BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LALAN

Sur certaines équations fonctionnelles et les fondements de la géométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 55-67

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__55_0>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. V. LALAN.

1. Je me propose d'établir les trois équations fonctionnelles qui dominent la théorie des géométries euclidienne et non euclidienne, en m'appuyant exclusivement sur le fait que le plan admet un groupe de déplacements à trois paramètres. Toute famille continue de déplacements plans à un paramètre devient, quand on considère le paramètre comme une fonction du temps, un mouvement du plan sur lui-même; à toute transformation infinitésimale du groupe correspond de même une distribution de vitesses dans le plan. J'aurai à composer des transformations infinitésimales, c'est-à-dire, en langage cinématique, à composer des vitesses virtuelles, opération qui n'est qu'un cas particulier de l'*addition géométrique de vecteurs concourants*. Or on sait ([1]) que cette dernière opération relève de la géométrie générale; la règle de composition de vecteurs concourants peut se formuler indépendamment de toute prise de position vis-à-vis du postulatum d'Euclide. La règle du parallélogramme ne constitue pas la loi fondamentale; elle n'en est qu'un aspect particulier, valable seulement dans le cadre de la géométrie euclidienne. La loi fondamentale, valable dans la géométrie générale, se formule ainsi :

Si un vecteur $\overrightarrow{OV}$ *est décomposé en deux vecteurs concourants rectangulaires* $\overrightarrow{OV_1}$, $\overrightarrow{OV_2}$, *et si* α *désigne l'angle de* $\overrightarrow{OV}$ *avec* $\overrightarrow{OV_1}$, *on a*

$$OV_1 = OV\cos\alpha,\quad OV_2 = OV\sin\alpha. \tag{1}$$

([1]) E. PICARD, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 4.

Sachant en outre que la composition des vecteurs concourants est une *opération associative et commutative*, on peut construire, grâce à la loi précédente, la résultante d'un nombre quelconque de vecteurs concourants.

Il faut bien remarquer que V_1 n'est pas, en général, la projection orthogonale de V : cela n'a lieu qu'en géométrie euclidienne. OV n'est pas non plus, en général, la diagonale du parallélogramme construit sur OV_1 et OV_2 : ce parallélogramme n'est pas unique dans la géométrie de Lobatchewski, et n'existe pas dans la géométrie de Riemann.

2. La distribution des vitesses dans le plan glissant sur lui-même dépend de trois paramètres. On peut définir une telle distribution en se donnant les vitesses de deux points A et A', mais ces données, qui se traduisent par quatre égalités, ne seront pas en général compatibles. Le premier problème qui se pose est celui de déterminer la relation qui existe nécessairement entre les vitesses $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ des points A et A'.

Envisageons les trois mouvements particuliers suivants : en premier lieu, un mouvement de rotation autour de A; dans ce mouvement, A a une vitesse V_1 nulle, et A' une vitesse $\vec{V'_1}$ perpendiculaire à AA'. Ensuite, un mouvement de rotation autour de A', qui donne $\vec{V_2}$ perpendiculaire à AA' et V'_2 nulle. Enfin, un mouvement de glissement de la droite AA' sur elle-même, dans lequel $\vec{V_3}$ et $\vec{V'_3}$ sont égales et portées par AA'.

Toute distribution de vitesses peut être obtenue comme résultant de trois mouvements virtuels de cette nature :

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}, \qquad \vec{V'} = \vec{V'_1} + \vec{V'_2} + \vec{V'_3}.$$

Désignons par α et α' les angles que font respectivement $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ avec l'axe défini par AA'; nous avons d'après (1)

$$V \cos\alpha = V_3, \qquad V' \cos\alpha' = V'_3,$$

d'où

$$V \cos\alpha = V' \cos\alpha'. \tag{2}$$

Telle est la condition de compatibilité cherchée. Elle est bien connue en géométrie euclidienne : on voit qu'elle est valable en géométrie générale. Nous l'utiliserons pour obtenir les équations fonctionnelles que nous avons en vue; elle pourrait aussi être employée pour retrouver nombre de formules de géométrie non euclidienne.

