

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. WOLFF

## Sur la série de Fourier d'une fonction monotone

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 61 (1933), p. 253-257

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1933\\_\\_61\\_\\_253\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__253_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION MONOTONE ;

PAR M. JULIUS WOLFF.

THÉORÈME I. — *Pour que la série*

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

*soit la série de Fourier d'une fonction  $g(\varphi)$  sommable et non décroissante entre 0 et  $2\pi$ , il faut et il suffit que, en posant*

$$(2) \quad c_0 = -ia_0, \quad c_{-1} = -b_1 - ia_1, \quad c_n = b_n - ia_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

*on ait : 1°*

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0;$$

*2° La fonction*

$$(4) \quad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( nc_n - \frac{n+1}{2} c_{n+1} - \frac{n-1}{2} c_{n-1} \right) w^n$$

*soit à partie réelle positive pour  $|w| < 1$  (1).*

La condition nécessaire 1° étant une propriété connue des séries de Fourier, bornons-nous à montrer que la condition 2° est nécessaire. Posons

$$(5) \quad w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = x + yi, \quad t = -\cot \frac{\varphi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Alors  $g(\varphi)$  devient une fonction  $\psi(t)$  définie pour  $-\infty < t < \infty$ . Les hypothèses sur  $g(\varphi)$  entraînent que  $\psi(t)$  ne décroît jamais

---

(1) M. C. CARATHÉODORY a donné un critère analogue, mais moins simple (*Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wiss.*, 30, 1920, p. 573).

et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{1+t^2} < \infty,$$

d'où résulte que  $\psi(t)/(1+t^2) \rightarrow 0$  pour  $|t| \rightarrow \infty$ .

L'intégrale de Stieltjes

$$(6) \quad F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-ti} - \frac{1}{1+ti} \right) d\psi(t)$$

représente une fonction holomorphe à partie réelle positive pour  $x > 0$ . Or, un calcul facile conduit à l'identité

$$(7) \quad F(z) = f(w), \quad |w| < 1.$$

Inversement, supposons remplies les conditions 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>. Posons  $f(w) = F(z)$ ,  $z$  étant donné par (5). Alors  $F(z)$  est holomorphe, à partie réelle positive pour  $x > 0$ , et réelle pour  $z = 1$ , donc

$$(8) \quad f(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-ti} - \frac{1}{1+ti} \right) d\psi(t) = \lambda z + \mu,$$

où  $\psi(t)$  est non décroissante,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu$  réel et  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{1+t^2} < \infty$  (1).

d'où résulte que  $\psi(t)/(1+t^2) \rightarrow 0$  pour  $|t| \rightarrow \infty$ .

Posons  $\psi\left(-\cot \frac{\varphi}{2}\right) = g(\varphi)$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ , alors  $g(\varphi)$  est sommable et non décroissante.

Soient  $\alpha_n, \beta_n$  les coefficients de Fourier de  $g(\varphi)$  et définissons  $\gamma_0, \gamma_{-1}, \gamma_n$  au moyen des  $\alpha_n, \beta_n$ , comme  $c_0, c_{-1}, c_n$  ont été définis au moyen des  $a_n, b_n$  par (2).

Un calcul facile montre que l'intégrale dans (8) est égale à ce que devient (4) si l'on remplace les  $c_n$  par les  $\gamma_n$ .

En vertu du développement  $z = 1 + 2w + 2w^2 + \dots$  nous obtenons, en égalant les coefficients des différentes puissances de  $w$  dans les deux membres de (8),

$$(9) \quad nc_n - \frac{n-1}{2} c_{n-1} - \frac{n-1}{2} c_{n-3} = n\gamma_n - \frac{n-1}{2} \gamma_{n-1} - \frac{n-1}{2} \gamma_{n-3} + \dots$$

$(n = 1, 2, \dots)$ .

(1) Voir par exemple J. WOLFF et F. DE KOK, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 60, 1932, p. 226.

d'où résulte

$$(10) \quad c_n = \gamma_n - 2n\lambda + \text{const.} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

L'hypothèse  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  permet de conclure que

$$c_n = \gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La fonction  $g(\varphi)$  étant sommable et non décroissante, le théorème est démontré.

