i$, $z_i$.

On aboutira à un système canonique, par conséquent normal, pouvant contenir dans ses seconds membres des variables $y$, $z$ qui devront être regardées comme indéterminées. C'est en appliquant au système réduit ainsi obtenu les méthodes classiques que se traitera l'étude de la stabilité au voisinage d'un point O, d'équilibre pour le système (L), dans les cas où le système aux variations ($V_0$) qui correspond à ce point O n'est pas normal.