CHRISTIAN PAUC

Recherche des ensembles denses dans un ensemble *M* donné appartenant à un espace topologique

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 220-230
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__220_0>

RECHERCHE DES ENSEMBLES DENSES DANS UN ENSEMBLE M DONNÉ APPARTENANT A UN ESPACE TOPOLOGIQUE ;

PAR M. CHR. PAUC.

Dans cette note, nous supposerons connues les notions fondamentales de la théorie des espaces abstraits, telles qu'elles sont exposées dans les ouvrages : FRÉCHET, *Espaces abstraits* (1928) et HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).

Il nous faut cependant préciser deux points :

Nous considérerons un espace comme déterminé par l'ensemble H de ses points que nous appellerons son support et par une opération de fermeture $\mathfrak{F}$ faisant correspondre à tout sous-ensemble E de H un ensemble $\mathfrak{F}(E) \geqq E$; un tel espace sera désigné par la notation $[H, \mathfrak{F}]$. Pour simplifier l'écriture nous poserons habituellement $\mathfrak{F}(E) = \overline{E}$.

Un point sera dit en contact avec E lorsqu'il appartiendra à la fermeture de E.

Lorsqu'il s'agira d'un espace $\mathfrak{V}$, c'est-à dire lorsque l'opération $\mathfrak{F}$ sera non décroissante nous supposerons toujours que les voisinages d'un point contiennent ce point (Axiome A d'Hausdorff); un point sera alors en contact avec un ensemble E de cet espace, lorsque chacun de ses voisinages contiendra au moins un point de E.

Généralités sur les suites transfinies. — Nous appellerons suite transfinie illimitée une correspondance $e = g(\xi)$ attribuant à tout nombre ordinal ξ, y compris $\xi = 0$, un élément bien déterminé e: ces éléments e seront dits : éléments de la suite. Nous représenterons une suite illimitée $\mathfrak{S}$ par la notation

$$\mathfrak{S} : e_0 e_1 e_2 \ldots e_\xi \ldots$$

e_ξ étant l'élément que g fait correspondre à ξ ; ξ sera dit son indice.

Nous désignerons par $\mathfrak{S}_\xi$ la suite $\mathfrak{S}$ limitée à l'ordre ξ, c'est-à-dire la correspondance définie seulement sur les nombres ordinaux ξ' précédents ξ et identique à g sur ceux-ci; nous la représenterons par

$$\mathfrak{S}_\xi : e_0 e_1 e_2 \ldots e_{\xi'}, \ldots (\xi' < \xi).$$

Se donner une suite illimitée c'est se donner la correspondance g; habituellement une suite $\mathfrak{S}$ sera considérée comme donnée lorsque nous connaîtrons :

1. Son élément initial e_0;
2. La loi de récurrence : $e_\xi = \zeta(\mathfrak{S}_\xi)$ qui permettrait en supposant construits tous les éléments d'indice $< \xi$, de construire à son tour l'élément e_ξ.

Suites exponentielles. — Considérons une opération φ faisant correspondre à tout sous-ensemble P d'un ensemble M un autre de ses sous-ensembles et satisfaisant constamment à l'une des deux relations

$$\varphi(P) \geqq P \text{ (relation } a\text{)}, \qquad \varphi(P) \leqq P \text{ (relation } b\text{)}.$$

Donnons-nous un sous-ensemble P_0 de M et considérons la suite

$$P_0 P_1 \ldots P_\xi \ldots,$$

dont les termes sont des ensembles de M et qui est définie par la loi de récurrence :

$$P_\xi = \sum_{S_\xi} \varphi(P_{\xi'}),$$

dans le cas où φ satisfait à la relation a,

$$P_\xi = \prod_{S_\xi} \varphi(P_{\xi'}),$$

dans le cas où φ satisfait à la relation b.

S_ξ désignant l'ensemble des nombres ordinaux ξ' précédant ξ.