I. — Glissement d'une droite sur elle-même.

3. Soit Ox la droite qui glisse sur elle-même avec la vitesse V_0. Par le point O, nous menons Oy, perpendiculaire à Ox, et sur Oy, nous prenons quatre points, A, A', B, B' symétriques deux à deux par rapport à O ($OA = OA' = a$, $OB = OB' = b < a$). Le point O ayant la vitesse V_0 perpendiculaire à Oy, la formule (2) exige que les vitesses V_A, $V_{A'}$, V_B, $V_{B'}$, soient pareillement perpendiculaires à Oy. Par raison de symétrie $V_{A'} = V_A$, $V_{B'} = V_B$. Quelle relation y a-t-il entre V_0 et V_A? La relation cherchée est nécessairement de la forme

$$V_A = V_0 \varphi(a), \tag{3}$$

où $\varphi(a)$ doit être une fonction paire, vérifiant $\varphi(0) = 1$. Nous allons établir l'équation fonctionnelle qui détermine $\varphi(a)$ en considérant deux mouvements virtuels et le mouvement résultant.

Le premier mouvement virtuel sera un mouvement de glissement sur elle-même, avec une vitesse V, de la droite Δ_A perpendiculaire en A à Oy; les vitesses des points O, B, B' sont perpendiculaires à Oy, d'après (2), et ont respectivement pour grandeurs, d'après (3) : $V\varphi(a)$, $V\varphi(a-b)$, $V\varphi(a+b)$. Le second mouvement virtuel sera un mouvement de glissement sur elle-même, avec la vitesse V, de la droite $\Delta_{A'}$, perpendiculaire en A' à Oy; les vitesses correspondantes de O, B, B', perpendiculaires à Oy, sont respectivement : $V\varphi(a)$, $V\varphi(a+b)$, $V\varphi(a-b)$.

Dans le mouvement résultant, nous aurons donc les vitesses suivantes, toutes perpendiculaires à Oy : pour O, $2V\varphi(a)$; pour B et pour B', $V[\varphi(a+b) + \varphi(a-b)]$.

Ainsi, ce mouvement résultant donne aux points B et B', symétriques par rapport à O, des vitesses égales et perpendiculaires à Oy; il comporte donc la même distribution de vitesses que si la droite Ox glissait sur elle-même. Donc, entre les vitesses de O et de B, on doit avoir, d'après (3), la relation $V_B = V_0 \varphi(b)$, ce qui donne

$$\varphi(a+b) + \varphi(a-b) = 2\varphi(a)\varphi(b). \tag{4}$$

C'est l'équation fonctionnelle bien connue, rencontrée d'abord par Poisson dans le problème de la composition des forces concourantes ([1]) et ensuite par E. Picard dans celui de la composition des forces parallèles en géométrie lobatchewskienne ([2]). Si l'on admet que $\varphi(a)$ est continue, l'équation (4) n'a que trois solutions

$$\varphi(a) \equiv 1, \qquad \varphi(a) = \cos\frac{a}{k}, \qquad \varphi(a) = \operatorname{Ch}\frac{a}{k} \qquad (k \text{ const.})$$

La solution $\varphi \equiv 1$ correspond à la géométrie euclidienne; le mouvement étudié est un mouvement de translation dans lequel tous les points du plan ont la même vitesse; la trajectoire de A est une droite Δ_A équidistante de Ox et parallèle à Ox. La solution $\varphi = \cos\frac{a}{k}$ correspond à la géométrie de Riemann; il existe alors sur Oy un point $P\left(OP = \frac{\pi}{2}k\right)$ dont la vitesse est nulle, si bien que le mouvement de glissement de Ox sur elle-même est aussi un mouvement de rotation autour de P; la trajectoire de A, équidistante de Ox, est un cercle de centre P; la droite Oy pivote autour de P. Dans cette géométrie, il n'y a pas de parallèles, puisque deux perpendiculaires à une même droite se rencontrent toujours.

