BULLETIN DE LA S. M. F.

MIRON NICOLESCO

Sur les fonctions harmoniques d'ordre *p*

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 75-87
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__75_0>

SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES D'ORDRE p;

PAR M. MIRON NICOLESCO.

Le premier pas important dans l'étude des fonctions harmoniques a été fait par Gauss avec son célèbre théorème de la moyenne. On s'est aperçu bien vite [1] que ce théorème admettait une réciproque, ce qui permettait de définir dorénavant les fonctions harmoniques non plus par une relation *différentielle*, mais par une relation *intégrale*, beaucoup plus maniable dans maintes questions.

Supposons, pour simplifier l'écriture, que l'on soit dans un plan (x, y) et posons, comme d'habitude,

$$\Delta^1 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta^p = \Delta(\Delta^{p-1}) \qquad (p = 2, 3, \ldots).$$

On sait qu'on appelle *fonction harmonique d'ordre p*, toute fonction $u(x, y)$ qui satisfait à l'équation

$$\Delta^p u(x, y) = 0.$$

Dans cette terminologie, les fonctions harmoniques ordinaires sont des fonctions harmoniques *d'ordre un*.

Je me propose de donner dans ce travail un théorème pour les fonctions harmoniques d'ordre p, analogue au théorème de Gauss (auquel, du reste, il se réduira pour $p = 1$); je démontrerai aussi la réciproque de ce théorème, de sorte que les fonctions harmoniques d'ordre p pourront désormais être définies, elles aussi, par une relation *intégrale*. Ensuite j'appliquerai ces théorèmes aux suites de fonctions harmoniques d'ordre p, en généralisant ainsi

(1) Cependant ce n'est qu'en 1909 que cette réciproque a été énoncée d'une manière satisfaisante, avec le minimum d'hypothèses. Voir ci-après, les Notes citées.

d'importants résultats de M. Paul Montel concernant les suites de fonctions harmoniques d'ordre *un*.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (¹).

I. — Extension des théorèmes de Gauss et E.-E. Levi.

1. Rappel de quelques résultats. — Lemme fondamental. — Soient D un domaine connexe du plan, D_R le domaine tel que tout cercle de rayon R et ayant le centre dans D_R est entièrement compris dans D, et $u(x,y)$ une fonction de module borné dans D, sommable superficiellement dans ce domaine et linéairement sur toute circonférence comprise dans D. Posons

$$v(x,y,R) = \int\int_{C_R(x,y)} u(x',y')\,dx'\,dy',$$

l'intégrale double au second membre étant étendue au cercle $C_R(x,y)$, de rayon R et de centre (x,y). Il résulte d'un raisonnement fait par MM. Levi (²) et L. Tonelli (³), que la fonction $v(x,y,R)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables x et y; et si la fonction $u(x,y)$ est elle-même continue, la fonction $v(x,y,R)$ admet des dérivées partielles par rapport à x et y, données par les relations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = R\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x+R\cos\theta,\, y+R\sin\theta)\cos\theta\,d\theta, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = R\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x+R\cos\theta,\, y+R\sin\theta)\sin\theta\,d\theta. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la fonction $u(x,y)$ admette des dérivées partielles par rapport à x et y. Les formules précédentes

(¹) Séance du 29 septembre 1930.

(²) E.-E. Levi, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche* (*Rendiconti dei Lincei*, vol. XVIII, 1909, p. 10-15).

(³) L. Tonelli, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche* (*Rendiconti dei Lincei*, vol. XVIII, 1909, p. 577-582).

peuvent alors s'écrire

$$(1')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \displaystyle\int\!\!\int_{C_R(x,\,y)} \dfrac{\partial u(x',\,y')}{\partial x'}\,dx'\,dy', \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \displaystyle\int\!\!\int_{C_R(x,\,y)} \dfrac{\partial u(x',\,y')}{\partial y'}\,dx'\,dy'. \end{cases}$$

et, si $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ sont sommables et bornées dans D, les fonctions $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ sont continues, et ainsi de suite.

