BULLETIN DE LA S. M. F.

VICTOR THÉBAULT

Sur les sphères de Lemoine du tétraèdre

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 67-77
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__67_0>

SUR LES SPHÈRES DE LEMOINE DU TÉTRAÈDRE;

Par M. V. Thébault.

Tennie (Sarthe).

Les parallèles aux côtés d'un triangle menées par le point de Lemoine (point de concours des symédianes), rencontrent les côtés en six points d'un cercle (premier cercle de Lemoine), et les antiparallèles aux côtés, dans les angles opposés, coupent les côtés en six points d'un autre cercle (second cercle de Lemoine).

J. Neuberg a signalé les premières analogies du point et des cercles de Lemoine avec les points et les sphères de Lemoine du tétraèdre. Mais le géomètre belge s'est borné au cas particulier du tétraèdre dont les produits des arêtes opposées sont égaux pour les trois couples d'arêtes (tétraèdre isodynamique) (1).

Dans un tétraèdre général $T \equiv ABCD$, deux points K et L (premier et second points de Lemoine) correspondent au point du même nom du triangle. Les coordonnées normales de K sont proportionnelles aux aires A, B, C, D des faces (2), tandis que celles de L sont proportionnelles aux rayons R_a, R_b, R_c, R_d des cercles (O_a), (O_b), (O_c), (O_d), circonscrits aux faces BCD, CDA, DAB, ABC (3). Des sphères de Lemoine relatives au point K (4) et au point L (5) ont été signalées. Nous voudrions tâcher d'épuiser le sujet et présenter ainsi une vue d'ensemble sur les plus récentes recherches de la géométrie du tétraèdre.

Le tétraèdre ABCD a pour sommets les points A, B, C, D; on désigne suivant l'usage par V et a, b, c, a', b', c', le volume et les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC, et par (O) la sphère circonscrite de centre O et de rayon R.

---

(1) *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884, pp. 16 à 21 et 33 à 36.

(2) Simon Lhuillier, *Éléments d'analyse*, p. 297.

(3) V. Thébault, *Journal de Vuibert*, 1921, p. 156 et *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, 1922, p. 173; J. Neuberg avait signalé le point L dans le tétraèdre isodynamique, *loc. cit.*

(4) V. Thébault, *Comptes rendus*, 1941, pp. 327 et 367.

(5) P. Delens, *Comptes rendus*, 1941, p. 1151.

I. SPHÈRES ASSOCIÉES AU PREMIER POINT K DE LEMOINE.

Les six arêtes d'un tétraèdre quelconque $T \equiv ABCD$ forment les quadrangles gauches

$$Q \equiv ABCD, \qquad Q' \equiv ACDB, \qquad Q'' = ADBC.$$

Quatre plans non concourants et respectivement perpendiculaires aux côtés de Q, Q', Q'' déterminent trois tétraèdres dont les aires des faces sont proportionnelles aux côtés des quadrangles correspondants. Ainsi, les plans perpendiculaires sur les côtés AB, BC, CD, DA de Q en A, B, C, D forment un tétraèdre $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ dont les aires des faces sont proportionnelles à AB, BC, CD, DA, et l'on obtient les tétraèdres analogues $T_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$, $T_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$ associés à Q', Q''. Les arêtes $(A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1)$, $(A_2C_2, \ldots, B_2A_2)$, $(A_3D_3 \ldots, C_3A_3)$ des quadrangles gauches $Q_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$, $Q_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$, $Q_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$ sont respectivement perpendiculaires aux faces (A, B, C, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C) de T.

Comme les distances du centre O de la sphère circonscrite à T aux quatre plans des faces des tétraèdres T_1, T_2, T_3 sont égales à $\left(\frac{AB}{2}\right)$, $\left(\frac{BC}{2}\right)$, $\left(\frac{CD}{2}\right)$, $\left(\frac{DA}{2}\right)$, ..., *le centre* O *coïncide avec le premier point de Lemoine de chacun des tétraèdres* T_1, T_2, T_3. Donc, à chacun des quadrangles gauches Q, Q', Q'' correspond un tétraèdre $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'_2$, $\mathcal{T}'_3$, inscrit à T, dont les plans des faces sont perpendiculaires aux quatres côtés. *Les sphères circonscrites aux tétraèdres* $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'_2$, $\mathcal{T}'_3$ *ont pour centre commun le premier point de Lemoine* K *du tétraèdre* T (secondes sphères de Lemoine). *Ces trois sphères se réduisent à une seule quand le tétraèdre* T *est* orthocentrique (1).

