

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MENTRÉ

## Étude géométrique des caractéristiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 62 (1934), p. 265-273

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1934\\_\\_62\\_\\_265\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__265_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES CARACTÉRISTIQUES;

PAR M. PAUL MENTRÉ.

1. Je me propose de montrer l'intérêt que présente la théorie géométrique des Caractéristiques dans l'étude des propriétés infinitésimales des Variétés.

Je donnerai de préférence des exemples de variétés réglées car la fécondité de la méthode s'affirme d'une manière simple dans le domaine des droites de l'Espace. Je démontrerai sans calcul de nombreuses propriétés classiques et je grouperai des résultats que j'ai indiqués dans diverses Notes aux *Comptes rendus*.

Je me bornerai pour abrégé aux Caractéristiques de variétés dépendant d'un paramètre mais beaucoup de raisonnements s'adapteraient aux Caractéristiques de variétés dépendant de plusieurs paramètres.

2. **Caractéristiques de différents ordres.** — Considérons une famille continue de  $\infty^1$  variétés (surfaces, congruences, etc.), formées par des éléments générateurs (points, droites, etc.). Imposons à une variété  $A$ , mobile et modifiable, de venir coïncider successivement avec chacune des variétés de la famille; numérotons les positions successives très voisines qui donnent la coïncidence de la variété mobile  $A$  avec les variétés fixes  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$  de la famille donnée ( $A$ ).

Supposons que les deux variétés très voisines  $A_j$  et  $A_{j+1}$  ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) admettent des éléments communs; faisons tendre la variété  $A_{j+1}$  vers la variété  $A_j$ ; l'ensemble des éléments communs constitue une variété dont la limite  $A'_j$  s'appelle la caractéristique de la variété  $A_j$ .

A chaque position de la variété  $A$  correspond une position  $A'$  de sa caractéristique; on peut dire que la variété  $A$  entraîne sa caractéristique qui vient coïncider successivement avec les variétés  $A'_0, A'_1, A'_2, A'_3, \dots$ .

Nous avons une nouvelle famille ( $A'$ ) de variétés. Il pourra arriver que la variété  $A'$  admette dans chacune de ses positions

une caractéristique  $A''$  que nous appellerons alors « deuxième caractéristique » de la variété mobile  $A$ . Il est facile de voir que la « deuxième caractéristique » est formée par les éléments communs à trois variétés  $A$  infiniment voisines. En effet la variété  $A_j''$  est formée de la limite de l'ensemble des éléments communs aux deux variétés  $A_j'$  et  $A_{j+1}'$ , c'est-à-dire des éléments communs aux trois variétés  $A_j, A_{j+1}, A_{j+2}$ .

D'une manière générale on définit la  $p^{\text{ième}}$  caractéristique comme étant la caractéristique de la  $(p-1)^{\text{ième}}$  caractéristique. On voit aisément que la  $p^{\text{ième}}$  caractéristique d'une variété mobile  $A$  est formée par l'ensemble des éléments communs à  $p+1$  variétés  $A$  infiniment voisines.

**3. Dernières caractéristiques.** — Supposons que les  $\infty^1$  variétés  $A$  aient en commun des éléments. Ceux-ci appartiennent manifestement aux caractéristiques des différents ordres. Nous appellerons « dernière caractéristique » l'ensemble des éléments fixes communs.

Considérons par exemple un complexe linéaire variable  $A$  contenant trois droites fixes, ce qui lui impose de contenir une demi-quadratique fixe. Celle-ci est la deuxième et dernière caractéristique : elle sert de caractéristique fixe  $A''$  à la congruence linéaire caractéristique variable  $A'$ .

Supposons maintenant que les  $\infty^1$  positions de la variété mobile  $A$  n'aient aucun élément commun. Il n'existe alors que des caractéristiques dont l'ordre ne dépasse pas une certaine valeur. La variété mobile entraîne donc une « dernière caractéristique » mobile et modifiable occupant successivement  $\infty^1$  positions.

Considérons par exemple un plan  $A$  mobile dans l'espace ordinaire. Donnons-lui un déplacement à un paramètre de manière que les  $\infty^1$  positions n'aient aucun point commun, ce qui exclut les cas simples d'un plan  $A$  tournant autour d'une droite fixe ou d'un plan  $A$  passant par un point fixe et enveloppant par suite un cône. Le plan  $A$  admet une droite caractéristique  $A'$ , laquelle admet un point caractéristique  $A''$ ; le point mobile  $A''$  est la deuxième et dernière caractéristique du plan  $A$ .

