

# BULLETIN DE LA S. M. F.

F. VYCHLO

## **Sur une interprétation géométrique de la courbure projective des courbes planes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 64 (1936), p. 87-98

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1936\\_\\_64\\_\\_87\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__87_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE  
DE LA COURBURE PROJECTIVE DES COURBES PLANES;**

PAR M. F. VYČICHLO

(Praha).

On a obtenu la signification géométrique de la normale projective en un point général d'une courbe plane  $K$  à l'aide d'une courbe du troisième ordre avec le point double au point pris en considération et qui a en ce point un contact d'ordre sept avec la courbe  $K$ . Les tangentes en point double de cette cubique unicursale sont : la tangente de la courbe considérée et sa normale projective (1).

On peut se demander, si les propriétés projectives de cette cubique interprètent géométriquement aussi la courbure projective de la courbe  $K$ .

Ce Mémoire répond à cette question (2).

1. Considérons une courbe plane  $K$ , dont les équations (en coordonnées projectives) sont

$$(1,1) \quad x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

où les fonctions  $x_i$  satisfont aux conditions suivantes :

---

(1) E. J. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig, 1906; G. SANNIA, *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane*, *Rend. Lincei*, 1922 (4 Notes), p. 432-434; E. BOMPIANI, *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane*, *Rend. Lincei*, 1926, p. 118-123; E. ČECH, *Projektivni diferencijalni geometrie*, Praha, 1926; A. TERRACINI, *Sul significato geometrico della normale proiettiva*, *Rend. Lincei*, 1926, p. 584-591.

(2) M. V. HLAVATÝ a démontré dans le Mémoire : *Connexion projective et déplacement projectif* (*Annali di Matematica*, 4<sup>e</sup> série, t. XII, 1933-1934, p. 267-272), que la courbure projective de la courbe plane ou gauche peut s'exprimer par un birapport anharmonique, mais il n'a pas étudié la signification géométrique de ce birapport, qui n'est pas d'ailleurs identique avec le birapport mentionné dans la suite.

(1,I). Les fonctions  $x_i$  sont régulières pour n'importe quelle valeur de  $t$  d'un intervalle  $\langle a, b \rangle$ .

(1,II). Si  $t_1 \neq t_2$  sont deux valeurs de  $\langle a, b \rangle$ , les droites déterminées par les équations

$$\sum_{i=1}^3 x_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)_{t_1} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 x_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)_{t_2} = 0,$$

sont linéairement indépendantes.

(1,III). On aura

$$\Delta_t = \left| x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right| \neq 0 \quad (1),$$

pour chaque  $t$  de  $\langle a, b \rangle$ .

Introduisons les abréviations

$$(1,2) \quad D\varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta_t}} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2),$$

où  $\varphi$  est une fonction d'un paramètre  $t$  qui a au moins une dérivée première.

Soient en outre

$$(1,3) \quad \xi_i(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta_t}} \left( x_2 \frac{dx_3}{dt} - x_3 \frac{dx_2}{dt} \right), \quad \dots,$$

$$(1,4) \quad X_i(t) = D\xi_2 D^2 \xi_3 - D\xi_3 D^2 \xi_2, \quad \dots,$$

où

$$(1,5) \quad D^2 \xi_i = D(D\xi_i);$$

$$\Xi_1(t) = Dx_2 D^2 x_3 - Dx_3 D^2 x_2, \quad \dots$$

Ceci nous permet d'introduire les notions

$$(1,6) \quad k(t) = -\frac{1}{2} (X_1 \Xi_1 + X_2 \Xi_2 + X_3 \Xi_3),$$

$$(1,7) \quad n(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\Xi_i DX_i - X_i D\Xi_i)$$

(<sup>1</sup>) On peut voir facilement que les équations (1,I) avec les conditions (1,I), (1,II) et (1,III) définissent les courbes planes qui n'ont pas, aux points pris en considération, de points d'inflexion ou d'autres points singuliers.

(<sup>2</sup>) Nous prendrons ici (et aussi dans la suite) la valeur principale pour la troisième racine.

et nous dirons d'après M. E. Čech que  $k(t)$  et  $n(t)$  sont respectivement *le premier et le second unimodulaire invariant de la courbe K* <sup>(1)</sup>.