En effet, les tétraèdres $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'_2$, $\mathcal{T}'_3$, homothétiques à T_1, T_2, T_3, mettent en évidence les quadrangles gauches

$$Q'_1 \equiv A'_1B'_1C'_1D'_1, \qquad Q'_2 \equiv A'_2C'_2D'_2B'_2, \qquad Q'_3 \equiv A'_3D'_3B'_3C'_3,$$

inscrits à T et homothétiques à Q, Q', Q'', qui ont les côtés égaux et dont les sphères circonscrites ont pour centre K.

(1) V. Thébault, *loc. cit.*

On amène par translation $A'_2 C'_2$ à coïncider avec $A'_1 B'_1$, de façon que le tétraèdre $\mathcal{T}'_2 = A'_2 C'_2 D'_2 B'_2$ prenne la position $A'_2 \equiv A''_1 B'_1 \equiv C''_2 D''_2 B''_2$.

Le centre de la sphère $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ est à l'intersection de la perpendiculaire au plan $C'_1 D'_1 A'_1$ menée par le centre du cercle $C'_1 D'_1 A'_1$. De même, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $A''_2 C''_2 D''_2 B''_2$ est à l'intersection des perpendiculaires élevées par les centres des cercles circonscrits aux triangles $A''_2 C''_2 D''_2$ et $C''_2 B''_2 D''_2$ aux plans de ces triangles. Comme les triangles $A'_1 B'_1 C'_1$ et $A''_2 C''_2 B''_2$ sont coplanaires et que les triangles $C'_1 D'_1 A'_1$ et $C''_2 D''_2 B''_2$ sont équipollents, les rayons des sphères $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ et $A''_2 C''_2 D''_2 B''_2$ (ou $A'_2 C'_2 D'_2 B'_2$) ne seront égaux que si les plans $C'_1 D'_1 A'_1$ et $C''_2 D''_2 B''_2$ sont perpendiculaires au plan $B'_1 C'_1 A'_1 B''_2$, c'est-à-dire, en revenant à la figure primitive, que si les plans $A'_1 B'_1 C'_1$ et $C'_1 D'_1 A'_1$ sont rectangulaires de même que les plans $A'_2 C'_2 B'_2$ et $C'_2 D'_2 B'_2$, ce qui exige en définitive que les arêtes opposées AB, CD de T soient rectangulaires. Dès lors, *deux des sphères circonscrites aux tétraèdres $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'_2$, $\mathcal{T}'_3$ se réduisent à une seule si un couple d'arêtes opposées du tétraèdre* T *sont rectangulaires*, et *si ce tétraèdre est* orthocentrique, *les sphères circonscrites aux tétraèdres $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'_2$, $\mathcal{T}'_3$ coïncident.*

N. B. — Lorsque T est orthocentrique, $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'_2$, $\mathcal{T}'_3$ ont deux dièdres opposés droits et les perpendiculaires communes aux deux couples d'arêtes n'appartenant pas aux dièdres droits sont rectangulaires.

Rayon ρ_1 de la sphère circonscrite au tétraèdre $\mathcal{T}'_1$. — En posant

$$B'_1 C'_1 = a_1, \qquad D'_1 A'_1 = a'_1, \qquad C'_1 A'_1 = b_1, \qquad D'_1 B'_1 = b'_1,$$
$$A'_1 B'_1 = c_1, \qquad D'_1 C'_1 = c'_1,$$

on a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 \\ 1 & a_1^2 & 0 & a_1'^2 & b_1'^2 \\ 1 & b_1^2 & a_1^2 & 0 & c_1'^2 \\ 1 & c_1^2 & b_1'^2 & c_1'^2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & c_1'^2 & a_1^2 \\ c_1'^2 & 0 & b_1^2 \\ b_1'^2 & a_1'^2 & c_1^2 \\ a_1^2 & b_1^2 & 0 \end{vmatrix},$$

de sorte que

$$\rho_1^2 = -\frac{\Delta_2}{2\Delta_1},$$

en vertu des relations

$$\Delta_1 = 288\,V_1'^2, \qquad -\Delta_2 = 576\,V_1'^2\,\rho_1^2,$$

V_1' étant le volume du tétraèdre $\mathfrak{T}_1'$.