En définitive, si

$$\frac{\partial^m u(x,\,y)}{\partial x^n\,\partial y^{m-n}}$$

est sommable et de module borné,

$$\frac{\partial^m v(x,\,y,\,R)}{\partial x^n\,\partial y^{m-n}}$$

est continue. Si la première expression est continue par rapport à l'ensemble des variables x et y, la seconde admettra des dérivées partielles par rapport à x et y.

Supposons maintenant que la fonction $u(x,y)$, de module borné dans D, satisfasse à une équation fonctionnelle de la forme

$$(2)\quad \begin{aligned} u(x,\,y) = {} & A_0 \int\!\!\int_{C_R(x,\,y)} u(x',\,y')\,dx'\,dy' \\ & + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^R f_1(\rho_1)\,d\rho_1 \int_0^{\rho_1} f_2(\rho_2)\,d\rho_2 \ldots \\ & \int\!\!\int_{C_{\rho_i}(x,\,y)} u(x',\,y')\,dx'\,dy', \end{aligned}$$

A_0, A_1, ..., A_n étant des fonctions de R. En appliquant à cette relation les résultats précédents, nous trouvons que : si $u(x,y)$ est sommable superficiellement dans D, et linéairement sur toute circonférence intérieure au domaine D, alors $u(x,y)$ est continue. Si $u(x,y)$ est continue, elle admettra des dérivées partielles du premier ordre, et ainsi de suite. En résumé :

Lemme fondamental. — *Toute fonction $u(x,y)$, bornée dans* D, *et satisfaisant à une équation fonctionnelle de la forme* (2), *admet des dérivées partielles de tous les ordres.*

2. Théorèmes de MM. E.-E. Levi, P. Pizzetti et Fr. Sbrana. — Maintenons les hypothèses de sommabilité du numéro précédent et posons

$$(3)\quad \begin{cases} \mu_0(x, y, \rho) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x + \rho\cos\theta,\ y + \rho\sin\theta)\, d\theta, \\ \mu_1(x, y, \rho) = \dfrac{1}{\pi\rho^2}\displaystyle\iint_{C_\rho(x,\, y)} u(x', y')\, dx'\, dy'. \end{cases}$$

Les fonctions $\mu_0(x, y, \rho)$ et $\mu_1(x, y, \rho)$ sont ce qu'on appelle, respectivement, *moyenne périphérique* et *moyenne superficielle* de $u(x, y)$ dans le cercle $C_\rho(x, y)$.

M. E.-E. Levi a démontré [1] que si l'on a, quels que soient ρ et le point (x, y) dans D_ρ,

$$(4)\qquad \mu_0(x, y, \rho) = u(x, y),$$

la fonction $u(x, y)$ est harmonique dans D [2]. Si, d'ailleurs, la relation (3) est satisfaite quels que soient x, y, ρ, cette relation entraîne la suivante [3] :

$$(4')\qquad \mu_1(x, y, \rho) = u(x, y).$$

M. P. Pizzetti a montré [4] que si $u(x, y)$ possède des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2n$, on a

$$(5)\qquad \mu_0(x, y, \rho) = u(x, y) + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \Delta u + \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 \Delta^2 u + \ldots + \frac{1}{(n\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \Delta^n u.$$

---

(1) Note citée.

(2) M. E.-E. Levi a démontré ce théorème en supposant l'intégrabilité au sens de Riemann. C'est M. L. Tonelli qui a montré (Note citée) que la propriété subsiste si l'on suppose l'intégrabilité au sens de M. Lebesgue.

(3) S. Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation biharmonique* (*Annales de l'Académie de Cracovie*, 1908, p. 7).

(4) P. Pizzetti, *Sul significato geometrico del secondo parametro differenziale di una funzione sopra una superficie qualunque* (*Rendiconti dei Lincei*, 1909, p. 309-311).

les laplaciens itérés au second membre étant calculés au point (x, y), sauf le dernier qui est calculé en un point (x_1, y_1) convenablement choisi à l'intérieur de $C_\rho(x, y)$.

Enfin, M. Fr. Sbrana a montré [1] que si les dérivées d'ordre $2n$ sont supposées finies et sommables et si la relation (5), où *tous* les laplaciens du second membre (donc le dernier aussi) sont calculés au point $x_1 = x, y_1 = y$, subsiste quels que soient ρ et le point (x, y) dans D_ρ, la fonction $u(x, y)$ est harmonique d'ordre $(n+1)$ dans D, c'est-à-dire que l'on a $\Delta^{n+1} u(x, y) = 0$.