Nous supposons encore que pour la courbe en jeu K, en chaque point de l'intervalle  $\langle a, b \rangle$ , on a

$$(1, IV) \quad n(t) \neq 0 \quad (2).$$

Supposons donnés deux points

$$(1, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^1x_i = \sqrt[3]{n} x_i, \\ {}^2x_i = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left\{ D^2 x_i + \frac{1}{3} \frac{Dn}{n} D x_i + \left[ \frac{1}{18} \left( \frac{Dn}{n} \right)^2 - k \right] x_i \right\} \end{array} \right. \\ (i = 1, 2, 3).$$

Nous dirons que l'équation

$$(1, 9) \quad ({}^1x_2 {}^2x_3 - {}^1x_3 {}^2x_2) x_1 + ({}^1x_3 {}^2x_1 - {}^1x_1 {}^2x_3) x_2 + ({}^1x_1 {}^2x_2 - {}^2x_1 {}^1x_2) x_3 = 0$$

définit *la normale projective* de la courbe K au point  $t$  <sup>(3)</sup>.

Soit enfin

$$(1, 10) \quad z(t) = |n|^{-\frac{2}{3}} \left[ k + \frac{1}{3} \frac{D^2 n}{n} - \frac{7}{18} \cdot \left( \frac{Dn}{n} \right)^2 \right].$$

L'expression  $z(t)$  est complètement définie par la courbe K et par le point  $t$  et ne change pas pendant la transformation projective.

Cette expression est *la courbure projective* en point  $t$  de la courbe K <sup>(4)</sup>.

Le présent Mémoire est consacré à la recherche de la signification géométrique de la notion de courbure projective que nous venons de définir.

## 2. Soient

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(u), \quad (a < t < b), \quad (a_1 < u < b_1)$$

<sup>(1)</sup> E. ČECH, *Projektivní diferenciální geometrie*, Praha, 1936, p. 220. Dans la suite nous désignerons ce livre par E. ČECH, *P. D. G.*

<sup>(2)</sup> Une courbe qui satisfait à la condition (1, IV) n'a pas dans  $\langle a, b \rangle$  de point sextactique. Voir, E. ČECH, *P. D. G.*, p. 225.

<sup>(3)</sup> E. ČECH, *P. D. G.*, p. 229.

<sup>(4)</sup> E. ČECH, *P. D. G.*, p. 233.

les équations des courbes  $K_x(t)$ ,  $K_y(u)$  qui satisfont aux conditions (1,I)-(1,IV) et qui possèdent le point  $t_0(u_0)$  en commun.

Supposons que les équations suivantes soient vérifiées :

$$(2,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i(t_0) = y_i(u_0) \quad (a < t_0 < b; a_1 < u_0 < b_1), \\ \left( \frac{dx_i}{dt^x} \right)_{t=t_0} = \left( \frac{dy_i}{du^y} \right)_{u=u_0} \quad (x = 1, \dots, 7; i = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Nous dirons que les courbes  $K_x$ ,  $K_y$  ont au point commun un contact au moins d'ordre sept (ou un contact huit-ponctuel) (1). On a ce théorème :

*Les courbures projectives des courbes  $K_x$ ,  $K_y$  au point commun  $t_0(u_0)$  sont identiques.*

La démonstration est trop simple.

3. Soit  $K(t)$  une courbe plane qui satisfait en point  $t = t_0$  aux conditions (1,I)-(1,IV). Soit  $K_1(u)$  une cubique qui possède le point  $t = t_0$  [ $u = u_0$ ], en commun avec la courbe  $K(t)$  et qui satisfait en  $t = t_0$  aux équations (1,I)-(1,IV) et (2,1). On peut démontrer cette proposition :

*La courbe  $K_1$  appartient au faisceau des cubiques qui, excepté les cubiques unicursales avec le point double en  $t = t_0$ , satisfont aux conditions (1,I)-(1,IV) et aux équations (2,1). Alors, les cubiques du faisceau mentionné qui n'ont pas le point double au point considéré et la courbe  $K(t)$  ont au point commun  $t = t_0$  un contact au moins d'ordre sept (huit-ponctuel).*

*Démonstration.* — Nous chercherons la cubique  $K_1(u)$ .