II. SPHÈRES ASSOCIÉES AU SECOND POINT L DE LEMOINE.

1. Les plans parallèles aux faces du tétraèdre ABCD menées par un point arbitraire P de l'espace coupent respectivement les arêtes

(AB, AC, AD), (BA, BC, BD), (CA, CB, CD), (DA, DB, DC),

en des **points**

(X, Y, Z), (X′, T, U), (Y′, T′, V), (Z′, U′, V′).

Pour que les douze points X, X′, Y, Y′, . . . , V, V′ soient sur une même sphère, il faut et il suffit qu'on ait, à la fois (1),

$$AX.AX' = AY.AY' = AZ.AZ', \qquad BX.BX' = BT.BT' = BU.BU',$$
$$CY.CY' = CT.CT' = CV.CV', \qquad DZ.DZ' = DU.DU' = DV.DV'.$$

Quand il en est ainsi, il résulte des expressions des longueurs des segments rectilignes AX, AX′, . . . , en fonction des coordonnées normales absolues x, y, z, t de P et des éléments du tétraèdre ABCD, que l'on a

$$Bc^2y = Cb^2z = Da'^2t, \qquad Ac^2x = Ca^2z = Db'^2t,$$
$$Ab^2x = Ba^2y = Dc'^2t, \qquad Aa'^2x = Bb'^2y = Cc'^2z,$$

puis, à **la fois**,

$$aa' = bb' = cc'$$

et

$$Ax:By:Cz:Dt = ab'c':bc'a':ca'b:abc = AR_a:BR_b:CR_c:DR_d.$$

Donc, ***étant donné un tétraèdre quelconque*** **ABCD,** ***il n'est,***

---

(1) V. Thébault, *Mathesis*, 1928, p. 32.

en général, pas possible de déterminer un point de l'espace tel que les plans parallèles aux faces menés par ce point coupent les arêtes en douze points d'une même sphère. Ce point existe dans le tétraèdre isodynamique et coïncide avec le second point L *de Lemoine.*

2. Les parallèles aux arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC d'un tétraèdre quelconque ABCD, menées par un point arbitraire P de l'espace, rencontrent les faces qui ne contiennent pas ces arêtes en des points (X, X'), (Y, Y'), (Z, Z'), (T, T'), (U, U'), (V, V'). Pour que ces douze points soient sur une même sphère, il faut que l'on ait, en grandeur et en signe,

$$PX.PX' = PY.PY' = PZ.PZ' = PT.PT' = PU.PU' = PV.PV',$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad a^2 x_b x_c = b^2 x_c x_a = c^2 x_a x_b = a'^2 x_d x_a = b'^2 x_d x_b = c'^2 x_d x_c,$$

x_a, x_b, x_c, x_d étant les coordonnées barycentriques absolues du point P, par rapport au tétraèdre ABCD.

Quand il en est ainsi, on a, à la fois,

$$aa' = bb' = cc' \qquad \text{et} \qquad x_a : x_b : x_c : x_d = AR_a : BR_d : CR_c : DR_d.$$

Le tétraèdre ABCD est isodynamique et P coïncide avec le second point de L Lemoine. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car dans le tétraèdre isodynamique les parallèles aux arêtes menées par L percent les faces qui ne contiennent pas ces arêtes en douze points d'une même sphère (1). Dés lors, *étant donné un tétraèdre quelconque* ABCD, *il n'est en général pas possible de déterminer un point de l'espace tel que les parallèles aux arêtes menées par ce point percent les faces qui ne contiennent pas ces arêtes en douze points d'une même sphère. Ce point existe dans le tétraèdre isodynamique où il coïncide avec le second point* L *de Lemoine.*

3. Des sommets d'un tétraèdre quelconque ABCD, comme centres, on décrit les sphères (A, *l*), (B, *m*), (C, *n*), (D, *p*), de

(1) J. Neuberg, *loc. cit.*

rayons l, m, n, p. Les plans radicaux des sphères (O) et (A), (O) et (B), (O) et (C), (O) et (D) coupent respectivement les arêtes

$$(AB, AC, AD), \quad (BA, BC, BD), \quad (CA, CB, CD), \quad (DA, DB, DC),$$

en des points

$$(X, Y, Z), \quad (X', T, U), \quad (Y', T', V), \quad (Z', U', V').$$

Les plans XYZ, X'TU, Y'T'V, Z'U'V' forment un tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ homothétique au tétraèdre tangentiel $A_2B_2C_2D_2$ du tétraèdre ABCD. Le centre d'homothétie Q est le point de concours des plans que les arêtes du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ déterminent avec les points où les arêtes du tétraèdre ABCD sont rencontrées par les plans céviens dans ce tétraèdre du point P dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles à l^2, m^2, n^2, p^2. Le rapport d'homothétie étant égal à

