BULLETIN DE LA S. M. F.

VICTOR THÉBAULT

Sur le tranchet d'Archimède

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 68-75
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__68_0>

SUR LE TRANCHET D'ARCHIMÈDE;

PAR M. V. THÉBAULT.

Tennie (Sarthe).

1. Notes d'histoire. — Parmi les œuvres d'Archimède qui sont parvenues jusqu'à nous, le livre des *Lemmes* est un ouvrage dont le texte grec semble irrémédiablement perdu, et qui nous a été transmis dans une version arabe, faite au IXe siècle, par le géomètre Thabit-Ben-Corrah (1), et annotée par Almochtasso-abil-Hasan. Cette version arabe, dont on possède plusieurs manuscrits, a fait l'objet d'une première traduction latine, due à Graeves, éditée à Londres, en 1657, avec des notes de Samuel Forster, et d'une seconde traduction latine, due au célèbre orientaliste Abraham Ecchellensis (2), éditée à Florence, en 1661, avec les notes de Borelli. Cet ouvrage, tel qu'il nous a été transmis par les Arabes, comporte quinze propositions de géométrie plane. L'absence de toute liaison entre les propositions, et un style tout différent de celui des autres travaux d'Archimède, ne le font pas apparaître comme une œuvre originale, mais plutôt comme un recueil de propositions éparses, dont la découverte aurait été attribuée traditionnellement à Archimède par des géomètres postérieurs; à moins cependant d'admettre que l'on se trouve en présence d'une version arabe fort libre, ou d'un remaniement complet d'un texte d'Archimède.

Les propositions principales du livre des *Lemmes* sont relatives aux propriétés de certaines figures délimitées par des demi-cercles

(1) Thabit-Ben-Corrah, Ben Haroun, philosophe et mathématicien arabe (835-900), à qui l'on doit des traductions arabes des *Lemmes* et du traité de la *Sphère d'Archimède*, des *Eléments d'Euclide*, de l'*Almageste de Ptolémée* et des *Coniques d'Apollonius*.

(2) Abraham Ecchellensis, savant orientaliste, auteur de la traduction latine d'ouvrages arabes précieux, tels que le *Chronicon Orientale* de Ibu-ar-Rahib (Paris, 1653), le livre des *Lemmes* d'Archimède et les livres V, VI et VII des *Coniques d'Apollonius* dont le texte grec est perdu.

analogues aux *lunules* d'Hippocrate de Chio, telle que celle en forme de couteau à lame recourbée, désignée sous le nom d'Arbelon [1] (Proposition IV), et celle que l'on désigne sous le nom de Salinon [2] (Proposition XIV). Ces configurations ont beaucoup occupé les géomètres et les plus grands noms de l'histoire : Viète, Descartes, Newton, y sont attachés. Les manuscrits arabes inédits renferment très probablement aussi des choses intéressantes [3].

Assez récemment, les géomètres ont appliqué la méthode de l'inversion à ces figures. Ce procédé a déjà donné d'élégants résultats [4] auxquels nous voudrions encore ajouter des généralisations et des compléments.

2. Ayant tracé une droite sur un plan et placé sur cette droite quatre points qui, pour fixer les idées, se suivent dans l'ordre A, C, D, B, dans un des demi-plans déterminé par la droite, on décrit les demi-circonférences (O), (O_1), (O_2), de diamètres $AB = 2a$, $AC = 2b$, $DB = 2c$, et dans l'autre demi-plan, la demi-circonférence (O_3) de diamètre $CD = 2d$. Soient T, T′ les points où l'axe radical des cercles (O_1), (O_2) coupe les demi-cercles (O), (O_3). Les droites AT et CT′, BT et DT′ recoupent les demi-cercles (O_1) et (O_2) aux points de contact M et N de ces demi-cercles avec leur tangente commune extérieure et le quadrangle MTNT′ est un rectangle. Il en résulte que

$$(1)\quad \overline{TT'}^2 = \overline{MN}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (O_1M - O_2N)^2 = (b + 2d + c)^2 - (b - c)^2$$
$$= 4(b + d)(c + d) = 4(a - b)(a - c).$$

L'aire S de la partie du plan limitée par les quatre demi-cir-

---

(1) ἄρβηλοσ, littéralement : tranchet de cordonnier, mot qui a été conservé tel quel dans les versions arabes et latines.

