BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGES VALIRON

# Fonctions convexes et fonctions entières

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 60 (1932), p. 278-287
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__278_0>

## FONCTIONS CONVEXES ET FONCTIONS ENTIÈRES ;

PAR M. G. VALIRON.

$f(z)$ étant une fonction entière d'ordre fini $\rho$ et du type moyen, la fonction

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \tag{1}$$

a été introduite et étudiée par MM. Lindelöf et Phragmén ([1]) qui ont donné notamment la propriété fondamentale suivante :

I. *Si $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ sont trois valeurs telles que*

$$\theta' < \theta < \theta'', \qquad \theta'' - \theta' < \frac{\pi}{\rho},$$

*on a*

$$h(\theta) \leqq \mathrm{A} \cos\theta\rho + \mathrm{B} \sin\theta\rho = \mathrm{K}(\theta), \tag{2}$$

A *et* B *étant déterminés pour que*

$$\mathrm{K}(\theta') = h(\theta'), \qquad \mathrm{K}(\theta'') = h(\theta'').$$

Autrement dit, dans les conditions imposées à $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,

$$\begin{vmatrix} h(\theta) & \cos\theta\rho & \sin\theta\rho \\ h(\theta') & \cos\theta'\rho & \sin\theta'\rho \\ h(\theta'') & \cos\theta''\rho & \sin\theta''\rho \end{vmatrix} \leqq 0. \tag{3}$$

M. Pólya a montré ([2]) que toute fonction $h(\theta)$ vérifiant la condition du théorème I a une dérivée à droite et une dérivée à

---

([1]) *Acta mathematica*, t. 31, 1908.

([2]) *Math. Zeits.*, t. 29, 1929, p. 549-560. Les résultats de M. Pólya contiennent ceux que j'avais donnés ultérieurement dans le *Journal de Mathématique*, t. X, 1931, th. XIV.

gauche (¹) telles que

$$h'(\theta - 0) \leqq h'(\theta + 0)$$

et que, si $\rho = 1$ et si $h(\theta)$ a pour période $2\pi$, l'enveloppe de la droite d'équation

$$x \cos\theta + y \sin\theta - h(\theta) = 0$$

est une courbe convexe. Il découle alors des propriétés connues de ces courbes que $h(\theta)$ a une dérivée sauf au plus pour des valeurs $\theta$ appartenant à un ensemble dénombrable et que cette dérivée, ou plus exactement $\frac{1}{2}[h'(\theta - 0) + h'(\theta + 0)]$ est à variation bornée. Enfin, il résulte des théorèmes de M. Pólya que $h(\theta)$ étant une fonction de période $2\pi$ vérifiant les conditions du théoréme I avec $\rho = 1$, il existe une fonction entière d'ordre $\rho = 1$ vérifiant l'égalité (1).

Je me propose de donner ici des démonstrations simples de ces propositions connues et de quelques autres, en les considérant comme des transpositions des propriétés des fonctions convexes.

1. On sait qu'une fonction $F(x)$ est dite convexe dans un intervalle $\alpha < x < \beta$ lorsqu'on a

$$F(x) \leqq A + Bx$$

si $\alpha < x' < x < x'' < \beta$, A et B étant déterminés par la condition

$$A + Bx' = F(x'), \qquad A + Bx'' = F(x'').$$

La condition de convexité peut aussi s'écrire

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} F(x) & 1 & x \\ F(x') & 1 & x' \\ F(x'') & 1 & x'' \end{vmatrix} \leqq 0, \qquad x' < x < x''.$$

Une fonction convexe a une dérivée à droite et à gauche en tout

(¹) Je désignerai par $h'(\theta - 0)$ et $h'(\theta + 0)$ les dérivées à gauche et à droite du point $\theta$.

point et $F'(x-0) \leqq F'(x+0)$; la fonction

$$\frac{1}{2}[F'(x-0)+F'(x+0)]$$

est non-décroissante, il s'ensuit que $F'(x)$ existe sauf au plus sur un ensemble dénombrable.