Remarquons que, de la formule (5), on peut en déduire une autre, en multipliant les deux membres par $\rho\, d\rho$ et en intégrant entre zéro et ρ. On obtient ainsi

$$(6)\quad \mu_1(x, y, \rho) = u(x, y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \Delta u + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 \Delta^2 u + \ldots + \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \Delta^n u.$$

3. **Fonctions harmoniques d'ordre** p. — Remarquons que l'on passe de la moyenne périphérique μ_0 à la moyenne superficielle μ_1 d'une fonction quelconque, par le procédé suivant : 1° multiplication par $\rho\, d\rho$; 2° intégration entre les limites zéro et ρ ; 3° division par $\frac{\rho^2}{2}$. Rien ne nous empêche alors de répéter ce procédé autant de fois que l'on veut, en obtenant ainsi une suite infinie de nouvelles *moyennes*.

Nous poserons donc

$$\mu_2(x, y, \rho) = \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho \mu_1(x, y, \rho)\,\rho\, d\rho$$

et d'une manière générale

$$(7)\quad \mu_p(x, y, \rho) = \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho \mu_{p-1}(x, y, \rho)\,\rho\, d\rho \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

La moyenne μ_p sera dite *moyenne d'ordre p* de $u(x, y)$. On a,

---

[1] Fr. Sbrana, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni poliarmoniche e delle soluzioni dell' equazione delle membrane vibrante* (*Rendiconti dei Lincei*, 1925, p. 369-371).

pour les moyennes de divers ordres, les développements suivants :

$$
(8)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mu_0(x,y,\rho) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i}\Delta^i u,\\
\mu_1(x,y,\rho) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\,\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i}\Delta^i u,\\
\mu_2(x,y,\rho) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^2}\,\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i}\Delta^i u,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mu_{p-1}(x,y,\rho) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^{p-1}}\,\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i}\Delta^i u.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que l'on a

$$
\lim_{p\to\infty}\mu_p(x,y,\rho) = u(x,y),
$$

donc toute fonction $u(x,y)$ est sa propre moyenne d'ordre infini.

On constate encore, d'après les formules (8), que les fonctions harmoniques sont caractérisées par la propriété *d'être égales à toutes leurs moyennes.*

4. Théorème I. — *Si la fonction $u(x,y)$ est harmonique d'ordre p dans D, on a, dans D_ρ, la relation*

$$
(9)\quad
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1\\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{p}\\
1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{p^2}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1 & \frac{1}{2^{p-1}} & \frac{1}{3^{p-1}} & \dots & \frac{1}{p^{p-1}}
\end{vmatrix}
u(x,y) =
\begin{vmatrix}
\mu_0 & 1 & 1 & \dots & 1\\
\mu_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{p}\\
\mu_1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{p^2}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\mu_{p-1} & \frac{1}{2^{p-1}} & \frac{1}{3^{p-1}} & \dots & \frac{1}{p^{p-1}}
\end{vmatrix},
$$

quels que soient (x,y) et ρ.

C'est l'extension, aux fonctions harmoniques d'ordre p, du théorème de Gauss. La justification en est immédiate. Puisque la fonction $u(x,y)$ est harmonique d'ordre p, les divers développements (8) s'arrêtent aux $p^{\text{ièmes}}$ termes. Si l'on élimine entre les p premières relations les quantités Δu, $\Delta^2 u$, $\ldots$, Δ^{p-1}, on tombe sur la relation (9).

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer que l'on obtient une infinité de formules telles que (9), en éliminant les $(p-1)$ quantités $\Delta u, \Delta^2 u, \ldots, \Delta^{p-1} u$ entre p quelconques des relations (8).