Considérons, comme autre exemple, un complexe linéaire  $A$  mobile dans l'Espace projectif réglé et supposons que les  $\infty^1$  positions n'admettent aucune droite commune. Puisque cinq complexes

linéaires n'ont en général aucune droite commune, tandis que quatre complexes linéaires ont en général deux droites communes, la dernière caractéristique du complexe linéaire  $A$  est en général du troisième ordre et comporte deux droites mobiles.

Si le complexe linéaire  $A$  se déplace de manière que cinq positions successives admettent une droite commune, cette droite mobile est une dernière caractéristique du quatrième ordre.

**4. Théorie de la contrainte.** — Étudions le déplacement de la première caractéristique  $A'$  d'une variété  $A$ .

$A'_j$  est formé par les éléments communs à  $A_j$  et  $A_{j-1}$ ,  $A'_{j+1}$  est de même formé par les éléments communs à  $A_{j+1}$  et  $A_{j+2}$ ; donc  $A'_j$  et  $A'_{j+1}$  sont situés dans  $A_{j+1}$ ; autrement dit. *deux positions successives de  $A'$  sont situées dans une même variété  $A$ .* Nous dirons que la variété  $A'$  subit la contrainte de la variété  $A$ .

Réciproquement, si une variété  $V$  subit la contrainte d'une autre variété  $U$ , il est facile de voir que  $V$  est la caractéristique de  $U$ .

En effet  $V_j$  et  $V_{j+1}$  sont situées dans une variété  $U$  que l'on peut désigner par  $U_{j+1}$ ; de même  $V_{j+1}$  et  $V_{j+2}$  sont situées dans  $U_{j+2}$ ; par suite la variété  $V_{j+1}$  est formée par les éléments communs aux deux variétés successives  $U_{j+1}$  et  $U_{j+2}$ .

On peut aisément généraliser et définir des contraintes de différents ordres.

Considérons dans l'Espace réglé projectif une quadrique mobile dont la biquadratique caractéristique est dégénérée en un quadrilatère gauche. L'une quelconque  $V$  des deux demi-quadriques subit la contrainte d'une congruence linéaire. En effet les deux demi-quadriques successives  $V_j$  et  $V_{j+1}$  s'appuient sur deux côtés opposés du quadrilatère caractéristique; elles sont donc situées dans une congruence linéaire  $U_{j+1}$ . Mais la congruence linéaire mobile  $U$  subit à son tour la contrainte d'un complexe linéaire  $T$ . En effet les deux directrices de  $U_{j+1}$  rencontrent les droites de  $V_j$  et  $V_{j+1}$ ; les deux directrices de  $U_{j+2}$  rencontrent les droites de  $V_{j+1}$  et  $V_{j+2}$ . Nous voyons que deux positions successives des deux directrices de  $U$  sont situées sur une même demi-quadrique; il en résulte que deux congruences linéaires  $U$  successives sont situées dans un même complexe linéaire  $T$ . La demi-quadrique  $V$  est donc la deuxième caractéristique d'un complexe linéaire mobile  $T$ ;

de même la demi-quadrique  $\bar{V}$ , complémentaire de  $V$ , est la deuxième caractéristique d'un complexe linéaire mobile  $\bar{T}$ .

5. **Variétés ponctuelles linéaires.** — Considérons dans l'espace ponctuel projectif à  $n$  dimensions un hyperplan  $A$  qui subit un déplacement à un paramètre.

Les caractéristiques des différents ordres sont formées par l'ensemble des points communs à 2, 3, 4, ... positions successives de l'hyperplan  $A$ . Toutes les caractéristiques sont donc des variétés linéaires.

On sait que  $n$  hyperplans ont en général un seul point commun. La dernière caractéristique est donc en général un point mobile, lequel décrit une courbe; la dernière caractéristique est alors d'ordre  $n - 1$ .

L'ensemble des points communs à  $p$  hyperplans constitue en général une variété linéaire (ou plan) à  $n - p$  dimensions; par suite la caractéristique d'ordre  $p - 1$  est en général un plan mobile à  $n - p$  dimensions.

Le déplacement à un paramètre de cette caractéristique d'ordre  $p - 1$  n'est pas arbitraire : deux positions successives sont « contraintes » à se trouver dans la caractéristique d'ordre  $p - 2$  et elles ont en commun une caractéristique d'ordre  $p$ .