Supposons la courbe  $K(t)$  donnée par les équations

$$(3,1) \quad x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

et supposons qu'on ait

$$(3,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0, \quad x_3(t_0) = 1, \\ \left( \frac{dx_1}{dt} \right)_{t_0} = 1, \quad \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_{t_0} = 0, \quad \left( \frac{dx_3}{dt} \right)_{t_0} = 0, \\ \left( \frac{d^2x_1}{dt^2} \right)_{t_0} = 0, \quad \left( \frac{d^2x_2}{dt^2} \right)_{t_0} = 1, \quad \left( \frac{d^2x_3}{dt^2} \right)_{t_0} = 0. \end{array} \right.$$

---

(1) E. ČECH, P. D. G., p. 114.

Soient ensuite

$$(3,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d^{\alpha} x_i}{dt^{\alpha}} \right)_{t_0} = a_i^{(\alpha)} \quad (i = 1, 2, 3; \alpha = 3, \dots, 7), \\ y_i = y_i(u) \quad (i = 1, 2, 3), \end{array} \right.$$

les équations paramétriques de la cubique  $K_1(u)$ , où  $y_i(u)$  satisfont identiquement à l'équation

$$(3,4) \quad F(y_1, y_2, y_3) \equiv \Lambda y_1^3 + y_1^2(B y_2 + C y_3) + y_1(D y_2^2 + E y_2 y_3 + F y_3^2) + G y_2^3 + H y_2^2 y_3 + I y_2 y_3^2 + K y_3^3 = 0,$$

pour n'importe quelle valeur d'un paramètre  $u$ .

Si nous substituons les valeurs (3,2) pour  $\left( \frac{d^{\beta} y_i}{du^{\beta}} \right)_{u_0}$ ,

$$\left( \beta = 0, 1, \dots, 7; \frac{d^{\beta} y_i}{du^{\beta}} = y_i \right)$$

dans les équations

$$(3,5) \quad \left( \frac{d^k F}{du^k} \right)_{u=u_0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, 7),$$

nous obtiendrons les relations suivantes :

$$(3,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = 0, \quad F = 0, \quad 2C + I = 0; \\ 6\Lambda + 3E + a_2^{(3)}I = 0, \quad 12B + 8a_4^{(3)}C + 4a_2^{(3)}E + 6H + a_2^{(4)}I = 0 \\ 60a_4^{(3)}A + 20a_2^{(3)}B + 10a_4^{(4)}C + 20a_3^{(3)}C + 30D + 10a_4^{(3)}E \\ \quad + 5a_2^{(4)}E + 20a_2^{(3)}H + a_2^{(5)}I + 20a_3^{(3)}I = 0, \\ 90a_4^{(3)}A + 120a_4^{(3)}B + 30a_2^{(4)}B + 20[a_4^{(3)}]^2C + 12a_4^{(5)}C \\ \quad + 30a_3^{(3)}C + 120a_2^{(3)}D + 15a_4^{(4)}E + 20a_4^{(3)}a_2^{(3)}E + a_2^{(6)}I \\ \quad + 40a_2^{(3)}a_3^{(3)}I + 30a_3^{(4)}I = 0; \\ 420[a_4^{(3)}]^2A + 126a_4^{(3)}A + 210a_4^{(4)}B + 280a_4^{(3)}a_2^{(3)}B + 42a_2^{(5)}B \\ \quad + 70a_4^{(3)}a_4^{(4)}C + 280a_4^{(3)}a_3^{(3)}C + 42a_3^{(5)}C + 14a_4^{(6)}C + 21a_4^{(5)}E \\ \quad + 35a_4^{(4)}a_2^{(3)}E + 35a_4^{(3)}a_2^{(4)}E + 140a_2^{(3)}a_3^{(3)}E + 105a_3^{(4)}E \\ \quad + 7a_2^{(6)}E + 210a_4^{(3)}D + 210a_2^{(4)}D + 140[a_2^{(3)}]^2D + 630a_2^{(3)}G \\ \quad + 210a_3^{(3)}H + 42a_2^{(5)}H + 70a_2^{(3)}a_2^{(4)}H + a_2^{(7)}I + 70a_2^{(4)}a_3^{(3)}I \\ \quad + 70a_2^{(3)}a_3^{(4)}I + 42a_3^{(5)}I = 0. \end{array} \right.$$

Dans le cas général le système (3,6) a la solution

$$(3,7) \quad \Lambda = \Lambda_1 \lambda_1 + \Lambda_2 \lambda_2, \quad B = B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2, \quad \dots, \quad K = K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2,$$

où  $(A_1, \dots, K_1), (A_2, \dots, K_2)$  sont deux solutions linéairement indépendantes du système (3,6).