$$k = 1 - \frac{1}{6V_2R}(A_2l^2 + B_2m^2 + C_2n^2 + D_2p^2),$$

(A_2, B_2, C_2, D_2 et V_2, aires des faces et volume de $A_2B_2C_2D_2$), pour que les plans des sphères (O) et (A), (O) et (B), (O) et (C), (O) et (D) concourent au point Q, il faut et il suffit que l'on ait

$$A_2l^2 + B_2m^2 + C_2n^2 + D_2p^2 = 6V_2R.$$

Dans le cas particulier où

$$l^2 = \lambda a'bc, \qquad m^2 = \lambda b'ca, \qquad n^2 = \lambda c'ab, \qquad p^2 = \lambda a'b'c',$$

λ étant un coefficient positif arbitraire, *les points* P *et* Q *sont confondus avec le second point* L *de Lemoine du tétraèdre* ABCD.

Lorsque l, m, n, p varient proportionnellement, les points A_1, B_1, C_1, D_1 décrivent les droites A_2Q, B_2Q, C_2Q, D_2Q, le centre radical ω des sphères $(A, \lambda l)$, $(B, \lambda m)$, $(C, \lambda n)$, $(D, \lambda p)$ parcourt la droite OQ et l'on a

$$O\omega_1 : O\omega_2 = \lambda_1 : \lambda_2, \qquad A_2A_1 : A_0A_{12} = B_2B_1 : B_2B_{12} = \ldots = \lambda_1 : \lambda_2,$$

λ_1, λ_2 étant deux valeurs du coefficient λ.

Pour que les douze points X, X', Y, Y', ..., V, V' soient sur une même sphère, il faut et il suffit qu'on ait, à la fois,

$$AX.AX' = AY.AY' = AZ.AZ', \quad BX.BX' = BT.BT' = BU.BU',$$
$$CY.CY' = CT.CT' = CV.CV', \quad DZ.DZ' = DU.DU' = DV.DV'.$$

Les plans XYZ, X'TU, Y'T'V, Z'U'V' étant les transformés de la sphère (O) dans les inversions (A, l^2), (B, m^2), (C, n^2), (D, p^2), quand il en est ainsi, on a

$$m:c = n:b = p:a', \quad l:c = n:a = p:b',$$
$$l:b = m:a = p:c', \quad l:a' = m:b' = n:c',$$

puis, à la fois,

(2) $$aa' = bb' = cc'$$

et

(3) $$l^2\, ab'c' = m^2\, bc'a' = n^2\, ca'b' = p^2\, abc,$$

ou encore

(4) $$l^2\, AR_a = m^2\, BR_b = n^2\, CR_c = p^2\, DR_d.$$

Donc, *pour que les douze points* X, X', Y, Y', ..., V, V *déterminés sur les arêtes du tétraèdre* ABCD *par les plans radicaux de la sphère circonscrite* (O) *associée successivement aux sphères* (A, l), (B, m), (C, n), (D, p), *soient sur une même sphère* (ω'), *il faut et il suffit, en vertu de* (2), *que le tétraèdre soit isodynamique et qu'en outre les conditions, équivalentes entre elles,* (3) *et* (4) *soient remplies.*

Le centre de la sphère (ω') coïncide avec le centre radical ω des sphères (A, l), (B, m), (C, n), (D, p). *La sphère* $(\omega) = (X, X', \ldots, V, V')$ *est une sphère de Tücker du tétraèdre isodynamique* ABCD *et son centre, qui est aussi celui de l'une des sphères tangentes aux faces du tétraèdre* $A_1B_1C_1D_1$, *est sur la droite* OL. Si $\omega \equiv L$, c'est-à-dire quand

$$\lambda = \frac{6V_2R}{A_2\, a'bc + B_2\, b'ca + C_2\, c'ab + D_2\, a'b'c'},$$

la sphère (ω) *des douze points est une sphère de Lemoine, de centre* L, *du tétraèdre isodynamique* ABCD.