Théorème II. — *Si la fonction $u(x,y)$, sommable dans D, satisfait dans D_ρ à la relation (9), quels que soient le point (x,y) et ρ, la fonction $u(x,y)$ est harmonique d'ordre p dans D.*

C'est la généralisation, pour les fonctions harmoniques d'ordre p, du théorème de M. E.-E. Levi. Pour la démonstration, nous ferons d'abord voir que la fonction $u(x,y)$ admet des dérivées partielles de tous les ordres. Posons,

$$a_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{p} \\ 1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \ldots & \frac{1}{p^2} \\ . & .. & .. & \ldots & .. \\ 1 & \frac{1}{2^{p-1}} & \frac{1}{3^{p-1}} & \ldots & \frac{1}{p^{p-1}} \end{vmatrix}$$

et désignons par A_p^0, A_p^1 A_p^2, $\ldots$, A_p^{p-1} les quotients des mineurs des éléments de la première colonne par a_p. La relation (9) s'écrira

$$u(x,y) = A_p^0 \mu_0 + A_p^1 \mu_1 + \ldots + A_p^{p-1} \mu_{p-1}.$$

Multiplions les deux membres par $\rho\, d\rho$ et intégrons entre zéro et R. On obtiendra, après division par $\frac{R^2}{2}$,

$$u(x,y) = A_p^0 \mu_1 + A_p^1 \mu_2 + \ldots + A_p^{p-1} \mu_p. \tag{10}$$

Prenons l'une quelconque, μ_r, des moyennes. On aura

$$\mu_r = \frac{2}{R^2}\int_0^R \mu_{r-1}\rho_1\, d\rho_1 = \frac{2^2}{R^2}\int_0^R \frac{d\rho_1}{\rho_1}\int_0^{\rho_1} \mu_{r-2}\rho_2\, d\rho_2 = \ldots$$
$$= \frac{2^{r-1}}{\pi R^2}\int_0^R \frac{d\rho_1}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\frac{d\rho_2}{\rho_2}\ldots\int\int_{C_{\rho_{r-1}}(x,y)} u\, dx'\, dy'.$$

Par conséquent

$$u(x, y) = \frac{\lambda_p^0}{\pi R^2} \int\int_{C_R(x, y)} u(x', y')\, dx'\, dy' \tag{10}$$
$$+ \sum_{r=2}^{p} \frac{2^{r-1} \lambda_p^{r-1}}{\pi R^2} \int_0^R \frac{d\rho_1}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho_2}{\rho_2} \cdots$$
$$\int\int_{C_{\rho_{r-1}}(x, y)} u(x', y')\, dx'\, dy';$$

$u(x,y)$ satisfait donc à une équation fonctionnelle de la forme (2) et admettra, en vertu du lemme fondamental, des dérivées partielles de tous les ordres. On pourra, par conséquent, écrire pour cette fonction des développements de la forme (8). Cela étant, supposons, pour abréger l'écriture, $p = 3$. La fonction $u(x, y)$ satisfera à la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} \end{vmatrix} u(x, y) = \begin{vmatrix} \mu_0 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \mu_2 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} \end{vmatrix}.$$

Cela signifie que le système suivant en X, Y,

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_0 - u &= X + Y, \\ u_1 - u &= \frac{1}{2} X + \frac{1}{3} Y \\ \mu^2 - u &= \frac{1}{2^2} X + \frac{1}{3^2} Y \end{aligned} \right. \tag{11}$$

est compatible, quels que soient x, y, ρ. En comparant ceci avec les développements (8), on obtient le système

$$\left\{ \begin{aligned} X' + Y' &= \varphi_0, \\ \frac{1}{2} X' + \frac{1}{3} Y' &= \varphi_1, \\ \frac{1}{2^2} X' + \frac{1}{3^2} Y' &= \varphi_2, \end{aligned} \right. \tag{11'}$$

avec

$$X' = X - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \Delta u, \qquad Y' = Y - \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 \Delta^2 u,$$

$$\varphi_0 = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{(i\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i} \Delta^i u,$$

$$\varphi_1 = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i+1}\,\frac{1}{(i\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i} \Delta^i u,$$

$$\varphi_2 = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{(i+1)^2}\,\frac{1}{(i\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i} \Delta^i u.$$