Rappelons encore ces propriétés banales : la tangente à droite ou à gauche en un point de la courbe convexe $y = F(x)$ laisse la courbe au-dessus d'elle (au sens large); une droite $y = mx + n$ qui la coupe en deux points est au-dessus d'elle entre ces deux points et au-dessous à l'extérieur du segment formé par ces deux points. Une fonction convexe de $-\infty$ à $+\infty$, toujours négative ou nulle est constante.

Enfin, il est connu et facile à établir que, pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit convexe, il faut et il suffit que l'inégalité (4) ait lieu autour de chaque point $x$.

2. Donnons-nous un couple de fonction $\varphi(x)$, $\psi(x)$ définies quel que soit $x$ et admettant des dérivées premières continues et à variation bornée (¹). Nous supposons que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ n'ont que des zéros simples isolés, que les zéros de $\varphi(x)$ séparent ceux de $\psi(x)$, et que

$$\psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x) \tag{5}$$

garde un signe constant. Il sera loisible de supposer (5) *positif*. Le rapport $\psi(x) : \varphi(x)$ sera toujours croissant dans ses intervalles de continuité. Ceci entraîne que si l'on fait une substitution

$$\Phi(x) = A\,\varphi(x) + B\,\psi(x)$$
$$\Psi(x) = A'\varphi(x) + B'\psi(x)$$

à coefficients $A$, $B$, $A'$, $B'$ constants et de déterminant $AB' - BA'$ positif, les fonctions transformées $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ jouissent des mêmes propriétés que $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Nous dirons qu'une fonction $g(x)$ continue (²) dans un intervalle $(\alpha, \beta)$ est *convexe en* $\varphi$, $\psi$ dans cet intervalle si, pour tout $x$

(¹) On pourrait remplacer ces conditions par d'autres plus larges.

(²) On pourrait donner une condition moins restrictive.

appartenant à $(\alpha, \beta)$ et pour tout $x'$ et tout $x''$ suffisamment proches de $x$, avec $\alpha < x' < x < x'' < \beta$, on a

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} g(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ g(x') & \varphi(x') & \psi(x') \\ g(x'') & \varphi(x'') & \psi(x'') \end{vmatrix} \leqq 0.$$

On peut aussi dire que, dans les conditions indiquées pour $x'$, $x$, $x''$,

$$g(x) \leqq \mathrm{A}\,\varphi(x) + \mathrm{B}\,\psi(x),$$

A et B étant tels que

$$\mathrm{A}\,\varphi(x') + \mathrm{B}\,\psi(x') = g(x'), \qquad \mathrm{A}\,\varphi(x'') + \mathrm{B}\,\psi(x'') = g(x'').$$

Dans tout ce qui suit, on supposera, pour simplifier l'exposition, $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$.

Considérons un intervalle dans lequel $\varphi(x)$ est positif et posons-y

$$\mathrm{X} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

ce qui y définit aussi $x$ comme fonction continue et croissante de X. En divisant chaque ligne de (6) par le terme correspondant de la seconde colonne, on voit que, dans cet intervalle, la fonction

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$$

est convexe. On considérerait de même, dans un intervalle où $\varphi(x)$ est négatif, la fonction $-g(x):\varphi(x)$ de la variable $-\psi(x):\varphi(x)$. On opérerait de même dans les intervalles où $\psi(x)$ est de signe constant. Comme ces intervalles empiètent les uns sur les autres, on obtient ce résultat :

II. *Une fonction $g(x)$ convexe en $\varphi$, $\psi$ a une dérivée à gauche et une dérivée à droite en chaque point, on a*

$$g'(x+0) \geqq g'(x-0);$$

*la dérivée existe sauf au plus pour les points d'un ensemble dénombrable; la fonction $g'(x+0)+g'(x-0)$ est à variation bornée.*