Nous conviendrons d'écrire $P_\xi = \varphi^\xi(P_0)$; P_0 étant un ensemble quelconque $\leqq$ M nous venons de définir sur les ensembles P de M une opération φ^ξ dite : puissance $\xi^{ième}$ de l'opération φ et satisfaisant comme φ à la relation a ou à la relation b. La légitimité de l'expression employée résulte des formules

$$\varphi^{\xi_2}[\varphi^{\xi_1}(P)] = \varphi^{\xi_1+\xi_2}(P)$$
$$(\varphi^{\xi_1})^{\xi_2}(P) = \varphi^{\xi_1 \xi_2}(P),$$

analogues à celles concernant les exposants ordinaires.

La suite : P_0. P_1,, . . . , P_ξ, . . . est dite une suite exponentielle d'ensembles.

THÉORÈME. — *Soit* $P_\xi = \varphi^\xi(P)$ *le terme général d'une suite exponentielle d'ensembles, sous-ensembles d'un ensemble* M*; à partir d'un certain rang les termes de cette suite deviennent identiques à un ensemble qu'on peut désigner par* $\Phi(P)$. *Quand* P *varie dans* M, $\Phi(P)$ *constitue la solution la plus générale de l'équation*

$$\Phi(X) = X.$$

Nous voyons que dans le cas où φ satisfait à la relation *a* ou à la relation *b* nous venons d'indiquer une méthode de résolution de l'équation $\varphi(X) = X$.

Par analogie avec ce qui se fait en Analyse classique, nous l'appellerons *méthode des approximations successives*.

Ensemble dense dans un ensemble M. — Étant donné un espace $[H, \mathcal{F}]$ et deux ensembles X et M de cet espace, nous dirons que X est dense sur M lorsque tout point de M est en contact avec X, ceci se traduit par l'inclusion

$$M \leqq \overline{X}$$

équivalente à

$$M = M.\overline{X}.$$

Si X est de plus contenu dans M, il sera dit dense dans M.

Un ensemble dense partout est un ensemble dense dans H, il est caractérisé par

$$\overline{X} = H.$$

Il n'y a pas de différence essentielle entre un ensemble dense partout et un ensemble dense dans un sous-ensemble M de H; considérons en effet l'espace $[M; f]$ de support M et dont l'opération de fermeture est définie par

$$f(P) = M.\overline{P}.$$

Un ensemble dense dans M relativement à l'espace [H, $\mathcal{F}$] est dense partout relativement à l'espace [M, f].

L'espace [M, f] jouit de propriétés communes avec l'espace [H, $\mathcal{F}$] : si [H, $\mathcal{F}$] est un espace $\mathcal{V}$, [M, f] l'est aussi et l'on peut prendre comme voisinages d'un point quelconque m de M, les intersections par M des voisinages V_m relatifs à l'espace [H, $\mathcal{F}$].

Recherche des ensembles X *denses dans un ensemble* M *donné*. — Un ensemble M de l'espace [H, $\mathcal{F}$] étant donné, soit à chercher les ensembles X denses dans M. D'après ce que nous venons de dire, il reviendrait au même de chercher les ensembles X partout denses dans l'espace [M, f]; ce point de vue entraînerait quelques simplifications d'écriture; nous nous contenterons de l'avoir présent à l'esprit.

Supposons que l'espace [H, $\mathcal{F}$] soit un espace $\mathcal{V}$; $\mathcal{F}$ est alors une opération non décroissante.

Cherchons les ensembles X parmi les sous-ensembles P de M : donnons-nous-en un, soit P. ; pour voir s'il satisfait à la condition $\overline{X} \geqq M$, formons $M - \overline{P_0}$.

Si $M - P_0$ est vide, cette condition est vérifiée pour $X = P_0$, P_0 est dense dans M. Sinon extrayons un point p_1 de $M - \overline{P_0}$ et formons $P_1 = P_0 + \{p_1\}$; P_1 est encore un sous-ensemble de M. De $P_1 > P_0$, nous déduisons $\overline{P_1} \geqq \overline{P_0}$; il est possible que P_1 soit $\geqq M$: vérifions-le en formant $M - \overline{P_1}$.