Alors la cubique  $K_1(u)$  appartient au faisceau

$$(3,8) \quad \lambda_1 {}^1K_1 + \lambda_2 {}^2K_2 = 0,$$

où  ${}^1K_1, {}^2K_2$  sont deux cubiques dont les équations ont les coefficients  $(A_1, \dots, K_1)$  resp.  $(A_2, \dots, K_2)$ .

Nous démontrerons maintenant que chaque cubique  $K_1(u)$  du faisceau (3,8) qui a le point général au point  $t = t_0$  de la courbe  $K(t)$ , a en  $t = t_0$  un contact au moins d'ordre sept avec  $K(t)$ .

Nous chercherons les points d'intersection des courbes  $K, K_1$  qui sont situés au voisinage du point  $t = t_0$ .

Si nous substituons aux fonctions  $y_i$  dans

$$(3,9) \quad K_1 \equiv \lambda_1 y_1^3 + \dots + \lambda_7 y_7^3 = 0$$

les développements

$$(3,10) \quad x_i(t) = x_i(t_0) + (t - t_0) x_i'(t_0) + (t - t_0)^2 \frac{x_i''(t_0)}{2!} + \dots$$

$(i = 1, 2, 3),$

où nous prenons les valeurs (3,2) pour les dérivées

$$(x_i')_0 = x_i'(t_0), \quad \dots,$$

nous aurons, en raison de (3,6) l'équation suivante :

$$(3,11) \quad (t - t_0)^8 [x_0 + x_1(t - t_0) + \dots] = 0.$$

Alors, nous obtenons l'équation

$$(3,12) \quad \left\{ \frac{d^x}{dt^x} K_1[x(t)] \right\}_{t=t_0} = 0 \quad (x = 0, 1, \dots, 7).$$

Or, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe algébrique  $K_1(y)$  et la courbe  $K(t)$  aient au point commun  $t = t_0$  un contact au moins d'ordre sept (ou huit-punctuel) (1). Par conséquent, les équations (2,1) et les conditions (1,IV) et (1,III) sont valables.

Puisque  $K_1$  est la cubique qui n'a pas le point double au

(1) E. ČECH, *P. D. G.*, p. 111, etc.

point  $t = t_0$  considéré les conditions (1,11) et (1,1) sont aussi valables au voisinage du point  $t = t_0$ . Nous parvenons ainsi au théorème énoncé plus haut.

*Remarques.* — 1° La courbe  $K(t)$  et les cubiques du faisceau (3,8), qui n'ont pas le point double en  $t = t_0$ , y possèdent la normale projective et la courbure projective en commun.

On déduit la preuve des paragraphes 2 et 3 et de la définition (1,9) de la normale projective.

2° La remarque précédente fait clairement voir le rôle de la courbure de  $K_1$  pour l'interprétation de la courbure de la courbe  $K$ . Alors, pour chercher l'interprétation géométrique de la courbure de  $K$  nous pouvons substituer à la courbe  $K$  n'importe quelle cubique elliptique du faisceau (3,8).

Nous allons le faire dans le paragraphe suivant.

4. Soit  $K_1$  une cubique elliptique réelle et soit  $o_3$  un point arbitraire de cette cubique qui n'est ni point d'inflexion ni point sextactique.

La tangente de la cubique en  $o_3$ , coupe cette courbe au point  $o_2$  et la tangente en  $o_2$  détermine sur cette courbe le point  $o_1$  comme le point d'intersection.

Soit  $o_1 o_2 o_3$  le triangle fondamental du système des coordonnées projectives  $y_1 : y_2 : y_3$ .

Ceci étant, nous pouvons écrire l'équation de la cubique

$$(4.1) \quad K_1 \equiv y_1^2 (By_2 + Cy_3) + y_1 (Ey_2 y_3 + Fy_3^2) + Hy_2^2 y_3 = 0,$$

où tous les coefficients sont réels et  $B \neq 0$ ,  $F \neq 0$ ,  $H \neq 0$  (1). Ensuite nous pouvons démontrer que :

*La normale projective de la cubique (4,1) en  $o_3$  est*

$$(4.2) \quad Ey_1 + Hy_2 = 0$$

*et la courbure projective en ce point est*

$$(4.3) \quad z_0 = -14 \frac{CH}{F^2} \left( \frac{F^2}{10BH} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1).$$

(1) Les conditions  $B \neq 0$ ,  $H \neq 0$  sont nécessaires pour que la cubique  $K_1$  ne soit pas dégénérée et la relation  $F \neq 0$  exprime que  $o_3$  n'est pas le point double.