La solution $\varphi = \operatorname{Ch}\frac{a}{k}$ conduit à la géométrie de Lobatchewski; k est le paramètre du plan. Quand la droite Ox glisse sur elle-même, les points situés en dehors de la droite ont une vitesse plus grande que ceux de la droite; leur trajectoire, qui est une courbe équidistante de Ox, n'est pas une droite; on l'appelle un *hypercycle*. L'hypercycle tourne sa concavité vers Ox, qui en est la *base*. En effet, considérons sur Ox les points P et P′ symétriques par rapport à O et élevons des perpendiculaires à Ox : $PQ = P'Q' = a$; les points Q et Q′ appartiennent à l'hypercycle.

([1]) S. D. Poisson, *Traité de Mécanique*, t. I, 2e éd., 1833, p. 47.
([2]) E. Picard, *loc. cit.*, p. 15.

La droite QQ' coupe OA en H, à angle droit par raison de symétrie. Joignons O à Q et appelons α l'angle POQ, et respectivement β et β' les angles de OQ prolongée avec la tangente à l'hypercycle et avec HQ prolongée. Quand Ox glisse sur elle-même avec la vitesse V, Q a la vitesse $V\varphi(a)$ portée par la tangente à l'hypercycle et la formule (2), appliquée au segment OQ, donne

$$V \cos\alpha = V\varphi(a)\cos\beta.$$

Quand $Q'Q$ glisse sur elle-même avec la vitesse V, O a la vitesse $V\varphi(OH)$, et la formule (2), appliquée encore au segment OQ donne

$$V\varphi(OH)\cos\alpha = V\cos\beta'.$$

La comparaison donne

$$\cos\beta' = \varphi(a)\,\varphi(OH)\cos\beta > \cos\beta,$$

donc $\beta' < \beta$, ce qui démontre notre proposition.

On a donc $OH < a$, et l'angle $PQH < \frac{\pi}{2}$. On peut d'ailleurs préciser la grandeur de cet angle. Quand Ox glisse sur elle-même, H prend la vitesse $V\varphi(OH)$ et Q la vitesse $V\varphi(a)$; la formule (2), appliquée au segment HQ, donne

$$\varphi(OH) = \varphi(a)\sin(PQH). \tag{5}$$

Les normales à un hypercycle sont orthogonales à la base; ce sont des non-sécantes. Si deux normales découpent sur la base la longueur p, l'arc correspondant de l'hypercycle est $p\varphi(a)$.

Si, étant donné un triangle ABC rectangle en A, on fait glisser le côté AC sur lui-même, la formule (2), appliquée à BC, donne

$$\cos C = \varphi(c)\sin B. \tag{6}$$

En désignant par $\widehat{BC'}$ l'arc d'équidistante de base AC, on peut aussi écrire

$$AC\cos C = \widehat{BC'}\sin B. \tag{7}$$

Les formules (5), (6), (7) sont vraies dans les trois géométries, à condition de donner à φ l'expression qui convient à chacune et de tenir compte que l'équidistante $\widehat{BC'}$ est soit un segment de droite, soit un arc de cercle, soit un arc d'hypercycle.

