

# BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLAS KRYLOFF

NICOLAS BOGOLIUBOFF

## **Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 64 (1936), p. 49-56

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1936\\_\\_64\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__49_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DE L'ÉQUATION  
DE SMOLUCHOVSKY,**

PAR MM. NICOLAS KRYLOFF ET NICOLAS BOGOLIOUBOFF.

1. Soit donné un système dynamique et soit  $\Omega$  son espace des phases.

Nous admettons ici que  $\Omega$  est un espace distancié, compact et connexe.

Soit  $m$  une mesure définie dans cet espace, positive pour tout ensemble ouvert non vide.

Supposons qu'il existe une probabilité bien définie  $\mathcal{F}_t\{P, \mathfrak{M}\}$  afin que le système qui se trouve à un instant du temps dans l'état  $P$  se trouvera après l'écoulement du temps  $t$  dans un des états  $Q \subset \mathfrak{M}$ .

Supposons enfin que cette probabilité peut être mise sous la forme

$$\mathcal{F}_t\{P, \mathfrak{M}\} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(P, Q, t) dm_Q,$$

où  $\varphi(P, Q, t)$  est une fonction continue de  $P, Q, t$  pour  $t > 0$ . Il est clair d'abord que cette fonction doit vérifier l'équation dite de Smoluchowsky

$$(1) \quad \varphi(P, Q, t + \tau) = \int_{\Omega} \varphi(P, R, t) \varphi(R, Q, \tau) dm_R,$$

ainsi que les conditions supplémentaires suivantes

$$(2) \quad \int_{\Omega} \varphi(P, Q, t) dm_Q = 1, \quad \varphi(P, Q, t) \geq 0.$$

Dans le présent article nous allons étudier, en partant de ces relations, l'allure asymptotique de la densité de probabilité  $\varphi(P, Q, t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ .

2. Remarquons d'abord que de l'équation (1) il s'ensuit que  $\varphi(P, Q, n\tau)$  est le noyau  $n$  fois itéré relatif au noyau

$$\varphi(P, Q, \tau).$$

D'autre part, en vertu des théorèmes bien connus de M. Fréchet on peut affirmer que si  $K(P, Q)$  est un noyau borné vérifiant les conditions

$$(3) \quad \int_{\Omega} K(P, Q) dm_Q = 1, \quad K(P, Q) \geq 0,$$

alors les noyaux itérés  $K_n(P, Q)$  peuvent être mis sous la forme

$$K_n(P, Q) = \Phi_n(P, Q) + R_n(P, Q),$$

où

$$|R_n(P, Q)| \leq H\gamma^n, \quad A = \text{const.}, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

et où  $\Phi_n(P, Q)$  est périodique par rapport à l'indice  $n$  avec une certaine période  $N$  ( $N$  étant un entier).

Par conséquent nous avons pour notre cas

$$(4) \quad |\varphi(P, Q, t + nN\tau) - \varphi(P, Q, t)| \leq M e^{-\alpha t}, \quad M = \text{const.}, \quad \alpha > 0,$$

où  $n$  et  $N\tau$  sont des entiers et où  $\tau$  et  $t$  sont des nombres positifs quelconques.

Prenons deux valeurs  $\tau_0, \tau_1$  de  $\tau$  de façon que le rapport  $\frac{\tau_1}{\tau_0}$  soit irrationnel.

Alors à chaque nombre  $x$  nous pouvons faire correspondre des telles suites  $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$  des nombres entiers que

$$N_{\tau_0} n_1 \tau_0 = N_{\tau_1} n_2 \tau_1 + x + \varepsilon,$$

où  $\varepsilon \rightarrow 0$  quand

$$n_1 \rightarrow +\infty, \quad n_2 \rightarrow +\infty.$$

Or, nous avons d'après (4)

$$|\varphi(P, Q, t + nN_{\tau_0}\tau_0) - \varphi(P, Q, t)| \leq M e^{-\alpha t},$$

$$|\varphi(P, Q, t + nN_{\tau_1}\tau_1) - \varphi(P, Q, t)| \leq M e^{-\alpha t};$$

donc

$$|\varphi(P, Q, t + x) - \varphi(P, Q, t)| \leq M e^{-\alpha t} (1 + e^{-\alpha x}),$$

et d'ici il s'ensuit que la fonction  $\varphi(P, Q, t)$  tend uniformément vers une fonction limite  $\varphi(P, Q)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

On voit aussi que

$$(5) \quad |\varphi(P, Q, t) - \varphi(P, Q)| \leq M e^{-\alpha t}.$$

En passant à la limite dans (1), (2) on s'assure que

$$(6) \quad \varphi(P, Q) = \int_{\Omega} \varphi(P, R, t) \varphi(R, Q) dm_R,$$

$$(7) \quad \varphi(P, Q) = \int_{\Omega} \varphi(P, R) \varphi(R, Q, t) dm_R,$$

$$(8) \quad \int_{\Omega} \varphi(P, Q) dm_Q = 1, \quad \varphi(P, Q) \geq 0.$$

Il est clair en outre que  $\varphi(P, Q)$  est une fonction continue de  $P, Q$ .