(2) σέλςνον, feuille d'ache (Heiberg).

(3) Abusahal Alkuhi (*Cf.* Édition des *Lemmes* de Borelli).

(4) Cochez, *Journal de G. de Longchamps*, 1877, p. 354; M. d'Ocagne, *L'Ens. Math.*, 1934, p. 73 à 77; V. Thébault, *l'Éducation mathématique*, 29e année, p. 105-107; *L'Ens. Math.*, 1934, p. 349 à 359; 1935, p. 309 à 324; *Annales de la Soc. scient. de Bruxelles*, t. XL, p. 5 à 15; *Mathesis*, 1936 (Supplément 12 p.); R. Goormaghtigh, *Mathesis*, 1936, p. 83 à 86.

conférences (tranchet généralisé), est

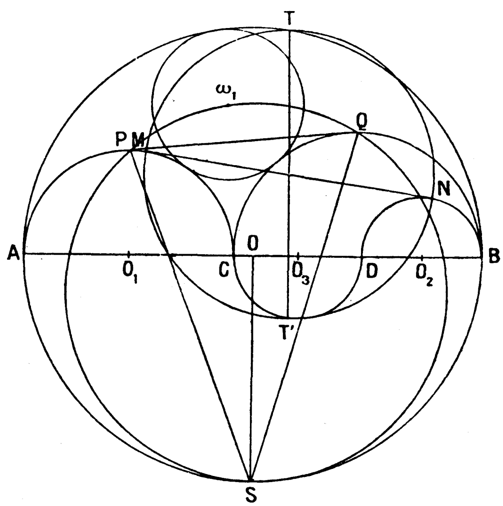
$$(1) \qquad S = \frac{\pi}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) = \frac{\pi}{2}[a^2 - b^2 - c^2 + (a - b - c^2)]$$

$$= \pi(a - b)(a - c) = \frac{1}{4}\pi\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\pi\overline{TT'}^2$$

Lorsque $d = 0$, les points C, D, T′ sont confondus, les demi-cercles (O_1), (O_2) se touchent, et l'aire

$$(3) \qquad S = \pi(a^2 - b^2 - c^2) = \pi bc = \frac{1}{4}\pi\overline{CT}^2$$

est celle du tranchet d'Archimède (Proposition IV).



Si les demi-cercles (O_1), (O_2) sont égaux, la figure limitée par les quatre demi-circonférences a été considérée aussi par Archimède (Proposition XIV). La formule (2) permet donc de généraliser ainsi les Propositions IV et XIV du géomètre grec :

Ayant marqué les points C, D *sur le diamètre* AB *d'un demi-cercle* (O), *on décrit, à l'intérieur de celui-ci, les demi-cercles* (O_1), (O_2) *de diamètres* AC, DB, *et à l'extérieur le demi-cercle* (O_3) *de diamètre* CD; *si* T, T′ *sont les points où l'axe radical des cercles* (O_1), (O_2) *coupe les demi-circonférences* (O), (O_3), *l'aire limitée par les quatre demi-circon-*

férences (O), (O_1), (O_2), (O_3) *est équivalente à celle du cercle décrit sur* TT′ *comme diamètre.*

N. B. — Si $d^2 = b^2 + c^2$, *la ligne courbe* AMCT′DNB *partage l'aire du cercle* (O) *en deux tranchets ayant des aires équivalentes et le même périmètre.*

3. Dans la Proposition VI, Archimède considère, pour un cas particulier de la figure, le cercle (ω_1), de centre ω_1 et de rayon ρ_1, inscrit au tranchet. Cette configuration, envisagée aussi par Pappus [1], possède la jolie propriété suivante.