Dans le plan de Lobatchewski, on voit sur (6) que B est inférieur à $\frac{\pi}{2} - C$; la somme des angles du triangle est inférieure à π. On trouve l'*angle de parallélisme* ϖ_c en faisant tendre le point C vers l'infini; $\cos C$ a pour limite 1, et $\sin B$ devient $\sin \varpi_c$

$$\sin \varpi_c = \frac{1}{\operatorname{Ch} \frac{c}{k}} \qquad \text{d'où} \qquad \cos \varpi_c = \operatorname{th} \frac{c}{k}. \tag{8}$$

4. Si l'on rapporte le plan à un réseau orthogonal formé des droites $u = C$, perpendiculaires à une même droite Δ, et des trajectoires orthogonales $v = C$ de ces droites, c'est-à-dire, des courbes équidistantes de Δ, le ds^2 prend la forme, quelle que soit la géométrie considérée

$$ds^2 = [\varphi(v)]^2 du^2 + dv^2.$$

Le plan a pour courbure totale $-\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)}$ qui est une constante, nulle, positive, ou négative suivant le choix de φ. L'équidistante v_0 a pour courbure géodésique $\frac{\varphi'(v_0)}{\varphi(v_0)}$. Dans le cas de Lobatchewski, cette courbure est $\frac{1}{k} \operatorname{th} \frac{v_0}{k}$; elle tend vers $\frac{1}{k}$ par valeurs inférieures quand l'hypercycle s'éloigne à l'infini. En posant

$$u = k \log \rho, \qquad \operatorname{Ch} \frac{v}{k} = \frac{1}{\sin \theta} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi),$$

le ds^2 devient

$$k^2 \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}{\rho^2 \sin^2 \theta},$$

ce qui équivaut à l'expression bien connue dans le demi-plan de Poincaré. Le glissement d'une droite sur elle-même, en géométrie lobatchewskienne, n'est ni un mouvement de translation, ni un mouvement de rotation; on l'appelle un *mouvement hyperbolique*, en raison du genre de transformation homographique qui lui correspond dans le demi-plan de Poincaré.

II. — Rotation autour d'un point à distance finie.

5. Dans le mouvement de rotation autour de O, la vitesse de A doit être perpendiculaire à OA, à cause de (2), et de la forme

$$V_A = \omega f(a) \tag{9}$$

où $a = OA$ et où ω désigne la vitesse angulaire; $f(a)$ doit être une fonction impaire.

Reprenons la figure qui nous a servi pour étudier le mouvement de glissement d'une droite, et considérons deux mouvements virtuels : d'abord, un mouvement de rotation autour de A; les vitesses de A, B, O, B', perpendiculaires à Oy, ont respectivement comme mesures algébriques : zéro, $\omega f(a-b)$, $\omega f(a)$, $\omega f(a+b)$; ensuite, un mouvement de rotation autour de A', dans le sens opposé au précédent; les vitesses de A', B, O, B' sont respectivement : zéro, $\omega f(a+b)$, $\omega f(a)$, $\omega f(a-b)$. Donc, dans le mouvement résultant, les vitesses sont, pour O : $2\omega f(a)$, pour B et pour B' : $\omega[f(a+b)+f(a-b)]$. Les points B et B', symétriques par rapport à O, ont des vitesses perpendiculaires à Oy et égales entre elles; la distribution des vitesses est donc la même que si Ox glissait sur elle-même avec la vitesse $2\omega f(a)$. La formule (3) nous donne par conséquent

$$f(a+b)+f(a-b) = 2f(a)\varphi(b). \tag{10}$$

C'est notre seconde équation fonctionnelle. Si l'on admet que f est deux fois dérivable, on en tire la relation

$$\frac{f''}{f} = \frac{\varphi''}{\varphi} = \text{const.} \tag{11}$$

qui est en elle-même intéressante et détermine la fonction impaire f quand φ a été choisie. Mais on peut résoudre aussi (10) en ne supposant sur f que la continuité. Il suffit de faire d'abord $b = a$, d'où

$$f(2a) = 2f(a)\varphi(a),$$

et d'appliquer la méthode que Poisson [1] a utilisée pour

---

(1) Poisson, *loc. cit.*, p. 47; *Voir* aussi E. Picard, *loc. cit.*, p. 9.

résoudre (4). Suivant le choix que l'on fait de φ, on trouve

$$f = a \qquad \text{ou} \qquad f = k \sin \frac{a}{k} \qquad \text{ou} \qquad f = k \operatorname{Sh} \frac{a}{k}.$$

Le multiplicateur arbitraire a été déterminé par le fait que les trois géométries se confondent dans l'infiniment petit. On remarque que dans tous les cas $f'(a) = \varphi(a)$.