Puisque le système (11′) qui est équivalent au système (11), doit être compatible quels que soient x, y, ρ, le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varphi_0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \varphi_1 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \varphi_2 \end{vmatrix}$$

doit être nul identiquement. Or ce déterminant est une somme de termes tels que

$$\frac{1}{(p\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2p} \Delta^p u \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{(p+1)^2} \end{vmatrix},$$

et comme les déterminants-coefficients sont tous des déterminants de Vandermonde, donc différents de zéro, il faut que l'on ait

$$\Delta^p u = 0 \qquad (p = 3, 4, \ldots, n).$$

Par conséquent

$$\varphi_0 \equiv 0, \qquad \varphi_1 \equiv 0, \qquad \varphi_2 \equiv 0$$

et le système (11′) donne, dans ces conditions, $X' = 0$, $Y' = 0$, c'est-à-dire

$$X = \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \Delta u, \qquad Y = \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 \Delta^2 u.$$

La première relation (11) s'écrira alors

$$\mu_0 = u + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \Delta u + \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^4 \Delta^2 u,$$

donc la fonction $u(x, y)$ est harmonique d'ordre 3, en vertu du théorème de M. Fr. Sbrana, rappelé au début.

Nous avons pris, pour la simplicité, $p = 3$. Mais notre démonstration est évidemment indépendante de cette particularisation de p et cette remarque justifie complètement le théorème énoncé.

II. — Applications aux suites de fonctions harmoniques d'ordre p.

5. Considérons une famille de fonctions de deux variables (x, y), définies dans le domaine D. On dit que ces fonctions sont *également continues* dans D, lorsque à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que, dans tout cercle compris dans D et de rayon inférieur à δ, l'oscillation de chaque fonction de la famille ne dépasse pas ε (1).

Il existe plusieurs critères pour reconnaître si une famille de fonctions possède l'égale continuité. En voici un que nous allons utiliser tout de suite : Supposons que les fonctions de la famille possèdent des dérivées partielles du premier ordre. Alors, *si ces dérivées sont bornées dans leur ensemble, les fonctions sont également continues* (2).

6. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique d'ordre p dans D. On aura, en utilisant les notations du n° 4,

$$u(x, y) = A_p^0 \mu_1 + A_p^1 \mu_2 + \ldots + A_p^{p-1} \mu_p,$$

pour tout point de D_ρ, quel que soit ρ. Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. L'expression de l'une quelconque, μ_r, des moyennes est

$$\mu_r(x, y, \rho) = \frac{2^{r-1}}{\rho^2} \int_0^\rho \frac{d\rho_1}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho_2}{\rho_2} \cdots \int_{C_{\rho_{r-1}}(x, y)} u(x', y')\, dx'\, dy',$$

(1) Paul Montel, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Thèse*, Paris, 1907, n° 18, p. 27).

(2) Paul Montel, *Loc. cit.*, p. 29.

d'où, en vertu des formules (1),

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mu_r}{\partial x} = \dfrac{2^{r-1}}{\pi \rho^2} \displaystyle\int_0^{\rho} \frac{d\rho_1}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho_2}{\rho_2} \cdots \\ \qquad \displaystyle\int_0^{\rho_{r-2}} d\rho_{r-1} \int_0^{2\pi} u(x+\rho_{r-1}\cos\theta, y+\rho_{r-1}\sin\theta)\cos\theta\, d\theta, \\ \dfrac{\partial \mu_r}{\partial y} = \dfrac{2^{r-1}}{\pi \rho^2} \displaystyle\int_0^{\rho} \frac{d\rho_1}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho_2}{\rho_2} \cdots \\ \qquad \displaystyle\int_0^{\rho_{r-2}} d\rho_{r-1} \int_0^{2\pi} u(x+\rho_{r-1}\cos\theta, y+\rho_{r-1}\sin\theta)\sin\theta\, d\theta. \end{cases}$$

Cela étant, supposons que l'on ait, partout dans D,

$$|u(x, y)| < M.$$

Les formules (12) donneront tout de suite

$$\left|\frac{\partial \mu_r}{\partial x}\right| < \frac{2^{r-1} M}{\pi \rho}, \qquad \left|\frac{\partial \mu_r}{\partial y}\right| < \frac{2^{r-1} M}{\pi \rho},$$

par conséquent, si l'on pose

$$\frac{M}{\pi \rho}(|A_p^0| + 2|A_p^1| + \ldots + 2^{p-1}|A_p^{p-1}|) = M_1$$

on aura

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < M_1, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < M_1.$$

Donc : *Si la fonction $u(x, x)$, harmonique d'ordre p dans* D, *est de module borné dans* D, *ses dérivées partielles du premier ordre sont bornées dans l'intérieur de* D, c'est-à-dire dans tout domaine fermé D′, complètement intérieur à D.