Si $M - \overline{P_1}$ est vide, P_1 est dense dans M. Si non prenons un point p_2 dans $M - \overline{P_1}$ et formons $P_2 = P_1 + \{p_2\}$, et ainsi de suite.

D'une façon générale soit ψ une correspondance définie sur les sous-ensembles P de M de la manière suivante :

Si P est non vide

$$\psi(P) = \{p\}$$

p étant un élément appartenant à P.

Si P est l'ensemble vide V;

$$\psi(V) = V.$$

Considérons la suite illimitée $\mathfrak{S}$,

$$\mathfrak{S} : P_0 P_1 \ldots, P_\xi \ldots,$$

définie par la loi de récurrence suivante :

Si ξ est de première espèce

$$P_\xi = P_{\xi-1} + \psi(M - \overline{P}_{\xi-1}).$$

Si ξ est de deuxième espèce

$$P_\xi = \sum_{S_\xi} P_{\xi'},$$

S_ξ désignant l'ensemble des nombres ordinaux ξ' précédant ξ.

Nous pourrions étudier directement la suite $\mathfrak{S}$; il est plus simple de remarquer que si l'on introduit l'opération φ définie sur les sous-ensembles P de M par

$$\varphi(P) = P + \psi(M - \overline{P}),$$

elle satisfait à la condition $\varphi(P) \geqq P$ et fait correspondre à tout sous-ensemble de M un sous-ensemble de M; la suite $\mathfrak{S}$ n'est autre que la suite exponentielle

$$P_\xi = \varphi^\xi(P_0).$$

C'est une suite croissante jusqu'à un certain indice, à partir duquel tous ses termes deviennent égaux à $\Phi(P_0)$ et $\Phi(P_0)$ représente pour P_0 variant dans M la solution la plus générale de l'équation

$$X = \varphi(X),$$

et l'on vérifie aisément que celle-ci équivaut à la double inclusion

$$X \leqq M \leqq \overline{X},$$

qui caractérise les ensembles X denses dans M; $\Phi(P)$ où P est un sous-ensemble quelconque de M représente l'ensemble le plus général dense dans M.

En somme nous avons naturellement été conduits à remplacer une double inclusion par une équation à laquelle s'applique immédiatement la méthode des approximations successives.

Remarquons que l'hypothèse que l'espace est un espace $\mathcal{V}$ ne nous a servi que pour justifier l'introduction de la résolution : grâce à celle-ci la suite des fermetures $\overline{P_\xi}$ est non décroissante, et ainsi en formant les ensembles successifs de $\mathfrak{S}$, nous pouvons espérer une amélioration progressive. Mais sans cette hypothèse l'équivalence entre : $X \leqq M \leqq \overline{X}$ et $X = \varphi(X)$, subsiste et la résolution s'effectue de la même façon.

D'autre part l'opération φ fait intervenir une correspondance de Zermelo arbitraire; il pourra être intéressant de choisir ψ de façon à obtenir des solutions remarquables. C'est ce que nous allons faire de manière indirecte dans le cas où l'espace est un espace $\mathcal{E}$.

Cas d'un espace $\mathcal{E}$. (Pour la définition d'un espace $\mathcal{E}$, *voir* Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 214). — Supposons que l'espace $[H, \mathcal{F}]$ soit un espace $\mathcal{E}$; nous désignerons par $\overline{xy}$ l'écart de deux points x et y de H, par $S_\rho(h)$ l'ensemble des points x tels que $\overline{hx} < \rho$, h étant un point fixé de H et ρ un nombre positif donné; $S_\rho(h)$ sera dit sphéroïde de centre h et de rayon ρ.