**THÉORÈME II.** — *Pour que la série (1) soit la série de Fourier d'une fonction  $g(\varphi)$  non décroissante et bornée entre 0 et  $2\pi$ , il faut et il suffit que, avec les notations (2) :*

1° La fonction

$$(11) \quad h(w) = -\frac{1}{2}c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( nc_n - \frac{n+1}{2}c_{n+1} + \frac{n-1}{2}c_{n-1} \right) w^n$$

soit holomorphe et à partie réelle positive pour  $|w| < 1$ .

2° La limite radiale finie

$$\lim_{w \rightarrow 1} h(w)/_{1-w}$$

existe (1).

La nécessité des conditions 1° et 2° résulte de l'identité

$$(12) \quad h(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{z - ti},$$

où  $z$  et  $\psi(t) = g(\varphi)$  sont définies par (5). En effet, l'intégrale (12) représente une fonction holomorphe et à partie réelle positive pour  $x > 0$ , et l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 1} h(w)/_{1-w} &= \frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow 1} \frac{1+w}{1-w} h(w) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} zh(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ g(2\pi-0) - g(+0) \right\}, \end{aligned}$$

quand  $w$  tend vers 1 en restant réel, de sorte que  $z$  tend vers l'infini sur l'axe réel.

(1) Les critères de M. C. Carathéodory (*loc. cit.*, p. 566 ou 568) sont plus compliqués.

Inversement, si les conditions 1° et 2° sont remplies, posons  $h(w) = H(z)$ ,  $z$  étant défini par (5). Alors  $H(z)$  est à partie réelle positive pour  $x > 0$ , donc

$$(13) \quad h(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-ti} + \frac{1}{1+ti} \right) d\psi(t) + \lambda z + \mu + \nu i,$$

où  $\psi(t)$  est non décroissante,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu$  et  $\nu$  réels. Posons

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{1+t^2} + \mu = \mu_1,$$

alors on sait que  $\mu_1 \geq 0$  (1). En indiquant par  $u$  la partie réelle de  $h(w)$  pour  $z$  sur l'axe réel,  $z = x > 0$ , on a

$$u = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{x^2 + t^2} + \lambda x + \mu_1.$$

Or, de 2° il résulte que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{x^2 + t^2} + \lambda x^2 + \mu_1 x \right) < \infty,$$

d'où les conclusions

$$(14) \quad \lambda = \mu_1 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(t) < \infty.$$

Posons  $\psi\left(-\cot\frac{\varphi}{2}\right) = g(\varphi)$  et soient  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  les coefficients de Fourier de  $g(\varphi)$ . Définissons les  $\gamma_n$  par

$$\gamma_n = \beta_n - i\alpha_n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

En vertu de (14), la formule (13) peut s'écrire

$$(15) \quad h(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{z-ti} + \nu_1 i.$$

De 2° il résulte que  $\nu_1 = 0$ .

L'intégrale (15) est égale à ce que devient (11) en remplaçant les  $c_n$  par les  $\gamma_n$ , donc  $c_1 = \gamma_1$  et

$$nc_n - \frac{n+1}{2} c_{n+1} - \frac{n-1}{2} c_{n-1} = n\gamma_n - \frac{n+1}{2} \gamma_{n+1} - \frac{n-1}{2} \gamma_{n-1} \\ (n = 1, 2, \dots),$$

---

(1) Voir par exemple J. WOLFF et F. DE KOK, *loc. cit.*, p. 225.

d'où

$$c_n = \gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La fonction  $g(\varphi)$  étant non décroissante et bornée, le théorème est démontré.

M. Carathéodory a eu l'amabilité de me signaler le résultat suivant, conséquence de la comparaison de son théorème VII (*loc. cit.*, p. 573) au théorème I du présent article :

*Si la suite de nombres  $a_n, b_n$  satisfait à la condition (4), alors la condition  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n =$  nombre réel est nécessaire et suffisante pour que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

*soit la série de Fourier d'une fonction bornée.*

---