Théorème. — P, Q *et* S *étant les milieux des demi-circonférences* (O_1), (O_2) *et le milieu de la demi-circonférence* (O), *au-dessous de* AB, *le cercle circonscrit au triangle* PQS *passe par le centre* ω_1 *du cercle* (ω_1) *inscrit au tranchet.*

En effet, les points O, O_1, O_2 étant les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés PQ, QS, SP du triangle PQS, les médiatrices de ces côtés passent par les points O, O_1, O_2 et rencontrent les tangentes Δ, Δ', Δ'' au cercle (O) respectivement au point diamétralement opposé à S et en A et B, aux centres S′, P′, Q′ des carrés construits extérieurement. De plus, les droites PB, QA, SC portent les hauteurs du triangle PQS et passent par les contacts V, V_1, V_2 du cercle (ω_1) avec les demi-cercles (O), (O_1), (O_2). Le trapèze AV_2O_2Q', dans lequel

$$V_2O_2 = QQ_2 = AQ',$$

est donc symétrique par rapport à la médiatrice PS de ses bases Q_2Q' et V_2A, et ses diagonales V_2Q', O_2A sont symétriques par rapport à PS. De même les droites V_1P', VS′ sont symétriques de AB, par rapport à QS et PQ et le centre ω_1 du cercle (ω_1) est sur le cercle circonscrit au triangle PQS. Il en résulte aussi que l'orthocentre H du triangle PQS est sur la circonférence (ω_1) et

[1] *Collections mathématiques* (th. XV, livre IV). L'ouvrage de Pappus, en huit livres, qui constitue un des plus précieux monuments de l'ancienne géométrie, n'a pas encore été traduit en français; mais on trouvera la proposition en question dans la traduction latine de Commandin (*Pappi Alexandrini Mathematicæ collectiones, in latinum conversæ et commentariis illustratæ a* F. Commandino, Bononiæ, 1660, pet. in-fol., p. 81).

sur le rayon perpendiculaire à AB, lequel est égal à la distance de H à AB.

N. B. — Le triangle PQS dans lequel les centres des carrés construits intérieurement sur ses côtés sont collinéaires et dont la cotangente de l'angle de Brocard est égale à 2, jouit de propriétés très curieuses ([1]) dont quelques-unes ont fait l'objet de la question de mathématiques élémentaires posée au Concours pour l'Agrégation (1923).

4. On considère le cercle (ω_1), de rayon ρ_1, inscrit au tranchet; ensuite, de ω_1 vers A, de ω_1 vers B, de ω_1 vers C, les cercles $[(\omega_2), (\omega_3), \ldots, (\omega_n)]$, $[(\omega'_2), (\omega'_3), \ldots, (\omega'_n)]$, $[\omega''_2), (\omega''_3), \ldots, (\omega''_n)]$, de rayons $(\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n)$, $(\rho'_2, \rho'_3, \ldots, \rho'_n)$, $(\rho''_2, \rho''_3, \ldots, \rho''_n)$, tangents successivement aux demi-cercles (O), (O_1) et aux cercles (ω_1), (ω_2), $\ldots$, (ω_{n-1}), aux demi-cereles (O), (O_2) et aux cercles (ω_1), (ω'_2), $\ldots$, (ω'_{n-1}), aux demi-cercles (O_1), (O_2) et aux cercles (ω_1), (ω''_2), $\ldots$, (ω''_{n-1}). Ces cercles sont appelés *cercles de Pappus* (*Coll. math.*, *loc. cit.*).

Soient $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(y_1, y'_2, \ldots, y'_n)$, $(y_1, y''_2, \ldots, y''_n)$ les ordonnées des centres de ces cercles, par rapport à la droite AB. Transformant la figure successivement par les inversions (A, $4ab$), (B, $4ca$), (C, $-4bc$), on arrive aux formules

$$\rho_n = \frac{bc(b+c)}{b^2+n^2c^2+bc}, \tag{4}$$

$$y_n = 2n\rho_n, \tag{5}$$

$$\rho'_n = \frac{bc(b+c)}{c^2+n^2b^2+bc}, \tag{6}$$

$$y'_n = 2n\rho'_n, \tag{7}$$

$$\rho''_n = \frac{bc(b+c)}{n^2(b+c)^2-bc}. \tag{8}$$

$$y''_n = 2n\rho''_n, \tag{9}$$

Les relations (5), (7), (9) définissent déjà la célèbre *Proposition antique* de Pappus qui s'énonce ainsi ([2]) : *si l'on inscrit une série*

([1]) Nous avons donné, pour notre part, de nombreuses propriétés de ce triangle (*Mathesis*, 1924, p. 94; 1931, p. 192 et 284; 1934, Supplément, p. 28; *Annales de la Soc. scient. de Bruxelles*, 1934, p. 94).