En effet, les formules précédentes sont valables dans D_ρ, avec $\rho \neq 0$. Or, on peut prendre ρ assez petit, tel que D_ρ comprenne dans son intérieur D′.

7. Les fonctions $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont, elles aussi, harmoniques d'ordre p et, par le théorème précédent, nous savons qu'elles sont aussi bornées. On peut donc leur appliquer ce même théorème et l'on trouve en définitive que *toutes les dérivées partielles d'un même ordre k seront bornées en module par le même nombre* M_k. Il s'ensuit, en vertu du critère du numéro précédent, que les familles

formées par les dérivées partielles d'ordre $k-1$ de $u(x, y)$ seront toutes des familles de fonctions également continues. Comme ces dérivées sont aussi bornées en module dans leur ensemble, les familles formées par les dérivées d'ordre $k-2$ seront encore des familles de fonctions également continues, et ainsi de suite. Comme k est arbitraire, on peut énoncer :

THÉORÈME III. — *Si des fonctions harmoniques d'ordre p sont bornées dans* D, *ces fonctions sont également continues dans l'intérieur de* D, *et les dérivées partielles d'un même ordre arbitraire sont aussi également continues.*

On peut alors appliquer à ces fonctions le théorème général du n° 13, du Mémoire cité de M. Paul Montel et obtenir ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit*

$$u_1(x, y), \qquad u_2(x, y), \qquad \ldots, \qquad u_n(x, p), \ldots$$

une suite de fonctions harmoniques d'ordre p, bornées dans D *dans leur ensemble. Si cette suite est convergente dans* D, *elle convergera uniformément dans l'intérieur de* D *vers une fonction harmonique d'ordre p. De plus, toute dérivée partielle de* $u_n(x, y)$ *convergera uniformément vers la dérivée du même ordre de* $u(x, y)$.

8. M. Paul Montel a, pour la première fois, énoncé les théorèmes III et IV pour les fonctions harmoniques d'ordre *un* dans sa Thèse ([1]). La remarque qu'il fait au n° 59 de ce Mémoire reste valable pour nos théorèmes III et IV : Il suffit que la convergence ait lieu pour une infinité de points formant un ensemble partout dense, pour que la conclusion reste la même.

9. Le théorème IV trouve une application immédiate au domaine fonctionnel : Soit $u(x, y, \lambda)$ une fonction harmonique d'ordre p dans D, dépendant d'un paramètre arbitraire λ, et bornée dans D, quel que soit $\lambda \geqq a$.

([1]) *Loc. cit.*, Chap. V, n°s 51, 57 et 60.

Si l'on a,

$$\left| \int_a^b u(x, y, \lambda)\, d\lambda \right| < M$$

quel que soit $b > a$, l'intégrale suivante :

$$U(x, y) = \int_a^\infty u(x, y, \lambda)\, d\lambda,$$

sera uniformément convergente dans l'intérieur de D *et il en sera de même de toutes les intégrales de la forme*

$$\int_a^\infty \frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x, y, \lambda)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\, d\lambda,$$

quels que soient α et β.

Il suffit de prendre une suite de valeurs

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots,$$

tendant vers l'infini avec n, et de poser ensuite

$$U_n(x, y) = \int_a^{a_n} u(x, y, \lambda)\, d\lambda.$$

Les fonctions de la suite

$$U_1(x, y), \quad U_2(x, y), \quad \ldots, \quad U_n(x, y), \ldots$$

sont harmoniques d'ordre p dans D et bornées dans leur ensemble. On peut alors leur appliquer le théorème IV et obtenir ainsi le résultat énoncé.

Il s'ensuit immédiatement que l'on pourra dériver sous le signe $\int$, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \int_a^\infty \frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x, y, \lambda)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\, d\lambda$$

quels que soient α et β.