*Démonstration.* — Au voisinage du point  $o_3$  les équations paramétriques de la cubique sont

$$(4,4) \quad y_1 = \frac{-2Eu - F + \Delta}{2(Eu + G)}, \quad y_2 = u, \quad y_3 = 1,$$

où

$$\Delta = + \sqrt{(Eu + F)^2 - 4Hu^2(Bu + G)}.$$

Nous obtiendrons au point considéré les dérivées suivantes :

$$(4,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0, \quad \left(\frac{dy_1}{du}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2y_1}{du^2}\right)_0 = -\frac{2H}{F}, \quad \left(\frac{d^3y_1}{du^3}\right)_0 = \frac{6EH}{F^2}, \\ \left(\frac{d^4y_1}{du^4}\right)_0 = -\frac{24H}{F^3}(E^2 + CH), \\ \left(\frac{d^5y_1}{du^5}\right)_0 = -\frac{120H}{F^4}(BFH - E^3 - 3CEH), \\ \left(\frac{d^6y_1}{du^6}\right)_0 = \frac{720H}{F^5}(3BEFH - BCE^2H - 2C^2H^2 - E^4), \\ \left(\frac{d^7y_1}{du^7}\right)_0 = \frac{5040H}{F^6}(-4BCFH^2 - 6BE^2FH + 10C^2EH^2 + 10CE^3H + E^5), \\ y_2 = 0, \quad \left(\frac{dy_2}{du}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^k y_2}{du^k}\right)_0 = 0 \quad (k = 2, 3, \dots), \\ y_3 = 1, \quad \left(\frac{d^l y_3}{du^l}\right)_0 = 0 \quad (l = 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

Les invariants unimodulaires  $k, n$  de la courbe  $K_1$  au point  $o_3$  sont, à cause de (4,5),

$$(4,6) \quad k_0 = \left(\frac{F}{2H}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{E^2 - 4CH}{2F^2}, \quad n_0 = \frac{5B}{F} \quad (1),$$

et leurs dérivées en ce point sont

$$(4,7) \quad (Dn)_0 = 15 \left(\frac{F}{2H}\right)^{\frac{4}{3}} \frac{BE}{F^2}, \quad (D^2n)_0 = 45 \left(\frac{F}{2H}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{B(E^2 - 4CH)}{F^3} \quad (2).$$

Ensuite les équations (1,8), (1,2), (4,5), (4,6) et (4,7) donnent

$$(4,8) \quad ({}^1x_1 : {}^1x_2 : {}^1x_3)_0 = 0 : 0 : 1, \quad ({}^2x_1 : {}^2x_2 : {}^2x_3)_0 = -FH : EF : CE.$$

(1) Ici (et aussi dans la suite) on doit prendre la valeur principale pour la troisième racine.

(2) Dans ce cas les notions considérées au point  $o_3$  sont désignées par l'indice 0.

Il s'ensuit l'équation (4,2) de la normale projective de la cubique  $K_1$  en  $o_3$ .

L'équation (1,9) en raison de (4,6) et (4,7) donne la courbure projective cherchée de la courbe  $K_1$  au point  $o_3$ , à savoir

$$\kappa_0 = -14 \frac{CH}{F^2} \left( \frac{F^2}{10BH} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad \text{C. Q. E. D.}$$

3. Considérons encore la courbe  $K_1$  donnée par (4,1) et soient

$$(5.1) \quad \begin{cases} y_1 = F \varphi^2 (E \varphi + H), \\ y_2 = F \varphi (E \varphi + H), \\ y_3 = -[(CE - BF)\varphi^3 + (CH + E^2)\varphi^2 + 2EH\varphi - H] \end{cases}$$

les équations paramétriques de la courbe  $K_2$ .

On peut démontrer ceci :

1° La courbe  $K_2$  est la cubique unicursale qui a en  $o_3$  le point double.