Nous dirons qu'une variété linéaire mobile subit une « contrainte linéaire » quand deux positions successives sont situées dans une variété linéaire possédant une dimension immédiatement supérieure. Par exemple une droite (à une dimension) mobile subit une contrainte linéaire si deux positions successives sont situées dans un même plan (à deux dimensions); cette contrainte a pour effet de donner à la droite mobile un point caractéristique. Toutes les caractéristiques successives d'un hyperplan mobile subissent, d'après ce qui précède, une contrainte linéaire.

Considérons un plan à  $n - p$  dimensions subissant un déplacement avec contrainte linéaire. Cette variété est définie, pour chacune de ses positions, par  $p$  équations linéaires et indépendantes entre les  $n$  coordonnées projectives; mais nous pouvons choisir ces équations de telle manière qu'il y en ait  $p - 1$  qui soient valables pour deux positions successives. Les points communs à deux telles positions sont donc communs à  $p + 1$  hyperplans. Par suite, en

imposant au plan mobile à  $n - p$  dimensions d'être la caractéristique d'un plan mobile à  $n - p + 1$  dimensions, on lui fournit une caractéristique à  $n - p - 1$  dimensions: la contrainte linéaire entraîne l'« épanouissement » de la caractéristique (car sans contrainte la caractéristique d'un plan à  $n - p$  dimensions est une variété linéaire à  $n - 2p$  dimensions).

Il est facile de savoir si une variété linéaire mobile à  $n - p$  dimensions peut être considérée comme la caractéristique (d'ordre  $p - 1$ ) d'un hyperplan; pour qu'il en soit ainsi il faut que  $p$  positions successives soient situées dans un même hyperplan.

Un point mobile peut donc en général être considéré comme la caractéristique (d'ordre  $n - 1$ ) d'un hyperplan.

**6. Contacts et raccords de deux variétés.** — Considérons d'abord deux courbes dont l'une est formée par les points successifs infiniment voisins  $m_0, m_1, m_2, \dots$ . Supposons que l'autre courbe « passe par les points  $m_0, m_1, \dots, m_s$  », c'est-à-dire que cette courbe est la limite d'une courbe passant par  $s + 1$  points très voisins qui se rapprochent de manière à venir coïncider avec l'un d'entre eux ( $m_0$  par exemple). Les deux courbes ont par définition un contact d'ordre  $s$  au voisinage d'un point commun  $m_0$ .

Considérons maintenant deux variétés dont l'une est formée par des « génératrices » successives infiniment voisines  $M_0, M_1, M_2, \dots$ , lesquelles génératrices sont elles-mêmes formées par des éléments de l'Espace. Supposons que l'autre variété « contienne les génératrices  $M_0, M_1, \dots, M_s$  ». Les deux variétés « se raccordent », avec un contact d'ordre  $s$ , au voisinage de la génératrice  $M_0$ .

Soit  $\mu_0$  un élément de  $M_0$ . Traçons *arbitrairement* dans la première variété une suite simplement infinie d'éléments en partant de l'élément  $\mu_0$ , ce qui oblige à « traverser » les génératrices successives  $M_1, M_2, \dots, M_s$  en leur empruntant les éléments  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ . Tous ces éléments appartiendront à la deuxième variété donnée. Celle-ci a donc par définition un contact d'ordre  $s$  avec la première variété, au voisinage de l'élément commun  $\mu_0$ .

Le raccord suivant la génératrice  $M_0$  entraîne donc le contact au voisinage des différents éléments  $\mu_0$  de cette génératrice.

Remarquons que la deuxième variété doit avoir au moins la même dimension que la première variété.

Soient par exemple deux surfaces ponctuelles réglées, dont l'une contient trois droites génératrices successives infiniment voisines de l'autre surface. Les deux surfaces réglées se raccordent avec un contact du deuxième ordre; une courbe tracée sur l'une est osculatrice à l'autre surface.

Nous allons rencontrer des exemples de raccord de variétés n'ayant pas le même nombre de dimensions.

**7. Enveloppes.** — Revenons à la variété mobile  $A$  considérée au n° 2. La première caractéristique  $A'$  engendre dans son déplacement une variété ( $A'$ ) qui s'appelle la première enveloppe de la variété  $A$ .

Il est facile de démontrer que la variété  $A$  se raccorde dans chacune de ses positions avec la variété-enveloppe ( $A'$ ), le contact étant du premier ordre.