3. Cela étant envisageons un noyau continu  $K(P, Q)$  vérifiant les conditions (3) et considérons une équation intégrale

$$(9) \quad x(P) = \int_{\Omega} K(Q, P) x(Q) dm_Q.$$

Il est clair d'abord que si  $x(P)$  est une solution de cette équation alors l'expression  $|x(P)|$  est aussi une solution de cette équation.

Nous avons en effet, d'après (5) et (9).

$$|x(P)| \leq \int_{\Omega} K(Q, P) |x(Q)| dm_Q,$$

d'où vient en vertu de (3)

$$(10) \quad \int_{\Omega} \left| |x(P)| - \int_{\Omega} K(Q, P) |x(Q)| dm_Q \right| dm_P \\ = \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(Q, P) |x(Q)| dm_Q dm_P - \int_{\Omega} |x(P)| dm_P = 0.$$

Or, vu la continuité du noyau  $K$ , l'expression

$$|x(P)| - \int_{\Omega} K(Q, P) |x(Q)| dm_Q$$

est dans le cas actuel une fonction continue.

Par conséquent de (10) il s'ensuit qu'on a partout

$$|x(P)| = \int_{\Omega} K(Q, P) |x(Q)| dm_Q,$$

ce que nous avons voulu mettre en évidence.

Vu le caractère linéaire de l'équation (9), il est clair que les fonctions non négatives

$$|x(P)| + x(P), \quad |x(P)| - x(P),$$

sont aussi ses solutions.

Soient maintenant  $x_1(P)$ ,  $x_2(P)$  deux solutions différentes du système intégral

$$(11) \quad x(P) = \int_{\Omega} K(Q, P) x(Q) dm_Q, \quad \int_{\Omega} x(P) dm_P = 1.$$

Posons

$$(12) \quad \begin{cases} y_1(P) = |x_1(P) - x_2(P)| + x_1(P) - x_2(P), \\ y_2(P) = |x_1(P) - x_2(P)| + x_2(P) - x_1(P), \end{cases}$$

et remarquons que ces fonctions non négatives sont les solutions de l'équation intégrale (9).

Remarquons de plus que, vu que les fonction  $x_1(P)$ ,  $x_2(P)$  sont différentes, on trouve évidemment

$$\int_{\Omega} y_1(P) dm_P = \int_{\Omega} y_2(P) dm_P = \int_{\Omega} |x_1(P) - x_2(P)| dm_P \neq 0.$$

Nous pouvons donc définir les fonctions suivantes :

$$(13) \quad z_1(P) = \frac{y_1(P)}{\int_{\Omega} y_1(P) dm_P}, \quad z_2(P) = \frac{y_2(P)}{\int_{\Omega} y_2(P) dm_P},$$

qui sont évidemment des solutions non négatives du système intégral (11). D'autre part de (12) et de (13) il s'ensuit que ces solutions vérifient l'identité

$$z_1(P) z_2(P) = 0.$$

En poussant ces raisonnements plus loin on arrive à la conclusion suivante.

Si  $\alpha$  est le nombre des solutions linéairement indépendantes du système (11), on peut construire exactement  $\alpha$  solutions non négatives de ce système

$$\rho_1(P), \dots, \rho_\alpha(P),$$

telles qu'on aurait identiquement

$$(14) \quad \rho_k(P) \rho_q(P) = 0 \quad \text{si } k \neq q.$$

Il est clair aussi que toute solution non négative du système (11) peut être mise sous la forme

$$x(P) = c_1 \rho_1(P) + \dots + c_\alpha \rho_\alpha(P),$$

où

$$c_1 \geq 0, \quad \dots, \quad c_\alpha \geq 0, \quad c_1 + \dots + c_\alpha = 1.$$

4. Cela étant, appliquons ces résultats au cas du noyau

$$K(P, Q) = \varphi(P, Q, t)$$

et remarquons que dans ce cas, d'après (7), l'expression

$$x(P) = \varphi(R, P)$$

considérée comme une fonction de  $P$  sera justement la solution non négative de (11), quelle que soit la position fixe du point  $R$ .

Par conséquent

$$(15) \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=1}^{\alpha} \Phi_k(P) \rho_k(Q),$$

où

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\alpha} \Phi_k(P) = 1, \quad \Phi_k(P) \geq 0, \\ \int_{\Omega} \rho_k(P) dm_P = 1, \quad \rho_k(P) \geq 0, \quad \rho_k(P) \rho_q(P) = 0 \quad \text{si } k \neq q. \end{array} \right.$$

De (6) et (7) il s'ensuit qu'on a aussi

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_k(P) = \int_{\Omega} \varphi(P, Q, t) \rho_k(Q) dm_Q, \\ \rho_k(P) = \int_{\Omega} \varphi(Q, P, t) \rho_k(Q) dm_Q. \end{array} \right.$$

Définissons maintenant certains domaines  $\mathfrak{E}_k$  à l'aide de la condition suivante :

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi_k(P) > 0 & \text{si } P \subset \mathfrak{E}_k, \\ \varphi_k(P) = 0 & \text{si } P \subset \Omega - \mathfrak{E}_k. \end{cases}$$

On voit d'après (16) que ces domaines  $\mathfrak{E}_k$  que nous appellerons les ensembles ergodiques sont deux à deux sans points communs.