Pour la géométrie lobatchewskienne en particulier, on a

$$(12) \qquad V_A = \omega k \operatorname{Sh} \frac{a}{k}.$$

Dans les trois géométries, la longueur de la circonférence de rayon $a = OA$ est

$$(13) \qquad L_a = 2\pi f(a).$$

Soit ABC un triangle quelconque; une rotation autour de C donne les vitesses

$$V_A = \omega f(b), \qquad V_B = \omega f(a),$$

d'où, en appliquant (2)

$$(14) \qquad \frac{f(a)}{\sin A} = \frac{f(b)}{\sin B} = \frac{f(c)}{\sin C},$$

ce qui, compte tenu de (13), conduit à la formule de géométrie générale

$$(15) \qquad \frac{L_a}{\sin A} = \frac{L_b}{\sin B} = \frac{L_c}{\sin C}.$$

Soit ABC un triangle rectangle en A; de C comme centre avec b comme rayon, traçons l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ limité en M sur BC, et de M, abaissons MP perpendiculaire sur AC. Proposons-nous d'évaluer l'arc $\overset{\frown}{AM}$, d'angle au centre $\gamma = ACB$, sans préciser la géométrie que nous adoptons.

D'abord $\overset{\frown}{AM} = \gamma f(b)$ (16). Ensuite, on tire de (14), puisque $\sin A = 1$,

$$f(c) = f(a) \sin \gamma$$

et de (6)

$$\varphi(c) = \frac{\cos \gamma}{\sin B},$$

d'où, d'après (14)

$$\frac{f(c)}{\varphi(c)} = f(b)\operatorname{tg}\gamma.$$

Donc (16) peut s'écrire

$$\widehat{\mathrm{AM}} = \frac{f(c)}{\varphi(c)}\,\frac{\gamma}{\operatorname{tg}\gamma}. \tag{17}$$

Dans le triangle rectangle CPM, nous avons aussi

$$\frac{f(\mathrm{PM})}{\sin\gamma} = \frac{f(\mathrm{CM})}{1} = f(b),$$

donc (16) devient

$$\widehat{\mathrm{AM}} = f(\mathrm{PM})\,\frac{\gamma}{\sin\gamma}. \tag{18}$$

En géométrie lobatchewskienne en particulier, on a

$$\frac{\widehat{\mathrm{AM}}}{k} = \operatorname{th}\frac{\mathrm{AB}}{k}\,\frac{\gamma}{\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{Sh}\frac{\mathrm{PM}}{k}\,\frac{\gamma}{\sin\gamma}. \tag{19}$$

6. En rapportant le plan à un réseau orthogonal formé des cercles concentriques $v = \mathrm{C}$ et des rayons $u = \mathrm{C}$, on obtient l'élément linéaire

$$ds^2 = [f(v)]^2\,du^2 + dv^2.$$

La courbure totale du plan se présente alors sous la forme $-\frac{f''(v)}{f(v)}$, qui est la même constante, on l'a vu, que $-\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)}$. Le cercle de rayon v a pour rayon de courbure géodésique $\rho_v = \frac{f(v)}{f'(v)}$; dans le cas de Lobatchewski, on trouve $k \operatorname{th}\frac{v}{k}$, ce qui tend vers k par valeurs inférieures quand v tend vers l'infini. Le mouvement de rotation, dans ce cas, s'appelle *mouvement elliptique*, parce que la transformation homographique qui lui correspond dans le demi-plan de Poincaré est du type elliptique. On peut, dans le cas général, transformer le ds^2 en posant

$$\mathrm{X} = \rho_v \cos u = \frac{f}{f'}\cos u, \qquad \mathrm{Y} = \rho_v \sin u = \frac{f}{f'}\sin u$$

et en appelant λ la constante $-\frac{f''}{f}$, d'où $f'^2 = -\lambda f^2 + 1$

$$ds^2 = \frac{d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + \lambda(\mathrm{X}\,d\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{X})^2}{[1 + \lambda(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)]^2}.$$