D'après le théorème sur l'équivalence des familles de voisinages (Fréchet, *loc. cit.*, p. 173) nous pouvons prendre pour chaque point de h une famille dénombrable de voisinages à savoir :

$$S_{\rho_1}(h)\, S_{\rho_2}(h) \ldots S_{\rho_n}(h) \ldots,$$

$\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_n, \ldots$, étant une suite de nombres positifs tendant vers o.

Introduisons en vue de la démonstration un espace auxiliaire $\mathcal{E}_\rho = [H, \mathcal{F}_\rho]$; c'est un espace dont les points sont ceux de H, et où chacun d'eux ne possède qu'un seul voisinage : le sphéroïde centré sur lui et de rayon ρ; on pourrait évidemment lui adjoindre les sphéroïdes concentriques de rayon $> \rho$, mais ceci n'est pas nécessaire. Pour simplifier l'écriture nous poserons,

$$\mathcal{F}_\rho(E) = E_\rho.$$

E désignant un sous-ensemble quelconque de H.

Lemme I. — *La fermeture* E_ρ *d'un ensemble* E *de* H, *dans l'espace* $\mathcal{E}_\rho$ *est la réunion des sphéroïdes de* $S_\rho(e)$ *de rayon* ρ, *et ayant comme centres les points de* E,

$$E_\rho = \sum_{E} S_\rho(e),$$

en particulier h étant un point de H,

$$\{h\}_\rho = S_\rho(h).$$

Lemme II. — $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, *désignant une suite de nombres positifs convergeant vers* o.

$$\overline{E} = E_{\rho_1} . E_{\rho_2} \ldots, E_{\rho_n}, \ldots.$$

Demandons-nous ce que sera un ensemble dense dans M sous-ensemble de H relativement à l'espace $\mathcal{E}_\rho$: X_ρ étant un tel ensemble, il faudra que, pour tout point m de M, $S_\rho(m)$ contienne au moins un point de X_ρ, c'est-à-dire que, quelque soit m de M, il existe un point de X_ρ dont l'écart avec m soit $< \rho$.

Pour construire ces ensembles X_ρ, nous considérerons l'opération φ_ρ définie sur les sous-ensembles P de M par

$$\varphi_\rho(P) = P + \psi(M - P_\rho),$$

ψ étant toujours la correspondance introduite plus haut. Nous partirons d'un sous-ensemble P_0 quelconque de M et nous formerons la suite

$$P_\xi = \varphi_\rho^\xi(P_0).$$

Soit $\Phi_\rho(P_0)$ l'ensemble auquel ses termes finissent par devenir identiques; P_0 variant dans M, $\Phi_\rho(P_0)$ représente l'ensemble le plus général dense dans M relativement à l'espace $\mathcal{E}_\rho$.

Lemme III. — $X_1 X_2 \ldots X_n \ldots$ *désignant des ensembles denses dans* M *respectivement par rapport aux espaces* $\mathcal{E}_{\rho_1}$, $\mathcal{E}_{\rho_2}$, ..., $\mathcal{E}_{\rho_n}$, ... ($\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \ldots$ *suite de nombres positifs* $\to 0$) *l'ensemble*

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots,$$

est dense dans M (*sous-entendu par rapport à l'espace* $\mathcal{E}$).

Appelons avec Hausdorff ensemble totalement borné dans un espace $\mathcal{E}$ un ensemble tel que, quel que soit $\rho > 0$, on puisse le recouvrir avec un nombre fini de sphéroïdes de rayon ρ. Le lemme III a pour corollaire :

Théorème. — *Dans un espace* $\mathcal{E}$ *tout ensemble totalement borné est séparable.*

Passons donc maintenant à la recherche des ensembles X denses dans un sous-ensemble donné M de H. Nous pourrions d'après le lemme III faire la réunion

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots$$

d'ensembles denses dans M, par rapport aux espaces $\mathcal{E}_{\rho_1}$, $\mathcal{E}_{\rho_2}, \ldots,$ $\mathcal{E}_{\rho_n}, \ldots$ respectivement, ensembles que nous savons déterminer d'après le lemme II. Nous allons plutôt mettre en évidence une solution particulière qui nous fournira des renseignements intéressants; soit m_0 un point de M, définissons la suite dénombrable

$$M_0 M_1 \ldots M_n \ldots,$$

de la façon suivante :

$$M_0 = \{m_0\} \quad \text{et} \quad M_n = \Phi_{\rho_n}(M_{n-1});$$

$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \ldots$ désignant toujours une suite de nombres positifs convergeant vers o.