([2]) *Loc. cit.*

de cercles dans chacun des triangles curvilignes limité par le cercle (ω_1) *et deux des demi-cercles* (O), (O_1), (O_2), *le premier tangent au cercle* (ω_1) *et à deux des demi-cercles, et ainsi de suite, les hauteurs de ces cercles au-dessus du diamètre* AB *sont respectivement égales au diamètre du premier cercle, au double du diamètre du second, au triple du diamètre du troisième, et ainsi de suite, à* n *fois le diamètre du cercle de rang* n.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne des centres de deux des cercles* (ω_1), (ω_2), ..., (ω_n) *soit parallèle à la droite* AB *est que la longueur du diamètre* AC *soit égale à* k *fois celle de* BC, k *étant entier.*

En effet, pour que la droite des centres $\omega_p\omega_q$ de deux cercles (ω_p) et (ω_q), $(1 \leqq p \leqq n,\ 1 \leqq q \leqq n)$, soit parallèle à AB, il faut et il suffit que $y_p = y_q$ ou $p.\rho_p = q.\rho_q$; en vertu de (5), cette condition se traduit par l'équation

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} - pq = 0,$$

dont les racines ne sont réelles que si $4pq + 1 = x^2$. Comme x est un nombre entier impair,

$$pq = \left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right) = k(k+1),$$

et $\frac{b}{c} = k$ ou $-(k+1)$.

Pour chaque décomposition du nombre $k(k+1)$ en un produit de deux facteurs, correspond une droite $\omega_p\omega_q$ parallèle à AB.

5. A. Une inversion $(A, 4ab)$ transforme les cercles (ω_1), (ω_2), ..., en les cercles (φ_1), (φ_2), ..., égaux à (O_2), tangents aux perpendiculaires CX, BY à CB en C, B, et chacun de ces cercles est tangent au suivant. Les points de contact t_1, t_2, ..., des cercles (O_2) et (φ), (φ_1) et (φ_2), ..., sont les transformés des points de contact T_1, T_2, ..., de (O_2) et (ω_1), (ω_1) et (ω_2), ... Les points T_1, T_2, ..., sont donc sur le cercle (ω) transformé de la droite $\delta \equiv (t_1, t_2, \ldots)$, centré sur AB et de rayon $\rho = ab : (a+b)$. De même, les points de contact des cercles (O_1) et (ω_1), (ω_1),

et (ω'_2), ..., sont sur un cercle (ω'), centré sur AB et de rayon $\rho' = 2ca : (c + a)$. Enfin, les points de contact des cercles (ω_1) et (ω''_2), (ω''_2) et (ω''_3), ..., sont sur un cercle (ω''), centré sur AB et de rayon $\rho'' = 2bc : (b - c)$.

B. Transformant la figure originale par l'inversion $(C, -4bc)$, les cercles (ω_1), ..., (ω_n) deviennent les cercles (O'_1), ..., (O'_n), chacun tangent au suivant et tous tangents au cercle (O) et à la droite BY prolongée au-dessous de AB. Ces cercles restent fixes quand le point C varie entre A et B et les transformés $\mathcal{T}_1$, ..., $\mathcal{T}_n$ de T_1, ..., T_n sont des points fixes. Il en résulte que les points T_1, ..., T_n décrivent des arcs de cercles fixes (Ω_1), ..., (Ω_n), circonscrits aux triangles $AB\mathcal{T}_1$, ..., $AB\mathcal{T}_n$, les arcs étant au-dessus de AB. Dans la même inversion, les transformés M'_1, ..., M'_n des points M_1, ..., M_n de contact des cercles (ω_1), ..., (ω_n) avec le cercle variable (O_1), qui coïncident avec les points de contact des cercles (O'_1) ..., (O'_n) avec BY, décrivent les arcs des cercles fixes $(\mathcal{C}_1)$, ..., $(\mathcal{C}_n)$, circonscrits aux triangles ABM'_1, ..., ABM'_n, situés au-dessus de AB.