Suivant le cas, $\lambda = 0$, $\frac{1}{k^2}$ ou $-\frac{1}{k^2}$; c'est la courbure totale du plan. L'intérêt de ces coordonnées, c'est que, grâce à leur emploi, les droites ont, dans les trois géométries, des équations linéaires, et le groupe des déplacements s'exprime par des équations homographiques (linéaires dans le seul cas d'Euclide).

III. — Mouvement laissant fixe un seul point à l'infini.

7. Supposons que le seul point restant fixe soit le point à l'infini vers le bas de l'axe $y'Oy$. Un tel mouvement peut être considéré comme la limite d'un mouvement de rotation dont le centre s'éloignerait à l'infini : la droite $y'Oy$ se déplace de telle sorte que ses différents points aient des vitesses qui lui soient perpendiculaires. Considérons les points A et A′ de la droite, symétriques par rapport à $O(OA = a)$. Les vitesses $\vec{V}_0$, $\vec{V}_A$, $\vec{V}_{A'}$ sont perpendiculaires à l'axe $y'Oy$; si V_0 est connue, V_A doit s'en déduire par une formule du genre

$$V_A = V_0\, g(a).$$

Mais O ne jouit d'aucun privilège spécial; si A était pris comme origine, O aurait alors comme abscisse $-a$: on doit donc avoir aussi

$$V_0 = V_A\, (g - a).$$

La comparaison donne

$$\frac{1}{g(a)} = g(-a), \tag{20}$$

ce qui montre que $g(a) = e^{h(a)}$, où $h(a)$ est une fonction impaire.

Pour déterminer $g(a)$, nous employons encore une fois la méthode de composition des mouvements virtuels.

Comme premier mouvement, prenons celui que nous venons d'indiquer; il donne aux points O, A et A′ les vitesses V_0, $V_0 g(a)$, $V_0 g(-a)$. Le second mouvement sera un mouvement analogue, mais autour du point à l'infini en haut de $y'Oy$ et dans le sens opposé au précédent, de façon à donner à O la même vitesse $\vec{V}_0$;

nous obtenons ainsi pour O, A et A′ les vitesses V_0, $V_0 g(-a)$, $V_0 g(a)$. Dans le mouvement résultant, nous aurons donc les vitesses : pour O, $2V_0$; pour A et pour A′, $V_0[g(a)+g(-a)]$. Les vitesses de A et de A′ étant égales et perpendiculaires à AA′, la distribution des vitesses est la même que si la droite Ox, perpendiculaire en O à AA′, glissait sur elle-même. On doit donc avoir, d'après (3),

$$V_A = V_{A'} = 2V_0\varphi(a),$$

d'où

$$g(a)+g(-a) = 2\varphi(a). \tag{21}$$

C'est la troisième équation fonctionnelle qui, compte tenu de (20), définit $g(a)$ quand $\varphi(a)$ est choisie. Si $\varphi(a)\equiv 1$, on a aussi $g(a)=1$; c'est le cas de la géométrie euclidienne; le mouvement présent se réduit alors à un mouvement de translation dans la direction perpendiculaire à celle du point à l'infini, et il n'y a pas lieu de préciser si le point à l'infini est vers le haut ou vers le bas de l'axe $y'Oy$. Si $\varphi(a)=\cos\frac{a}{k}$, l'équation (21) ne donne rien de réel; c'est que ce mouvement n'existe pas dans la géométrie de Riemann, la droite étant finie. Le seul cas intéressant est donc celui de Lobatchewski, où le mouvement présent est distinct des deux mouvements précédemment étudiés, et correspond au *mouvement parabolique* dans le demi-plan de Poincaré. On a alors $g(a)=e^{\frac{a}{k}}$, le signe de l'exposant étant choisi pour que V_A tende vers zéro si a tend vers $-\infty$