Cela étant, remarquons que de (17) et de (18) il vient

$$\int_{\mathfrak{E}_k} \varphi(P, Q, t) \varphi_k(Q) dm_Q = 0 \quad \text{si } P \subset \Omega - \mathfrak{E}_k.$$

Donc

$$(19) \quad \varphi(P, Q, t) = 0 \quad \text{si } P \subset \mathfrak{E}_k, \quad Q \subset \Omega - \mathfrak{E}_k.$$

Cette relation nous montre que la probabilité (afin que le système dynamique, qui se trouve à un instant du temps dans l'état appartenant à un ensemble ergodique  $\mathfrak{E}_k$ , se trouvera à un instant ultérieur dans un état en dehors de  $\mathfrak{E}_k$ ) est nulle.

En ce sens les ensembles ergodiques sont donc invariants. Considérons maintenant l'ensemble des points appartenant à un des ensembles ergodiques

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_n.$$

On a d'après (15), (16) et (18)

$$\int_{\mathfrak{H}} \varphi(P, P) dm_Q = 1;$$

d'où vient

$$\int_{\mathfrak{H}} \varphi(P, Q, t) dm_Q \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

de sorte que la probabilité pour que le système dynamique se trouve dans un des états ergodiques (c'est-à-dire dans un des états  $P \subset \mathfrak{H}$ ) s'approche à l'unité quand  $t \rightarrow +\infty$ . D'autre part, si  $P \subset \mathfrak{E}_k$ , la probabilité des transitions

$$P \rightarrow Q, \quad \text{où } Q \subset \Omega - \mathfrak{E}_k,$$

est nulle.

Par conséquent

$$\int_{\mathfrak{E}_k} \varphi(P, Q) dm_Q = 1 \quad \text{si } P \subset \mathfrak{E}_k,$$

$$\int_{\mathfrak{E}_k} \varphi(P, Q) dm_Q = 0 \quad \text{si } P \subset \mathfrak{N} - \mathfrak{E}_k;$$

d'où vient

$$(20) \quad \Phi_k(P) = \begin{cases} 1, & \text{si } P \subset \mathfrak{E}_k, \\ 0, & \text{si } P \subset \mathfrak{N} - \mathfrak{E}_k. \end{cases}$$

On trouve donc

$$\varphi(P, Q) = \rho_k(Q), \quad \text{si } P \subset \mathfrak{E}_k.$$

*Ainsi la densité de la probabilité ne dépend pas du premier état P tant que cet état reste à l'intérieur d'un ensemble ergodique.*

D'autre part, de (20), il s'ensuit que

$$(21) \quad \Phi_k(P) = \begin{cases} 1, & \text{si } P \subset \overline{\mathfrak{E}_k}, \\ 0, & \text{si } P \subset \overline{\mathfrak{N} - \mathfrak{E}_k}; \end{cases}$$

car les fonctions  $\Phi_k(P)$  doivent être continues. Par conséquent si  $\alpha > 1$  (dans ce cas  $\mathfrak{N} - \mathfrak{E}_k$  ne sera pas vide), l'ensemble ouvert  $\Omega - \overline{\mathfrak{N}}$  ne peut pas être vide, car autrement on aurait

$$\Omega = \overline{\mathfrak{E}_k} + \overline{\mathfrak{N} - \mathfrak{E}_k},$$

ce qui serait incompatible avec la connexité de l'espace, étant donné qu'en vertu de (21) les ensembles fermés  $\overline{\mathfrak{E}_k}$ ,  $\overline{\mathfrak{N} - \mathfrak{E}_k}$  n'ont pas des points communs. D'ici il résulte entre autre que la condition nécessaire et suffisante, afin que l'espace  $\Omega$  forme un seul ensemble ergodique

$$\Omega = \mathfrak{E},$$

est qu'il existe une fonction non négative  $\rho(P)$  vérifiant l'équation

$$(22) \quad \rho(P) = \int_{\Omega} \varphi(Q, P, t) \rho(Q) dm_Q,$$

telle que l'ensemble  $E_P \{ \rho(P) = 0 \}$  de ses racines soit de  $m$  — mesure nulle.



En particulier cela se présente par exemple quand les densités de probabilité  $\varphi(P, Q, t)$  vérifient la condition supplémentaire.

$$\int_{\Omega} \varphi(P, Q, t) dm_P = 1;$$

car alors  $\rho(P) = 1$  sera une solution de l'équation (22).

---