Nous obtenons une suite non décroissante d'ensembles et M_n est dense dans M relativement à $\mathcal{E}_{\rho_n}$, d'après le sens que nous avons donné à Φ_ρ.

L'écart entre les différents points de M_n est $> \rho_n$; M_n est isolé c'est-à-dire qu'il ne contient aucun de ses points d'accumulation. Posons

$$M_\omega = M_0 + M_1 \ldots + M_n + \ldots,$$

d'après le lemme III, M_ω est dense dans M.

Disons qu'un ensemble appartenant à un espace quelconque jouit de la propriété $\mathfrak{T}_1$ lorsque chacun de ces sous-ensembles non dénombrables a au moins un point d'accumulation.

Théorème. — *Dans un espace $\mathcal{E}$ tout ensemble jouissant de la propriété $\mathfrak{T}_1$ est séparable et inversement.*

Conséquence : *Dans un espace $\mathcal{E}$ tout ensemble condensé en soi* (Définition : Fréchet, *loc. cit.*, p. 174) *est séparable.*

Cas d'un espace D. — En plus de ce que nous venons d'affirmer concernant les espaces $\mathcal{E}$ nous pouvons énoncer les résultats suivants : Tout ensemble M_n de la suite précédemment définie est non seulement isolé mais divergent, c'est-à-dire qu'il n'a pas de points d'accumulation ou que son dérivé est vide. *Il n'existe pas d'ensemble de puissance inférieure à celle de* M_ω *dense dans* M.

Disons qu'un ensemble appartenant à un espace quelconque jouit de la propriété $\mathfrak{T}$ lorsqu'aucun de ses sous-ensembles non dénombrables n'est divergent.

Théorème. — *Dans un espace $\mathcal{D}$ tout ensemble jouissant de la propriété $\mathfrak{T}$ est séparable et inversement.*

Conséquences : *Dans un espace $\mathcal{D}$ tout ensemble compact est séparable* (Fréchet, *loc. cit.*, p. 268); *la séparabilité, la propriété $\mathfrak{T}$ et la propriété $\mathfrak{T}_1$ sont équivalentes.*

Théorème. — *Dans tout espace $\mathcal{E}$ séparable, si* E *désigne un ensemble non dénombrable il existe une suite non croissante* : $E_1 E_2 \ldots E_n \ldots$ *de sous-ensembles de* E *ayant même puissance que* E *et tel que chacun soit contenu dans un sphéroïde de rayon* ρ_n, ρ_n *tendant vers* 0 *quand* n *augmente indéfiniment.*

Conséquence : *Dans un espace $\mathcal{D}$ séparable et complet* (Fréchet, *loc. cit.*, p. 74), *tout ensemble non dénombrable a un point d'accumulation maximée* (Fréchet, *loc. cit.*, p. 192).

Familles g_M et Γ_M. — Revenons à la considération de la suite M_1, $M_2, \ldots, M_n, \ldots$; si ν désigne un point quelconque de M_n nous avons vu que

$$(M_n)_\rho = \sum_{M_n} S_{\rho_n}(\nu) \geqq M.$$

Nous dirons qu'une famille d'ensembles $\mathcal{F}(F)$ occupe un ensemble M quand

$$\sum_{\mathcal{F}} F \geqq M.$$

Dans notre cas, il en est ainsi de la famille des sphéroïdes $S_{\rho_n}(\nu)$ pour ρ_n fixé; mais remarquons qu'il n'en serait plus de même si on lui en retirait un seul d'entre eux soit $S_{\rho_n}(\nu_0)$; du fait que les distances mutuelles des points de M_n sont $> \rho_n$, le point ν_0 n'appartient qu'au sphéroïde $S_{\rho_n}(\nu_0)$. Nous pouvons dire de ce dernier qu'il contient le point ν_0 « en propre ».