3. Si l'on effectue sur $\varphi$ et $\psi$ une transformation linéaire à coeffi-

cients constants et à déterminant positif, la condition (6) subsiste. On peut donc toujours effectuer la transformation d'une fonction convexe en $\varphi$, $\psi$ en une fonction convexe ordinaire (convexe en 1, X) dans un intervalle $a < x < b$ pourvu qu'il existe une fonction $\lambda\varphi + \mu\psi$, $\lambda$ et $\mu$ étant constants, qui ne s'annule pas dans cet intervalle. J'appellerai *intervalle canonique* tout intervalle ayant pour extrémités deux zéros consécutifs d'une fonction $\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)$. Tout point est intérieur à des intervalles canoniques. L'intervalle canonique admettant pour extrémité gauche un point $x_0$ est l'intervalle $(x_0, x_1)$, $x_1$ étant le premier zéro de

$$\varphi(x)\psi(x_0) - \psi(x)\varphi(x_0)$$

à droite de $x_0$.

D'après ce qui a été rappelé sur les fonctions convexes, l'inégalité (6) est valable pour trois points quelconques, $x' < x < x''$ pourvu que $x'$ et $x''$ appartiennent à un même intervalle canonique. Dans un tel intervalle, une différence

$$g(x) - A\varphi(x) - B\psi(x)$$

se transforme en une fonction convexe.

En appliquant les propriétés des fonctions convexes, on obtient de suite, en transposant, les propriétés démontrées par MM. Lindelöf et Phragmén pour les fonctions vérifiant (2), qui correspondent au cas où $\varphi(x) \equiv \cos\rho x$, $\psi(x) \equiv \sin\rho x$ et à un intervalle canonique constant égal à $\frac{\pi}{\rho}$. Notamment :

Une fonction convexe en $\varphi$, $\psi$ qui est nulle en deux points d'un intervalle canonique est négative ou nulle entre ces deux points.

Si une fonction convexe en $\varphi$, $\psi$ est négative ou nulle dans un intervalle contenant à son intérieur un intervalle canonique, elle est nulle dans cet intervalle.

Si une fonction convexe en $\varphi$, $\psi$ est négative dans un intervalle canonique I, elle y est de la forme

$$A\varphi(x) + B\psi(x) \tag{7}$$

A et B étant constants, et elle est supérieure ou égale à (7) dans les deux intervalles canoniques adjacents à I à droite et à gauche.

Si $g(x)$ est convexe en $\varphi$, $\psi$ et si $x_0$ est une valeur de $x$, on appellera *fonction de contact* [sous-entendu de $g(x)$] à droite de $x_0$, la fonction $A\varphi + B\psi$ telle que

$$A\,\varphi(x_0) + B\,\psi(x_0) = g(x_0), \qquad A\,\varphi'(x_0) + B\,\psi'(x_0) = g'(x_0 + 0).$$

On définit de même la fonction de contact à gauche de $x_0$. On voit que :

III. *$g(x)$ étant convexe en $\varphi$, $\psi$, $g(x)$ est supérieure ou égale à sa fonction de contact à droite de $x_0$ dans tout l'intervalle canonique dont $x_0$ est l'extrémité gauche, elle est supérieure ou égale à sa fonction de contact à gauche de $x_0$ dans tout l'intervalle canonique dont $x_0$ est l'extrémité droite.*

**4.** Considérons la sous-classe des fonctions $G(x)$ convexes en $\varphi$, $\psi$ *qui sont toujours positives ou nulles*. En un point $x_0$ prenons la fonction de contact à droite, $A\varphi + B\psi$, elle sera positive dans un certain intervalle canonique $I(A, B, x_0)$ contenant $x_0$ ou l'admettant pour extrémité gauche. Nous appellerons fonction de contact *tronquée* la fonction égale à $A\varphi + B\psi$ dans $I(A, B, x_0)$ et égale à o ailleurs. On définit de même la fonction de contact tronquée à gauche de $x_0$. Ces fonctions de contact tronquées sont des fonctions convexes en $\varphi$, $\psi$, qui sont toujours inférieures ou égales à $G(x)$.