2° Les tangentes de la courbe  $K_2$  au point double  $o_3$  sont :  $T_1$  qui est la tangente de la courbe  $K_1$  en  $o_3$  et  $N_1$  qui est la normale projective de  $K_1$  en  $o_3$ .

3° Les courbes  $K_1$  et  $K_2$  possèdent en  $o_3$  huit points (sur neuf points d'intersection) en commun. La branche de la courbe  $K_2$ , qui touche  $K_1$  dans le point  $o_3$ , a un contact au moins d'ordre six (ou sept-ponctuel) avec la courbe  $K_1$ .

4° Le neuvième point d'intersection  $h$  des cubiques  $K_1$  et  $K_2$  est le troisième point tangent du point  $o_3$  sur la courbe  $K_1$  (1).

5° Soient  $i_1, i_2, i_3$  les points d'inflexion de la cubique  $K_2$  et soient  $(T_1 N_1 H J_k)$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), les birapports des droites  $T_1, N_1, H \equiv o_3 h, J_k \equiv o_3 i_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) du faisceau  $o_3$ , et soit, enfin,  $\kappa_0$  la courbure projective de la courbe  $K_1$  en  $o_3$ . Nous avons l'équation très intéressante

$$(5.2) \quad \kappa_0^3 = -\frac{14^3}{10^2} \cdot (T_1 N_1 H I_1) (T_1 N_1 H I_2) (T_1 N_1 H I_3),$$

---

(1) Le premier point tangent du point général de la cubique est le point d'intersection de la cubique avec sa tangente construite au point pris en considération. Le  $r$ ième ( $r \geq 2$ ) point tangent du point générale de la cubique est le point d'intersection de la cubique avec sa tangente construite au  $(r-1)$ ème point tangent du point mentionné.

c'est-à-dire : la troisième puissance de la courbure projective de la cubique  $K_1$  au point général égale, au facteur numérique  $\left(-\frac{14^3}{100}\right)$  près, le produit des birapports  $(T_1 N_1 H I_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

*Démonstration.* — a. Les équations paramétriques (5,1) nous montrent que la courbe  $K_2$  est la cubique unicursale avec le point double  $o_3$ . Les paramètres de ce point sont

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -\frac{H}{E}.$$

Les tangentes en  $o_3$  ont les équations

$$(5,3) \quad y_1 = 0, \quad E y_1 + H y_2 = 0.$$

Ces équations avec (4,1) et (4,2) démontrent le premier et le second théorème énoncé plus haut.

b. Les points communs des cubiques données par (5,1) et (4,1) ont leurs paramètres déterminés par l'équation

$$(5,4) \quad v^7(Ev + H)[(BF - CE)v - CH] = 0.$$

Il s'ensuit

$$(5,5) \quad v_1 = v_2 = \dots = v_7 = 0, \quad v_8 = -\frac{H}{E}, \quad v_9 = \frac{CH}{BF - CE}$$

( $BF - CE \neq 0$ ) (1).

Alors les valeurs  $v_1$  jusqu'à  $v_8$  appartiennent au point  $o_3$ . L'équation (5,4) peut être écrite de la manière suivante :

$$\left\{ \frac{d^2}{dv^2} [K_1[y(v)]] \right\}_{v=0} \quad (\alpha = 1, \dots, 6).$$

Or, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que les cubiques  $K_1$  et  $K_2$  aient au point  $o_3$ , qui est le point double de  $K_2$ , un contact au moins d'ordre sept (ou huit-punctuel) (2).

(1) Voir (4,1).

(2) Il est évident que la branche (mentionnée plus haut) de la courbe  $K_2$  a en  $o_3$  un contact au moins d'ordre six avec la courbe  $K_1$ . (La définition de ce contact se trouve au paragraphe 2.) Alors les courbes  $K_1, K_2$  ont en  $o_3$  un contact au moins d'ordre sept (huit-punctuel). Le cas échéant on doit appliquer la définition la plus générale du contact, à savoir la définition du contact des courbes algébriques au point double. (Voir E. ČECH, *P. D. G.*, p. 224.)

C'est le troisième théorème.