N. B. — En vertu des égalités (1) et d'un théorème connu (1), la distance $LO = d$ de L au centre O de la sphère (O) circonscrite à un tétraèdre quelconque ABCD est

$$d = \left[R^2 - \frac{aa'bb'cc'(aa' + bb' + cc')}{(\Sigma ab'c')^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque le tétraèdre ABCD est isodynamique,

$$d = \left[R^2 - \frac{3(aa')^4}{(\Sigma ab'c')_2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le rayon ρ_2 de la sphère de Lemoine (§ 2) dont le centre est au tiers de LO à partir de L, a pour valeur

$$\rho_2 = \frac{1}{3}\left[R^2 + \frac{3(aa')^4}{\Sigma(ab'c')^4} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}[2R^2 - d^2]^{\frac{1}{2}},$$

et les expressions

$$\rho_1 = \frac{1}{3}\left[4R^2 + \frac{3(aa')^4}{(\Sigma ab'c')^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\left[17R^2 - d^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_3 = \frac{(aa')^2\sqrt{3}}{2\Sigma ab'c'} = \frac{1}{2}(R^2 - d^2)$$

des rayons des sphères de Lemoine mentionnées aux paragraphes 1 et 3, dont le centre de la première est aux deux tiers de LO à partir de L et celui de la seconde au point L, en résultent immédiatement, car (2)

$$\rho_1 = \frac{1}{3}[4R^2 + \rho_2^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{3}[R^2 + 4\rho_3^2]^{\frac{1}{2}},$$

4. Les plans radicaux des sphères (O) et (A, l), (O) et (B, m), (O) et (C, n), (O) et (D, p) découpent dans les trièdres (A), (B), (C), (D) d'un tétraèdre quelconque ABCD, quatre triangles semblables entre eux XYZ, X'TU, Y'T'U, Z'U'V' et les droites (XY, Y'T', TX'), ..., forment des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$ homothétiques aux triangles tangentiels des triangles ABC, BCD, CDA, DAB. Le tétraèdre $I_aI_bI_cI_d$ ayant pour sommets les points

---

(1) V. Thébault, *Mathesis*, 1914, p. 232.

(2) J. Neuberg, *loc. cit.* Le géomètre belge demandait une expression de ρ_3.

de contact de l'une des sphères tangentes aux plans des faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ dont le centre ω est le centre radical des sphères (A, l), ..., (D, p), est le transformé du tétraèdre ABCD par l'homothétie (Q, k), [3], et le point ω se projette sur les plans des faces du tétraèdre ABCD au centre de l'un des cercles tritangents (I'_a), (I'_b), (I'_c), (I'_d) des triangles $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$.

Lorsque

$$l^2 = \lambda a'bc, \qquad m^2 = \lambda b'ca, \qquad n^2 = \lambda c'ab, \qquad p^2 = \lambda a'b'c',$$

$P \equiv Q \equiv L$, les triangles XYZ, X'TU, YT'V, Z'U'V' sont égaux entre eux et si l'on suppose, pour fixer les idées, que ω est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, les centres de leurs cercles inscrits coïncident avec les points I_a, I_b, I_c, I_d sur $AL \equiv AQ$, $BL \equiv BQ$, $CL \equiv CQ$, $DL \equiv DQ$. Les cercles inscrits (I_a) et (I'_d) aux triangles XYZ et $\alpha\beta\gamma$ touchent XY en un même point M; de sorte que *les cercles* (I_a), (I_b), (I_c), (I_d), *inscrits aux triangles* XYZ, X'TU, Y'T'V, Z'U'V', *sont sur une sphère* (1), *de centre* ω, *de rayon* ωM *qui contient aussi les cercles* (I'_a), (I'_b), (I'_c), (I'_d) *inscrits aux triangles* $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$ (sphère de Tücker). Si $\omega \equiv L$ [3], *la sphère* $(\omega \equiv L)$ *est la seconde sphère de Lemoine* (OU DES COSINUS) *du têtraèdre* ABCD (2).

Posant $L\omega : LO = m$, le carré du rayon de la sphère (ω) a pour expression

$$\rho^2 = (1 - m)^2 R^2 \operatorname{tang}^2\psi + m^2 R^2 \qquad \left(\operatorname{tang}\psi = \frac{12V}{\Sigma ab'c'}\right) \quad (3).$$

En particulier pour la sphère de Lemoine $(\omega \equiv L)$, où $m = 0$,

$$\rho = R \operatorname{tang}\psi,$$

et cette sphère coupe les faces BCD, CDA, DAB, ABC suivant les cercles (I'_a), (I'_b) (I'_c), (I'_d) de rayons $OO_a \operatorname{tang}\psi$, $OO_b \operatorname{tang}\psi$, $OO_c \operatorname{tang}\psi$, $OO_d \operatorname{tang}\psi$, c'est-à-dire sous des angles égaux à BOO_a, AOO_b, AOO_c, AOO_d.