Nous désignerons par g_M une famille d'ensembles occupant M, telle que $g_M - \{G\}$ n'occupe plus M quel que soit G appartenant à g_M. Sous une forme intuitive, une famille g_M est une famille occupant M et dont tous les ensembles sont indispensables pour assurer l'occupation. Nous venons de voir que : dans un espace $\mathcal{E}$ tout ensemble M peut être occupé par une famille g_M de sphéroïdes de rayon ρ dont les centres appartiennent à M.

D'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles occupant un ensemble M on ne peut pas toujours extraire une famille g_M, ainsi si M est la demi-droite Ox et $\mathcal{F}$ la famille des intervalles fermés OA, A désignant un point quelconque de la demi-droite.

Nous appellerons famille Γ_M une famille d'ensembles couvrant M (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 176) dont chaque ensemble est indispensable pour assurer le recouvrement, c'est-à-dire telle que, quel que soit G de Γ_M, la famille $\Gamma_M - \{G\}$ ne recouvre plus M.

THÉORÈME. — *Dans un espace* $\mathcal{V}$ *accessible* (Fréchet, *loc. cit.*, p. 185), *si tout sous-ensemble de puissance supérieure ou égale à un nombre cardinal donné* μ, *d'un ensemble* M *a au moins un point d'accumulation appartenant à* M, *alors toute famille de type* Γ_M *est de puissance* $< \mu$.

Cas particulier : *Si* M *est compact en soi, toute famille* Γ_M *est finie; si* M *est condensé en soi toute famille* Γ_M *est au plus dénombrable.*

Nous dirons qu'une famille $\mathcal{F}'$ est dérivée d'une famille $\mathcal{F}$ lorsqu'elle est constituée par des ensembles qui sont sous-ensembles de ceux de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME. — *Dans un espace* $\mathcal{V}$ *accessible, si* M *est un ensemble tel que de toute famille* $\mathcal{F}$ *le couvrant, on puisse dériver une famille de type* Γ_M, *alors :*

si M *est compact en soi, il sera parfaitement compact en soi;*

si M *jouit de la propriété* $\mathcal{C}_1$ *il jouira de la propriété de Lindelöf* (FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 176) *et d'ailleurs inversement.*

THÉORÈME. — *Dans un espace* $\mathcal{E}$ *où les sphéroïdes sont ouverts, tout ensemble compact en soi est parfaitement compact en soi; tout ensemble jouissant de* $\mathcal{C}_1$, *jouit de la propriété de Lindelöf.*

Comme exemple d'espace $\mathcal{E}$ à sphéroïdes ouverts, nous avons les espaces $\mathcal{E}$ ou l'écart de deux points est une fonction continue de chacun deux (espaces à métrique continue de Menger). Sur un ensemble M compact en soi d'un tel espace, l'écart est régulier, c'est-à-dire : il existe une fonction $f(\Theta)$ tendant vers zéro avec Θ telle que, quels que soient les points m_1, m_2, m_3 de M, les inégalités

$$\overline{m_1 m_2} < \Theta, \quad \overline{m_1 m_3} < \Theta$$

entraînent $\overline{m_1 m_3} < f(\Theta)$; d'après un théorème de Chittenden (Fréchet, *loc. cit.*, p. 219), M peut être distancié sans altération de sa topologie interne. Mais tout espace $\mathcal{D}$ compact en soi est parfaitement compact en soi (Fréchet, *loc. cit.*, p. 269); nous obtenons dans un cas particulier une vérification partielle du dernier théorème.