Les points de contact T'_1, T'_2, ..., T'_n des cercles (O_1) et (ω_1), (ω_1) et (ω'_2), ..., décrivent les mêmes arcs de cercles. Quant aux points de contact des cercles (ω_1) et (ω''_2), (ω''_2) et (ω''_3), ..., ils décrivent, au-dessus de AB, des arcs de cercles fixes (Φ_1), ..., (Φ_n), circonscrits aux triangles ABD_1, ..., ABD_n, D_1, ..., D_n étant les transformés des points ω_1, ..., ω_n dans l'inversion en cause.

C. Lorsque le point C varie entre les points A et B supposés fixes, l'indice n étant donné, il résulte de ces considérations que *les cercles* (ω_n) *et* (ω'_n) *enveloppent, au-dessus de* AB, *le demi-cercle* (O) *et l'arc du cercle* (Γ_n), *de rayon* r_n, *passant par les points* A *et* B *et touchant intérieurement les cercles* (Ω_n) *et* (Ω'_n). *Les centres* ω_n *et* ω'_n *des cercles* (ω_n) *et* (ω'_n) *décrivent donc, au-dessus de* AB, *un arc d'ellipse* $(\mathcal{E})$, *de foyers* O *et* Γ_n, *de grand axe* $a + r_n$, *passant par les points* A *et* B. Si, du même côté de la droite AB que le point ω_n, on trace la parallèle Δ à AB située à une distance de cette droite égale à $2na$, *l'ellipse* $(\mathcal{E})$ *a pour directrice la droite* Δ *et* $e = \frac{1}{2n}$ *comme excentricité*. Dans la même hypothèse, où C varie entre A et B, l'indice n étant donné, *le cercle* (ω''_n) *enveloppe, au-dessus de* AB, *les deux arcs des cercles* (Φ_{n-1}) *et* (Φ_n), *de rayons* r''_{n-1} *et* r''_n. *Le centre* ω''_n *du cercle* (ω''_n) *décrit donc un arc d'ellipse* $(\mathcal{E}'')$, *de foyers* Φ_{n-1} *et* Φ_n, *de grand axe* $r''_{n-1}+r''_n$.

N. B. Des résultats analogues découlent de la figure dans laquelle le point A ou B varie, les points B, C (ou C, A) étant fixes.

D. **Triangles spéciaux.** — Il s'agit des triangles $O_1\omega''_nO_2$, $O\omega_nO_1$, $O\omega'_nO_2$ qui jouissent d'intéressantes propriétés.

Les cercles inscrits à chacun d'eux dans les angles ω''_n, O_1, O_2, *respectivement, ont pour rayons na, nc, nb et touchent la droite* AB *en* O, O_2, O_1. *L'indice n étant donné, le cercle inscrit au triangle* $O_1\omega''_nO_2$ *dans l'angle* ω''_n *est fixe et constitue l'enveloppe des droites* $O_1\omega''_n$ *et* $O_2\omega''_n$, *lorsque* C *varie entre* A et B.

E. **Généralisations.** — Les lieux et enveloppes des centres et des cercles (ω_n), (ω'_n), (ω''_n) se retrouvent de la même manière dans la configuration générale où deux cercles (O_1), (O_2), tangents à un cercle donné (O) aux extrémités d'une corde AB, *sont assujettis à se couper en* M *sous un angle constant* $(MO_1, MO_2=\theta)$. L'enveloppe du cercle (ω_n), l'indice n étant donné, se compose de deux arcs de cercles passant par A et B, de même que les enveloppes respectives des cercles (ω'_n), (ω''_n). L'arc du cercle (O), au-dessus de AB, fait partie des enveloppes des cercles (ω_n) et (ω'_n). Pour se rendre compte de ces remarques, il suffit de transformer la figure par l'inversion (M, MA.MA′), M étant situé, pour fixer les idées, au-dessus de AB, la seconde intersection de MA avec le cercle (O) étant A′. Cette configuration générale possède d'ailleurs la plupart des propriétés que l'on rencontre dans l'hypothèse d'Archimède et de Pappus, où $\theta=\pi$.

(Manuscrit reçu le 25 avril 1944).