On peut, en effet, envisager les variétés caractéristiques  $A'_j$  comme étant les « génératrices » de la variété-enveloppe ( $A'$ ). La variété  $A'_j$  est formée par les éléments communs aux variétés  $A_j$  et  $A_{j+1}$ ; la variété  $A'_{j+1}$  est formée par les éléments communs aux variétés  $A_{j+1}$  et  $A_{j+2}$ ; les deux variétés  $A'_j$  et  $A'_{j+1}$  sont donc situées dans  $A_{j+1}$ , ce qui revient à dire que la variété  $A_{j+1}$  se raccorde avec la variété-enveloppe ( $A'$ ) au voisinage de la caractéristique  $A'_{j+1}$ , par un contact du premier ordre.

Par le même procédé de raisonnement on peut étudier le contact de la variété  $A$  avec sa deuxième enveloppe.

Les variétés  $A''_j, A''_{j+1}, A''_{j+2}$  sont formées par les éléments qui sont communs respectivement à  $A_j, A_{j+1}$  et  $A_{j+2}$ ; à  $A_{j+1}, A_{j+2}$  et  $A_{j+3}$ ; à  $A_{j+2}, A_{j+3}$  et  $A_{j+4}$ ; ces trois variétés  $A''$  sont donc situées dans la variété  $A_{j+2}$ . On en déduit que la variété  $A_{j+2}$  se raccorde avec la variété ( $A''$ ), par un contact du deuxième ordre, au voisinage de la caractéristique  $A''_{j+2}$ .

On démontrerait de même que la variété  $A$  garde un contact d'ordre  $p$  avec l'enveloppe d'ordre  $p$ , en se raccordant suivant la caractéristique d'ordre  $p$ .

Un exemple simple est fourni par un plan qui subit un déplacement à un paramètre dans l'espace ordinaire. La première enveloppe est une surface réglée développable. La deuxième enveloppe est l'arête de rebroussement, courbe à laquelle le plan reste osculateur.

Pour avoir un exemple plus intéressant, considérons un complexe  $A$  variable et mobile dans l'Espace réglé où il vient coïncider successivement avec  $\infty^1$  complexes de droites. On a, *en général*, une congruence  $A'$  caractéristique du premier ordre, une surface réglée  $A''$  caractéristique de second ordre, un ensemble de droites isolées  $A'''$  formant la caractéristique du troisième ordre. Le complexe  $A$  reste tangent au complexe ( $A'$ ); il reste osculateur à la congruence ( $A''$ ); il garde un contact du troisième ordre avec les surfaces réglées ( $A'''$ ).

Lorsque  $A$  est un complexe linéaire subissant un déplacement projectif, on obtient en général comme première enveloppe un complexe d'une nature particulière : ce dernier complexe est engendré par une congruence linéaire qui se déplace de telle manière que deux positions successives des deux directrices soient situées sur une même demi-quadrique. La deuxième enveloppe est une congruence dont les deux surfaces focales sont réglées; il s'agit d'une congruence  $W$  puisque le complexe linéaire  $A$  lui reste osculateur. La troisième enveloppe est formée par deux surfaces réglées dont les génératrices sont mises en correspondance par le complexe linéaire  $A$ , lequel contient quatre génératrices infiniment voisines de l'une et de l'autre surface <sup>(1)</sup>. Il y a certains cas intéressants; notamment il peut arriver que la congruence linéaire caractéristique soit spéciale <sup>(2)</sup>; les deux surfaces réglées engendrées par la caractéristique du troisième ordre peuvent se confondre <sup>(3)</sup>.

Lorsque  $A$  est un complexe quadratique, la congruence caractéristique est de degré 4 et de classe 4; la surface réglée qui est la caractéristique du deuxième ordre est de degré 16 et de classe 16; la caractéristique du troisième ordre se compose de 32 droites et elle engendre 32 surfaces réglées, enveloppes dont les génératrices sont mises en correspondance par le contact simultané du complexe quadratique  $A$ . Il y aurait évidemment une foule de cas particuliers à envisager. On pourra notamment supposer que  $A$  est le complexe quadratique hyperosculateur à une surface réglée donnée en sorte que  $A$  contient 19 génératrices infiniment voisines : la congruence

---

(1) P. MENTRÉ, *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 724; t. 184, 1927, p. 428.

(2) P. MENTRÉ, *Comptes rendus*, t. 178, 1924, p. 290.