Le neuvième point d'intersection  $h$  a le paramètre  $\nu_9 = \frac{CH}{BF - CE}$   
et ses coordonnées sont

$$(5,6) \quad (y_1 : y_2 : y_3)_h = C^2 H : (CE - BF)C : (CE - BF)B.$$

Les coordonnées du point d'intersection de la tangente en  $o_1$  [il y aura  $(y_1 : y_2 : y_3)_h$ ], c'est-à-dire

$$By_2 + Cy_3 = 0,$$

à  $K_1$ , avec la même courbe (4,1), sont déterminées par

$$y_1 : y_2 : y_3 = C^2 H : (CE - BF)C : (CE - BF)B;$$

c'est précisément l'équation (5,6).

Alors le point  $h$  est le premier point tangent du point  $o_1$  de  $K_1$ . Car dans le triangle choisi  $o_1 o_2 o_3$  le point  $o_1$  est le premier point tangent du point  $o_2$  et le point  $o_2$  est le premier point tangent du point  $o_3$ , le point  $h$  est le troisième point tangent du point  $o_3$ .

C'est le théorème IV.

c. Étant donnée la courbe (5,1) nous désignerons par  $\nu$  le paramètre du point d'inflexion de cette courbe. Soient ensuite  $T_1$  la tangente  $y_1 = 0$  et  $N_1$  la tangente  $E y_1 + H y_2 = 0$  de la cubique  $K_2$  en  $o_3$  et enfin soit  $H \equiv o_3 h$ ,  $I \equiv o_3 i$ .

Cela étant, on peut construire le birapport

$$(5,7) \quad (T_1 N_1 H I) = \frac{C(H + E\nu)}{BF\nu}.$$

On constate facilement à l'aide de l'équation du troisième degré

$$(5,8) \quad (BFH - E^2)\nu^3 - 3E^2 H \nu^2 - 3EH^2 \nu - H^3 = 0$$

qui donne les paramètres  $\nu_i$  des points d'inflexion  $i_1, i_2, i_3$  de la courbe (5,1), que cette quantité est invariante par la transformation du paramètre sur la courbe  $K_2$ .

Ensuite on peut construire le produit

$$(5,9) \quad (T_1 N_1 H I_1)(T_1 N_1 H I_2)(T_1 N_1 H I_3) = \frac{C^3(H + E\nu_1)(H + E\nu_2)(H + E\nu_3)}{B^3 F^3 \nu_1 \nu_2 \nu_3},$$

où  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  sont les solutions de l'équation (5,8).

Si nous substituons les valeurs bien connues de (5,8) aux fonctions symétriques des racines dans (5,9), nous obtiendrons immédiatement

$$(5,10) \quad (T_1 N_1 H I_1)(T_1 N_1 H I_2)(T_1 N_1 H I_3) = \frac{C^3 H}{F^2 B^2}.$$

Il s'ensuit en raison de (4,3) pour la courbure de la courbe (5,1) en  $o_3$  l'expression

$$(5,11) \quad \kappa_{o_3} = -\frac{14}{\sqrt[3]{100}} \sqrt[3]{(T_1 N_1 H I_1)(T_1 N_1 H I_2)(T_1 N_1 H I_3)}$$

que nous voulions obtenir.

*Appendice.* — Si nous nous reportons aux paragraphes et remarques précédentes, nous pouvons énoncer au sujet de l'interprétation de la courbure d'une courbe générale  $K$  le théorème suivant :

*Soient*

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

*les équations paramétriques de la courbe  $K$  et soit  $o$  un point général (qui n'est ni point singulier ni point d'inflexion et ni point sextactique) arbitrairement choisi sur  $K$  et enfin soient  $x_i$  les fonctions régulières au voisinage de  $o$ .*

*Soit  $K_1$  n'importe quelle cubique elliptique, qui a en  $o$  un contact au moins d'ordre sept (ou huit-ponctuel) avec  $K$ , et soit  $K_2$  la cubique unicursale, qui touche au point double la normale projective de  $K_1$  et qui a en  $o$  un contact d'ordre sept avec  $K_1$ .*

*Soit  $h$  le neuvième point (le point de Halphen) commun aux courbes  $K_1$  et  $K_2$ , soient  $i_1, i_2, i_3$  les points d'inflexion de la cubique  $K_2$  et soient  $T_1, N_1$  ses tangentes en  $o$ . Le produit des birapports  $(T_1, N_1, H I_k)$  des droites  $T_1, N_1, oh, oi_k, (k = 1, 2, 3)$  égale, au facteur multiplicatif  $\left(-\frac{14^3}{100}\right)$  près, la troisième puissance de la courbure projective de la courbe  $K$  en  $o$ .*

---