En introduisant ces fonctions on obtient on procédé général de construction des fonctions $G(x)$.

Donnons-nous d'abord *a priori* une fonction $G(x)$. Soit E un ensemble dénombrable partout dense de valeurs $x$. $\xi$ étant un point de E, désignons par $G(x, \xi)$ la fonction de contact droite tronquée de $G(x)$ au point $\xi$. Si $G_1(x)$ est la fonction égale pour chaque $x$ à la borne supérieure des nombres $G(x, \xi)$, on a

$$G_1(x) \equiv G(x). \tag{8}$$

En effet, d'après la propriété des fonctions de contact tronquées, on a $G_1(\xi) = G(\xi)$ si $\xi$ appartient à E. Si $x$ n'appartient pas à E, $G_1(x) \leqq G(x)$, mais aussi $G_1(x) \geqq G(x, \xi)$ quel que soit $\xi$; en prenant $\xi$ tendant vers $x$, $G(x, \xi)$ tend vers $G(x)$, donc $G_1(x) \geqq G(x)$, ce qui achève de démontrer (8). Le fait que $G(x, \xi) \to G(x)$ si

$x$ découle de ce que

$$\begin{aligned}\Delta G(x,\xi) &= g(\xi)[\psi'(\xi)\varphi(x) - \varphi'(\xi)\psi(x)] \\ &\quad + g'(\xi+0)[\varphi(\xi)\psi(x) - \varphi(x)\psi(\xi)], \\ \Delta &= \psi'(\xi)\varphi(\xi) - \varphi'(\xi)\psi(\xi).\end{aligned}$$

On peut remarquer qu'il suffit que E soit dense à l'extérieur des segments sur lesquels $G(x)$ est de la forme $A\varphi + B\psi$ et contienne un point de chacun de ces segments.

Inversement, si l'on considère une suite infinie de fonctions $g(x, n)$ convexes en $\varphi$, $\psi$, bornées dans leur ensemble dans tout intervalle fini, la fonction $g(x)$ égale pour chaque $x$ à la borne supérieure des valeurs $g(x, n)$ est une fonction convexe en $\varphi$, $\psi$. Car $x' < x < x''$ étant trois points d'un intervalle canonique l'inégalité (6) est vraie pour chaque fonction $g(x, n)$. En donnant à $n$ une suite convenable de valeurs $g(x, n)$ tend vers $g(x)$ et $g(x', n)$ et $g(x'', n)$ tendent vers des nombres au plus égaux à $g(x')$ et $g(x'')$ ; $g(x)$ vérifie donc (6).

5. $f(z)$ étant une fonction entière d'ordre fini $\rho$ et de type moyen, désignons par $H(\theta)$ la fonction égale à la fonction (1) de Lindelöf et Phragmén lorsque $h(\theta) > 0$ et égale à 0 lorsque $h(\theta) \leqq 0$. En employant une notation connue :

$$H(\theta) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}. \tag{9}$$

$H(\theta)$ est périodique, de période $2\pi$, et convexe en $\cos\rho\theta$, $\sin\rho\theta$ d'après le théorème I. *Nous allons montrer que ces propriétés caractérisent ces fonctions* $H(\theta)$.

Nous prendrons ici pour fonctions tronquées des fonctions périodiques, *de période* $2\pi$, de la forme

$$A\cos\rho(\theta - \alpha) \qquad \text{pour} \quad |\theta - \alpha| \leqq \pi \quad \text{si} \quad \rho \leqq \frac{1}{2},$$

A étant positif ou nul, tandis que pour $\rho \geqq \frac{1}{2}$, on aura pour valeurs de la fonction

$$\begin{aligned}&A\cos\rho(\theta - \alpha) \quad \text{si} \quad |\theta - \alpha|\rho \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad (A \geqq 0),\\ &0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leqq |\theta - \alpha|\rho \leqq \pi\rho.\end{aligned}$$