(3) P. MENTRÉ, *Comptes rendus*, t. 185, 1927, p. 1179.



caractéristique  $A'$  contient 18 génératrices infiniment voisines; la surface réglée  $A''$  contient 17 génératrices infiniment voisines (en sorte qu'elle garde avec la surface réglée donnée un contact du seizième ordre); parmi les 32 droites de la caractéristique du troisième ordre, il y en a 16 qui sont confondues; il existe une caractéristique du quatrième ordre formée par 15 droites confondues; il existe une caractéristique du dix-huitième ordre formée par une droite simple.

On généraliserait aisément au cas d'un complexe algébrique d'un ordre élevé.

**8. Théorie de la réciprocité.** — Étudions maintenant le déplacement *simultané* à un paramètre de deux variétés  $A$  et  $B$  ayant ou n'ayant pas le même nombre de dimensions. Nous supposons que  $A$  et  $B$  ont sans cesse une propriété mutuelle (d'appartenance, de parallélisme, de perpendicularité, d'intersection dégénérée, etc.). Par exemple  $A$  est un plan,  $B$  est une droite : nous pourrions supposer que  $B$  reste située dans  $A$  ou bien reste parallèle à  $A$  ou bien passe par le pôle du plan  $A$  par rapport à une quadrique fixe; suivant le cas il en résulte que  $A$  contient  $B$ , que  $A$  reste parallèle à  $B$  ou que  $A$  passe par la droite conjuguée de la droite  $B$  par rapport à la quadrique fixe.

Pour abrégé nous dirons que les deux variétés  $A$  et  $B$  sont conjuguées et nous emploierons le symbole  $A \text{ } c_j \text{ } B$ .

Une conjugaison simple n'a guère d'intérêt, mais nous allons étudier les conjugaisons multiples. Supposons que, dans chacune de ses positions, la variété  $A$  reste conjuguée à  $k$  positions successives, infiniment voisines, de la variété  $B$ . Il est facile de voir que réciproquement la variété  $B$  dans chacune de ses positions sera conjuguée à  $k$  positions successives, infiniment voisines, de la variété  $A$ .

En effet raisonnons, pour fixer les idées, avec  $k = 5$ . Nous aurons :

$$\begin{array}{l} B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 \quad c_j \quad A_2; \\ B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 \quad c_j \quad A_3; \\ B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 \quad c_j \quad A_4; \\ B_3, B_4, B_5, B_6, B_7 \quad c_j \quad A_5; \\ B_4, B_5, B_6, B_7, B_8 \quad c_j \quad A_6. \end{array}$$

Comme  $B_1$  intervient dans les cinq conjugaisons, il en résulte que l'on a

$$B_1 \text{ est conjuguée à } A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$$

et par suite, plus généralement,

$$B_i \text{ est conjuguée à } A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}.$$

Bien plus, en nous plaçant toujours pour fixer les idées dans le cas d'une conjugaison quintuple, il pourra arriver qu'exceptionnellement pour une position de  $A$  la conjugaison devienne sextuple : il est facile de voir qu'il y a encore réciprocité.

Supposons par exemple que  $B_1$  reste conjuguée à  $A_7$ , ce qui revient à dire que  $A_7$  est conjuguée à six positions successives de  $B$  ; alors  $B_1$  sera conjuguée à six positions de  $A$ , savoir :  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ . On peut appeler ce phénomène le « renforcement de la conjugaison ».

Par exemple, la caractéristique d'ordre  $p - 1$  d'une variété  $A$  peut jouer le rôle de la variété  $B$  ; comme elle est située dans  $p$  positions successives de  $A$ , par réciprocité d'appartenance, chaque position de la variété  $B$  contient  $p$  positions successives de la caractéristique considérée. Nous avons d'ailleurs déjà établi directement cette propriété qui nous a servi à l'étude des enveloppes, de différents ordres, de  $A$ .

On obtient des résultats intéressants en considérant une droite mobile  $A$  qui rencontre  $k$  positions successives d'une droite mobile  $B$ . On trouve ainsi, avec  $k = 4$ , une propriété des deux surfaces réglées qui sont les transformées flecnodales d'une surface réglée.

Si  $A$  et  $B$  sont deux complexes linéaires mobiles (dans l'espace projectif) qui restent en involution d'une façon quintuple, on obtient des propriétés remarquables : notamment les deux demi-quadratiques  $A''$  et  $B''$  sont complémentaires.