---

(1) P. DELENS, *Comptes rendus*, loc. cit.

(2) P. DELENS, *ibid.*

(3) V. THÉBAULT, *Annales Soc. Scient. de Bruxelles*, loc. cit.

N. B. — La sphère inscrite, de centre I et de rayon r, touche les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre ABCD en A', B', C', D'. Une sphère (I, r') de rayon arbitraire $r' > r$, concentrique à (I), découpe sur les mêmes faces des cercles égaux (A'), (B'), (C'), (D') que les droites $(A'B, A'C, A'D), \ldots, (D'A, D'B, D'C)$ rencontrent respectivement entre B et A', C et A', D et A', ..., en des points (X_b, X_c, X_d), (Y_e, Y_d, Y_a), (V_d, Z_a, Z_b), (V_a, V_b, V_c). Les plans $X_a Y_a V_a$, $X_b Z_b V_b$, $X_c Y_c V_e$, $X_d Y_d Z_d$ forment un tétraèdre $A_1 B_1 C_1 D_1$ homothétique au tétraèdre $A'B'C'D'$. *Dans le tétraèdre* $A_1 B_1 C_1 D_1$, *la sphère* (I, r') *appartient à un système de Tücker d'axe* $O_1 I$, O_1 *étant le centre de la sphère circonscrite.* Si l'on construit les sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c) (ω_d) inscrites dans les trièdres (A), (B), (C), (D) du tétraèdre ABCD touchant respectivement les faces adjacentes en (Y_a, Z_a, V_a), (X_b, Z_b, V_b), (X_c, Y_c, V_c), (X_d, Y_d, V_d), *le centre radical de ces sphères est le second point* L_1 *de Lemoine du tétraèdre* $A_1 B_1 C_1 D_1$ *qui reste fixe lorsque* r' *varie; ces sphères sont orthogonales à une sphère de centre* L_1 *qui se réduit à son centre quand elles concourent en ce point et réciproquement.* De ce cas particulier, il résulte que *dans un tétraèdre quelconque* ABCD, *les plans menés par le second point de Lemoine* L *perpendiculaires aux droites* AI, BI, CI, DI *joignant les sommets* A, B, C, D *au centre* I *de la sphère inscrite, coupent les cônes de sommets* A, B, C, D *circonscrits à la sphère inscrite suivant quatre cercles situés sur une même sphère de centre* L (sphère d'Adams) (1).

(Manuscrit reçu le 2 août 1943.)

(1) R. BOUVAIST et V. THÉBAULT, *Comptes rendus*, 1940, p. 377.

ADDITION FAITE LORS DE LA CORRECTION DES ÉPREUVES.

5. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les projections du centre O de la sphère (O, R) sur les perpendiculaires $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d$ aux plans BCD, CDA, DAB, ABC menées par un point ω de la droite indéfinie LO, tel que $\overline{L\omega} : \overline{LO} = m$. Les cônes de révolution de sommets $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, d'axes $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d$ et d'angles $2x, 2y, 2z, 2t$ tels que $\operatorname{tang} x = (1 - m) \operatorname{tang} \psi - m \operatorname{tang} A, \ldots, \operatorname{tang} t = (1 - m) \operatorname{tang} \psi - m \operatorname{tang} D$, A, B, C, D étant les angles des plans BCD, CDA, DAB, ABC avec la sphère (O, R), découpent sur les plans des faces du tétraèdre ABCD quatre cercles situés sur une sphère (ω, ρ) dont le carré du rayon est

$$\rho^2 = (1 - m)^2 R^2 \operatorname{tang}^2 \psi + m^2 R^2,$$

et réciproquement (sphère de Tücker).

Si $m = \frac{1}{2}$, *les plans parallèles aux faces du tétraèdre* ABCD *menés par le point* L, *coupent les arêtes du tétraèdre* $A_1 B_1 C_1 D_1$, *transformé du tétraèdre tangentiel* $A_2 B_2 C_2 D_2$ *de* ABCD *par l'homothétie* $\left(L, \frac{1}{2}\right)$, *en douze points d'une sphère, de rayon* $\rho = \frac{R}{2} \operatorname{séc} \psi$, *centrée au milieu de* LO. (Première sphère de Lemoine) [1].

---

[1] Extrait d'une Note qui paraîtra aux *C. R. Acad. Sc.* (V. T.)