La fonction de contact tronquée, gauche ou droite, toujours au plus égale à $H(\theta)$, existe encore en chaque point $\tau$. C'est manifeste si $\rho \geqq \frac{1}{2}$. Pour $\rho < \frac{1}{2}$, cela découle du fait que $H(\theta)$ est supérieur ou égal à sa fonction de contact tronquée droite au point $\tau$, définie au n° **4**, fonction de la forme $A\cos\rho(\theta-\alpha)$ pour $\rho(\theta-\alpha) \leqq \frac{\pi}{2}$, avec $\rho|\tau-\alpha| \leqq \frac{\pi}{2}$. Or on a en réalité $|\tau-\alpha| \leqq \pi$, sinon, pour $\theta = \tau+2\pi$ ou $\tau-2\pi$ on aurait $H(\theta) \geqq A\cos\rho(\theta-\alpha) > H(\tau)$, $H(\theta)$ n'aurait pas la période $2\pi$.

Ceci dit, $H(\theta)$ étant donnée *a priori*, prenons une suite de points $\tau_n$ denses sur le segment $(0, 2\pi)$ sauf sur les segments dans lesquels $H(\theta)$ est de la forme $A\cos\theta\rho + B\sin\theta\rho$, segments sur chacun desquels il suffira de prendre un *seul* point $\tau_n$. Désignons par $H(\theta, \tau_n)$ la fonction de contact tronquée droite au point $\tau_n$; on aura, comme au n° **4**, pour chaque $\theta$,

$$H(\theta) = \text{borne sup. de } H(\theta, \tau_n).$$

On connaît des fonctions entières d'ordre $\rho$ admettant $H(\theta, \tau_n)$ pour fonction de Lindelöf-Phragmén. Si $\alpha_n$ est le point (défini à $2\pi$ près) où $H(\theta, \tau_n)$ atteint son maximum $A_n$, on peut prendre

$$f_n(z) = E\left[A_n^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\alpha_n} z, \rho\right], \tag{10}$$

$E(u, \rho)$ désignant une fonction de Mittag-Leffler d'ordre $\rho$. Ceci suppose $A_n \neq 0$, si $A_n = 0$, on prendra $f_n(z) \equiv 0$.

Pour cette fonction (10), on a uniformément, si $A_n < K$ et si $\varepsilon$ est donné positif

$$|f_n(re^{i\theta})| = \rho\, e^{A_n \cos\rho(\theta-\alpha_n) \times r^\rho} + O(1), \tag{11}$$

pourvu que

$$|\theta-\alpha_n| < \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, \qquad |\theta-\alpha_n| < \pi - \varepsilon;$$

$$|f_n(re^{i\theta})| < \rho\, e^{r^\rho A_n \cos\left(\frac{\pi}{2} - \rho\varepsilon\right)} + O(1) \tag{12}$$

pourvu que

$$|\theta-\alpha_n| \geqq \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, \qquad |\theta-\alpha_n| \leqq \pi;$$

$$|f_n(re^{i\theta})| < K', \tag{13}$$

si

$$|\theta - \alpha_n| > \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \qquad |\theta - \alpha_n| \leq \pi.$$

Considérons la fonction

$$(14) \qquad f(z) = \sum_{1}^{\infty} \beta_n f_n(z),$$

la série $\Sigma|\beta_n|$ étant supposée convergente. Comme les $A_n$ sont bornés, inférieurs à un nombre K. $f(z)$ est une fonction entière d'ordre $\rho$ au plus. Nous allons voir qu'elle est d'ordre $\rho$ et admet $H(\theta)$ pour fonction de Lindelöf-Phragmén définie par (9). Pour $\theta = \tau_m$, avec $A_m \neq 0$, les valeurs de $f_n(re^{i\theta})$ sont données par (11) et (12) et le maximum de $A_n \cos\rho(\theta - \alpha_n)$ est égal à $H(\tau_m)$, il est atteint pour $n = m$. Pour $n \neq m$, on a d'après (11) et (12)

$$\lim_{r=\infty} \frac{f_n(re^{i\theta})}{f_m(re^{i\theta})} = 0,$$

et, si $r > r_m$, uniformément.

