CAMILLE JORDAN

Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 175-177
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__175_1>

Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires; par M. Camille Jordan.

(Séance du 27 juin 1877.)

Soient n un nombre prèmier impair; θ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité; $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des variables distinctes. Les substitutions

$$\theta = |\; x_p \quad \theta x_p \;|, \qquad \mathbf{A} = |\; x_p \quad \theta^p x_p \;|, \qquad \mathbf{B} = |\; x_p \quad x_{p+1} \;|$$

ont pour déterminant 1, et, combinées ensemble, fourniront un groupe G d'ordre p^3 dont les substitutions ont pour forme générale

$$\theta^\rho \mathbf{A}^\alpha \mathbf{B}^\beta = |\; x_p \quad \theta^{\alpha p+\rho} x_{p+\beta} \;|.$$

Cherchons à construire le groupe H formé par les substitutions de déterminant 1 qui sont permutables à G.

Ce groupe contient, outre les substitutions θ, A, B, la suivante :

$$C = \left| x_p \quad \theta^{-\frac{p(p+1)}{2}} x_p \right|,$$

laquelle transforme θ, A, B en θ, A, AB ; et la substitution

$$D = | x_p \quad a\Sigma\theta^{pm} x_m |,$$

qui les transforme en θ, B, A^{-1} (le coefficient a étant choisi de telle sorte que D ait pour déterminant 1).

Il est aisé de voir que H est dérivé des seules substitutions θ, A, B, C, D, et a pour ordre $(n^2 - 1)\, n^4$.

En effet, soit s une substitution de H. Elle devra transformer A en une substitution de la forme $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$, où ρ, α, β peuvent varier de zéro à $p - 1$. D'ailleurs α et β ne peuvent s'annuler à la fois ; car une substitution de la forme θ^ρ, étant échangeable à toute substitution linéaire, ne pourrait être la transformée de A.

D'autre part, on vérifie immédiatement qu'en combinant les substitutions A, B, C, D on peut obtenir une substitution S' qui transforme A en $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$, quels que soient ρ, α et β, pourvu qu'on n'ait pas à la fois $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Le nombre des transformées distinctes de A par les substitutions de H sera donc $(n^2 - 1)\, n$; et l'on aura S = TS', T étant une nouvelle substitution de H, échangeable à A.

Cette substitution T transformera θ, A, B en θ, A, $\theta^\sigma A^\gamma B^\delta$. On a d'ailleurs l'équation

$$AB = \theta BA,$$

laquelle deviendra, après la transformation,

$$A\,\theta^\sigma A^\gamma B^\delta = \theta . \theta^\sigma A^\gamma B^\delta . A = \theta^{1-\delta} A\, \theta^\sigma A^\gamma B^\delta ;$$

donc $\delta = 1$.

Or on déduit immédiatement de la combinaison de B et de C une substitution T' qui transforme θ, A, B en θ, A, $\theta^\sigma A^\gamma B$, quels que soient σ et γ ; donc le nombre des transformées distinctes de B par les substitutions de l'espèce T sera n^2, et l'on aura T = UT', U étant une nouvelle substitution de H, échangeable à θ, A, B, laquelle ne pourra évidemment être qu'une des n puissances de θ.

Donc l'ordre de H sera bien égal à $(n^2 - 1)\, n . n^2 n$, et ses substitutions, étant de la forme $UT'S'$, seront dérivées de θ, A, B, C, D.

Si n était égal à 2, au lieu d'être premier impair, les substitutions A, B, C auraient pour déterminant -1; mais, en multipliant leurs coefficients par i, on obtiendrait des substitutions de déterminant 1, auxquelles on pourrait appliquer les raisonnements précédents.

On peut étendre aisément ces résultats au cas où le nombre des variables ne serait plus n, mais une puissance de n. Supposons-le égal à p^2, par exemple, et désignons les variables par x_{pq}, où p et q varient de zéro à $p-1$.

Nous considérerons le groupe G, d'ordre p^5, dérivé des substitutions

$$\theta = |\ x_{pq} \quad \theta x_{pq}\ |,$$

$$A = |\ x_{pq} \quad \theta^p x_{pq}\ |, \qquad A_1 = |\ x_{pq} \quad \theta^q x_{pq}\ |,$$

$$B = |\ x_{pq} \quad x_{p+1,q}\ |, \qquad B_1 = |\ x_{pq} \quad x_{p,q+1}\ |.$$

Le groupe H, formé des substitutions de déterminant 1 permutables à G, sera dérivé des substitutions de G, jointes aux suivantes :

$$C = \left|\ x_{pq} \quad \theta^{-\frac{p(p+1)}{2}} x_{pq}\ \right|, \qquad C_1 = \left|\ x_{pq} \quad \theta^{-\frac{q(q+1)}{2}} x_{pq}\ \right|,$$

$$D = |\ x_{pq} \quad a\sum \theta^{pm} x_{mq}\ |, \qquad D_1 = |\ x_{pq} \quad a\sum \theta^{qm} x_{pm}\ |,$$

$$E = |\ x_{pq} \quad x_{qp}\ |, \qquad F = |\ x_{pq} \quad \theta^{pq} x_{pq}\ |,$$

lesquelles transforment respectivement A, B, A_1, B_1 en A, AB, A_1, B_1; A, B, A_1, A_1B_1; B, A^{-1}, A_1, B_1; A, B, B_1, A^{-1}; A_1, B_1, A, B; A, A_1B, A_1, AB_1. Ces substitutions, combinées à celles de G, permettront : 1° de transformer A en l'une quelconque des $(n^4-1)n$ substitutions de la forme $\theta^\rho A^\alpha B^\beta A^\gamma A^\delta$ (où α, β, γ, δ ne sont pas nuls à la fois); 2° puis, sans altérer A, de transformer B en l'une quelconque des n^4 substitutions $\theta^\rho A^\alpha B A^\gamma B$; 3° puis, sans altérer A ni B, de transformer A_1 en une quelconque des $(n^2-1)n$ substitutions de la forme $\theta^\rho A^\gamma B^\delta$; 4° puis, sans altérer A, B, A_1, de transformer B_1 en l'une quelconque des n^2 substitutions $\theta^\rho A_1^\gamma B_1$. Enfin les n puissances de θ laisseront A, B, A_1, B_1 invariables. L'ordre de H sera donc $(n^4-1)n \cdot n^4 \cdot (n^2-1)n \cdot n^2 \cdot n$.