$$V_A = V_0 e^{\frac{a}{k}}. \tag{22}$$

Dans le mouvement parabolique, la trajectoire d'un point quelconque est un *horicycle*. Toutes les normales à l'horicycle, étant parallèles, font entre elles un angle nul; il n'y a donc pas rotation au sens propre.

On obtient facilement l'arc de l'horicycle en le considérant comme la limite d'un arc de cercle dont le rayon devient infini, et l'angle au centre nul. Soit AB un segment perpendiculaire à $y'Oy$; par B menons la paralèle vers le bas à $y'Oy$. L'arc $\overset{\frown}{AM}$ d'horicycle limité à cette parallèle a pour longueur, d'après (19), où $\frac{\gamma}{\operatorname{tang}\gamma}$ est remplacé par sa limite 1,

$$\widehat{\mathrm{AM}} = k \operatorname{th} \frac{\mathrm{AB}}{k}. \tag{23}$$

Abaissant de M la perpendiculaire MP sur Oy, on trouve aussi, d'après la même formule (19), où $\frac{\gamma}{\sin\gamma}$ est remplacé par 1,

$$\widehat{\mathrm{AM}} = k \operatorname{Sh} \frac{\mathrm{PM}}{k}. \tag{24}$$

Si l'on effectue les constructions analogues en utilisant, au lieu du point A, le point A' de Oy, on trouve, puisque $V_{A'} = V_A e^{\frac{AA'}{k}}$,

$$\widehat{\mathrm{A'M'}} = \widehat{\mathrm{AM}}\, e^{\frac{\mathrm{AA}}{k}}$$

et (23) nous donne

$$\operatorname{th} \frac{\mathrm{A'B'}}{k} = e^{\frac{\mathrm{AA'}}{k}} \operatorname{th} \frac{\mathrm{AB}}{k}, \tag{25}$$

formule qui indique suivant quelle loi varie la distance de deux droites parallèles. Comme, par ailleurs, l'angle ϖ_c de parallélisme vérifie, d'après (8), $\cos\varpi_c = \operatorname{th}\frac{\mathrm{AB}}{k}$, on obtient

$$\cos\varpi_{c'} = e^{\frac{\mathrm{AA'}}{k}} \cos\varpi_c, \tag{26}$$

ce qui donne la loi de variation de l'angle de parallélisme aux différents points d'une même parallèle.

Signalons encore une formule qui donne l'expression du segment MB. Il suffit d'appliquer la formule (2) aux vitesses de A et de B; on trouve, compte tenu de (8),

$$e^{\frac{\mathrm{MB}}{k}} = \operatorname{Ch} \frac{\mathrm{AB}}{k}. \tag{27}$$

8. Si l'ôn rapporte le plan à un réseau orthogonal formé de droites parallèles $u = C$ et des horicycles orthogonaux à ces droites, on obtient

$$ds^2 = e^{\frac{2v}{k}} du^2 + dv^2,$$

ce qui devient, en posant $x = \frac{u}{k}$, $y = e^{-\frac{v}{k}}$,

$$ds^2 = k^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Les horicycles ont pour courbure géodésique $\frac{1}{k}$. On a vu que $\frac{1}{k}$ était la limite de la courbure géodésique d'un cercle dont le rayon croît indéfiniment, et aussi la limite de la courbure géodésique d'un hypercycle dont la distance à la base croît indéfiniment : le passage par continuité d'un cercle à un hypercycle se fait en effet par un horicycle.

(Manuscrit reçu le 14 février 1944.)