BULLETIN DE LA S. M. F.

ERVIN FELDHEIM

Sur la stabilité des lois de probabilité à deux variables

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 209-212

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__209_0>

SUR LA STABILITÉ DES LOIS DE PROBABILITÉ A DEUX VARIABLES.

PAR M. ERVIN FELDHEIM
(Budapest).

M. Khintchine a démontré ([1]) que la classe des lois à corrélation normale est la seule classe finie, *stable*, et de coefficient de corrélation R différent de ± 1.

Nous donnerons ici une nouvelle démonstration, très simple, de ce théorème, basée sur la notion de la fonction caractéristique.

Exprimons d'abord les propriétés exigées des lois en question.

Une loi de probabilité sera dite *finie*, lorsque les moments du second ordre existent et sont différents de zéro. La loi sera *stable*, lorsque le couple de variables aléatoires $(x' + x'', y' + y'')$ suivra une loi de la même classe que les couples (x', y'), (x'', y''), qui suivent, par hypothèse des lois de la même classe.

Considérons deux lois de probabilité à deux variables, ayant respectivement les fonctions de répartition (ou fonctions des probabilités totales) $F(x, y)$ et $G(x, y)$, liées par la relation

$$F(ax + by, cx + dy) = G(x, y), \tag{1}$$

a, b, c et d étant des constantes réelles, choisies d'une façon convenable.

On a dans ce cas

$$F(x, y) = \int\int_{I} d_2 G(\xi, \eta), \tag{2}$$

où le domaine d'intégration I est défini par les inégalités

$$a\xi + b\eta < x, \quad c\xi + d\eta < y.$$

Si l'on peut admettre l'existence des lois élémentaires, les den-

---

([1]) *Über die Stabilität zweidimensionaler Verteilungsgesetze.* (*Rec. Math.*, 35; 1. 1928, p. 19).

sités de probabilité correspondantes satisferont à la relation

$$g(x, y) = kf(ax + by, cx + dy), \tag{3}$$

avec $k = |ad - bc|$.

Introduisons maintenant la fonction caractéristique, définie par l'équation

$$\varphi(u, v) = \iint e^{i(ux+vy)} d_2 G(x, y), \tag{4}$$

l'intégration étant étendue à tout le plan.

Désignons par $\Phi(u, v)$ la fonction caractéristique de la loi, qui admet $F(x, y)$ pour fonction des probabilités totales.

On peut établir la relation

$$\Phi(u, v) = \varphi(au + cv, bu + dv).$$

La formule (1) donne, en effet, pour $F(x, y)$ l'expression

$$F(x, y) = G\left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{ay - cx}{ad - bc}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= \iint e^{i(ux+vy)} d_2 F(x, y)\\ &= \iint e^{i(ux+vy)} d_2 G\left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{ay - cx}{ad - bc}\right).\end{aligned}$$

Le changement de variables

$$\xi = \frac{dx - by}{ad - bc}, \qquad \eta = \frac{ay - cx}{ad - bc}.$$

est de déterminant *un*, par suite,

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= \iint e^{i[(a\xi+b\eta)u+(c\xi+d\eta)v]} d_2 G(\xi, \eta)\\ &= \iint e^{i[(au+cv)\xi+(bu+dv)\eta]} d_2 G(\xi, \eta) = \varphi(au + cv, bu + dv).\end{aligned}$$

Soit alors $G(x, y)$ la fonction de répartition d'une loi appartenant à une classe finie, stable, et de coefficient de corrélation R différent de ± 1. Cette loi de probabilité est caractérisée par cinq constantes : les moments du premier et du second ordre x_0, y_0, σ, σ_1, et le coefficient de corrélation R. Les variables seront supposées centrées et réduites, c'est-à-dire

$$(5) \qquad x_0 = \iint x\, d_2 G(x, y) = 0, \qquad y_0 = \iint y\, d_2 G(x, y) = 0,$$

$$(6) \qquad \sigma^2 = \iint x^2\, d_2 G(x, y) = 1, \qquad \sigma_1^2 = \iint y^2\, d_2 G(x, y) = 1.$$

Admettons encore, sans diminuer la généralité, que

$$(7) \qquad R = \iint xy\, d_2 G(x, y) = 0.$$

Cette hypothèse introduit seulement une nouvelle relation entre les constantes qui figurent dans l'expression de la fonction de répartition, et simplifie notablement la démonstration, tout en conservant son caractère général.

Le théorème de M. Khintchine s'exprime alors par l'égalité

$$(8) \qquad G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

ou ce qui revient au même

$$(9) \qquad \varphi(u, v) = e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

On va considérer, pour la démonstration, n couples de variables indépendantes (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, satisfaisant toutes à la loi de $G(x, y)$ et soit $F(x, y)$ la fonction de répartition de la loi du couple

$$(10) \qquad X = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Si l'on désigne encore par $\Phi(u, v)$ la fonction caractéristique de la loi de $F(x, y)$, on aura, à cause de la stabilité,

$$(11) \qquad \Phi(u, v) = \varphi(au + cv, bu + dv),$$

pour des constantes a, b, c, d choisies d'une façon convenable.

Si $n \to \infty$, on a, d'après un résultat connu,

$$(12) \qquad \left| \Phi(u, v) - e^{-\frac{n}{2}(u^2+v^2)} \right| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, arbitrairement petit.

Posons

$$a = \sqrt{n}\,\alpha, \qquad b = \sqrt{n}\,\beta, \qquad c = \sqrt{n}\,\gamma, \qquad d = \sqrt{n}\,\delta.$$

La formule (12) donne alors, en tenant compte de la relation (11)

$$\left| \varphi(\alpha u + \gamma v,\ \beta u + \delta v) - e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

On sait, par définition de la fonction caractéristique, que

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^2 &= \iint x^2 d_2 F(x, y) = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\right]_{\substack{u=0\\v=0}}, \\ \sigma_1^2 &= \iint y^2 d_2 F(x, y) = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right]_{\substack{u=0\\v=0}}, \end{aligned} \right. \tag{14}$$

$$R = \iint x y\, d_2 F(x, y) = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\right]_{\substack{u=0\\v=0}}. \tag{15}$$

Pour la loi $F(x, y)$, on a

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 = n, \qquad R = 0,$$

ce qui résulte des relations (10).

On tire alors de (14) et (15)

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\right]_{\substack{u=0\\v=0}} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right]_{\substack{u=0\\v=0}} = -n, \qquad \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\right]_{\substack{u=0\\v=0}} = 0.$$

Eu égard à ce que

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right]_{\substack{u=0\\v=0}} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right]_{\substack{u=0\\v=0}} = -1, \qquad \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right]_{\substack{u=0\\v=0}} = 0.$$

la formule (11) permet d'établir les relations

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad \gamma^2 + \delta^2 = 1, \qquad \alpha\gamma + \beta\delta = 0. \tag{16}$$

Elles montrent que les quantités α, β, γ, δ forment une substitution orthogonale

$$(\alpha u + \gamma v)^2 + (\beta u + \delta v)^2 \equiv u^2 + v^2.$$

de sorte que (13) revient à écrire

$$\left| \varphi(u, v) - e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

équivalent à (9).