$$|f_n(re^{i\theta})| < 2|f_m(re^{i\theta})|.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{r=\infty} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{f_m(re^{i\theta})} \right| = |\beta_m|, \qquad \theta = \tau_m;$$

$H(\theta)$ est bien la valeur du second membre de (9) pour $\theta = \tau_m$. Ceci reste vrai sur tout segment où $H(\theta)$ est de la forme

$$A \cos\rho\theta + B \sin\rho\theta.$$

Dans un intervalle où $H(\theta) = 0$, l'inégalité (13) montre que le second membre de (9) est nul. A cause de la continuité, il s'ensuit que la fonction $H(\theta)$ considérée *a priori* est égale au second membre de (9) relatif à la fonction (14) :

IV. *Il existe une fonction entière $f(z)$ admettant pour fonction* $H(\theta)$ *définie par* (9) *une fonction arbitraire périodique, de période* $2\pi$, *toujours positive ou nulle et convexe en*

$$\cos\theta\rho, \quad \sin\theta\rho.$$

En utilisant d'une façon plus complète les propriétés des fonctions de Mittag-Leffller, on peut vérifier que, pour la fonction (14) qui vient d'être construite, la fonction $h(\theta)$ définie par (1) est égale à $H(\theta)$, c'est-à-dire que $h(\theta)$ est toujours positive ou nulle. Mais on peut observer que, si $h(\theta)$ n'est pas toujours positive ou nulle, elle est négative dans certains intervalles, dans ces intervalles

$$f(z) = f(r e^{i\theta})$$

tend vers zéro, donc $f(z) + k$ tend vers $k$ et pour cette nouvelle fonction $h(\theta)$ est nulle dans ces intervalles. Ainsi, $f(z)$ étant d'ordre fini $\rho$ du type moyen, il suffit de prendre $f(z) + k$, $k$ étant distinct de $2\rho$ valeurs asymptotiques possibles de $f(z)$, pour que la fonction de Lindelöf-Phragmén de $f(z) + k$ soit égale à $h^{+}(\theta)$, $h(\theta)$ étant définie par (1).

**6.** Lorsque $\rho = 1$, $h(\theta)$ étant périodique, de période $2\pi$, la fonction de contact (non tronquée) en un point $\tau$ est aussi périodique, de période $2\pi$; d'après le théorème III, elle est constamment inférieure ou égale à $h(\theta)$, mais si elle égale $h(\theta)$ pour $\theta_1 \neq \tau$, $|\theta_1 - \tau| \leqq \pi$, l'égalité subsiste dans tout l'intervalle $(\tau, \theta_1)$. On peut donc procéder comme au n° **4**. Si E est un ensemble dénombrable de points $\xi$ du segment $(0, 2\pi)$ contenant un point et un seul sur chaque segment partiel dans lequel $h(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta$ (¹) et dense partout ailleurs, et si $h(\theta, \xi)$ est la fonction de contact de $h(\theta)$ à droite de $\xi$, on a

$$h(\theta) = \text{borne sup. de } h(\theta, \xi),$$
$$h(\xi) = h(\xi, \xi),$$
$$h(\xi', \xi) \leqq h(\xi') \quad \text{si} \quad \xi' \neq \xi.$$

Si l'on pose

$$h(\theta, \xi_n) = A_n \cos(\theta - \alpha_n)$$

et si l'on prend la fonction

$$f(z) = \sum \beta_n e^{A_n z e^{-i\alpha_n}} \tag{15}$$

la série $\Sigma |\beta_n|$ étant convergente, on voit comme au n° **5** que $h(\theta)$ est la fonction de Lindelöf et Phragmén de la fonction (15).

(¹) Si $0$ et $2\pi$ sont extrémités de segments où $h(\theta)$ est de cette forme avec les mêmes valeurs de A et B, on ne prend de point $\xi$ que sur l'un de ces segments.