BULLETIN DE LA S. M. F.

LEONCE LESIEUR

Sur la représentation rationnelle d’une hyperbiquadratique

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 43-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__43_0>

SUR LA REPRÉSENTATION RATIONNELLE D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE;

PAR M. LÉONCE LESIEUR.

INTRODUCTION.

L'intersection de deux quadriques n'est pas en général rationnelle, c'est-à-dire susceptible d'une représentation paramétrique unicursale propre. Au contraire, la variété commune à deux hyperquadriques est rationnelle quel que soit le nombre n des dimensions de l'espace considéré ($n > 3$). C'est là un résultat connu : Bertini l'a démontré pour $n = 4$ et Rosati étendu pour $n > 4$ (*Annali di Matematica*, 3e série, 1899). La question présente d'ailleurs une certaine parenté avec la rationalité des variétés cubiques : l'irrationalité de la cubique plane équivaut en effet à l'irrationalité de la biquadratique ordinaire, la rationalité de la surface cubique équivaut à la rationalité de l'intersection de deux hyperquadriques d'un espace à quatre dimensions; après, les deux problèmes divergent : tandis que l'hyperbiquadratique reste rationnelle, la variété cubique serait, d'après un travail récent de Fano, irrationnelle. On voit quel rôle important joue le nombre des dimensions de l'espace, et comme il serait injuste dans cet ordre d'idées, de taxer « d'encombrantes », avec Halphen, les généralisations concernant les hyperespaces.

L'objet de cette Note est de rappeler les résultats de Rosati, que nous avions rencontrés sans les connaître, sur la représentation rationnelle d'une hyperquadratique; nous présentons certains d'entre eux d'une manière semi-analytique sans doute plus accessible au lecteur peu familier des espaces supérieurs, et qui donne, avec les équations paramétriques elles-mêmes et des précisions sur certains cas particuliers, la représentation rationnelle d'une hypercyclide. Deux applications non classiques feront l'objet d'un autre travail.

Notations. — Nous citerons en maints endroits par les noms de leurs auteurs les Ouvrages suivants :

BERTINI, *Iperspazi* (Messine, 1923).

ENRIQUES, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris, 1926).

GODEAUX, *Transformations birationnelles de l'espace* (*Mémorial*, fasc. 67; Paris, 1934).

Nous indiquerons par $E_n =$ espace linéaire à n dimensions; $Q_n =$ quadrique de cet espace; $B_n =$ biquadratique intersection de deux Q_n; $C_p =$ (hyper) cyclide $=$ (hyper) surface du 4[e] ordre de E_p ayant une Q_{p-1} double; $T_p =$ (hyper) cyclide cubique $=$ surface du 3[e] ordre de E_p contenant une Q_{p-1}. L'hyperplan E_{p-1} qui contient cette Q_{p-1} recoupe T_p suivant un hyperplan E_{p-2}. Quand $p = 3$ c'est la section plane décomposée d'une surface cubique en une droite et une conique. L'intersection résiduelle de T_p avec une quadrique Q_p [spéciale (¹) si $p > 2$] passant par cet E_{p-2} est une variété V^5_{p-2} à $p-2$ dimensions du 5[e] ordre. Quand $p = 3$ c'est la quintique (²) commune à une quadrique et une surface cubique se coupant déjà suivant une droite. Quand $p > 3$ nous lui conserverons le nom de quintique et nous la désignerons par q_p. Donc $q_p = V^5_{p-2}$, de même que $Q_n = V^2_{n-1}$ et $B_n = V^4_{n-2}$.

REPRÉSENTATION RATIONNELLE D'UNE B_n.

Celle-ci est liée à l'existence d'une droite sur la variété B_n. Dans le cas $n = 3$, elle n'en possède pas sans être décomposée en une droite et une cubique rationnelle. Nous supposons donc dans toute la suite $n > 3$; il s'agit d'hyperbiquadratiques.

1. Toute hyperbiquadratique qui n'est pas un cône est rationnelle (³). — Rappelons d'abord ce théorème :

Sur une B_n on peut toujours trouver une droite.

(¹) BERTINI (p. 141) : une quadrique spéciale est un cône, ayant un point, droite ou E_r double qui constitue son sommet.

(²) Quintique de genre 2 (ENRIQUES, p. 551).

(³) Pour ce paragraphe et le suivant *cf.* ROSATI (Ouvrage cité) : *Rapresentazione della quartica base di un fascia di quadriche di* S_n *sopra un* S_{n-2}.

Il en existe 16 en général sur une B_4 ; pour $n > 4$ il y en a une infinité dépendant de $2(n-4)$ paramètres, telle qu'il en passe par tout point de la B_n [1].

Soit Δ l'une de ces droites. Définissons B_n par deux quadriques Q_n contenant Δ. Un plan variable E_2 passant par Δ recoupe la première quadrique suivant une droite D_1 et la deuxième suivant une droite D_2, donc B_n en un seul point M qui est en correspondance birationnelle avec le plan, et par suite avec sa trace N sur un E_{n-2}. La rationalité se trouve établie en général. Nous allons préciser d'une façon analytique.

Choisissons un repère projectif tel que les deux sommets $A_n(00\ldots 10)$ et $A_{n+1}(00\ldots 01)$ soient sur $\Delta(x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0)$. Les deux quadriques sont alors définies par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1 x_n + q_1 x_{n+1} + r_1 = 0, \\ p_2 x_n + q_2 x_{n+1} + r_2 = 0, \end{cases}$$

p_1, q_1, p_2, q_2 étant des formes linéaires en x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, r_1 et r_2 des formes quadratiques des mêmes variables.

Introduisons le déterminant de ce système linéaire en x_n et x_{n+1}, soit $Q = p_1 q_2 - p_2 q_1$ et distinguons deux cas *a* et *b*.

a. $Q \neq 0$. Alors (1) est équivalent à

$$(2)\qquad x_n = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{Q}, \qquad x_{n+1} = \frac{p_2 r_1 - p_1 r_2}{Q}.$$

Se donnant un point N de l'E_{n-2}, défini par A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, par ses coordonnées x_1, x_2, $\ldots$, $x_{n-1} = 1$, ces formules définissent rationnellement un point M de B_n, situé dans le plan ΔN. Inversement la connaissance des coordonnées de M donne immédiatement celles de N. Nous pouvons donc prendre comme paramètres homogènes de la représentation rationnelle les coordonnées u_1, u_2, $\ldots$, u_{n-1} dans E_{n-2}, et poser, après multiplication par Q,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = u_1 Q, \quad x_2 = u_2 Q, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = u_{n-1} Q, \\ x_n = q_1 r_2 - q_2 r_1, \quad x_{n+1} = p_2 r_1 - p_1 r_2. \end{cases}$$

Du point de vue géométrique le point $N(u_i)$ est la projection faite de Δ du point $M(x_i)$.

---

(1) BERTINI, p. 181.

b. $Q = 0$. — Une analyse facile met alors en lumière les deux faits suivants :

A. L'hyperbiquadratique est l'intersection de deux cônes de même sommet; c'est elle-même un cône dont la rationalité n'est pas assurée, par exemple si la base est une biquadratique non unicursale.

B. L'une des quadriques admet Δ pour droite double, aucun de ses points n'étant double pour l'autre. Alors la rationalité est assurée et la représentation rationnelle peut s'obtenir par des formules (3'), que nous réservons pour les cas particuliers, et qui se rattachent encore au type (3).

En résumé, cette analyse conduit à la conclusion exprimée dans le titre du paragraphe; de plus, la représentation rationnelle d'une B_n non conique peut se mettre sous la forme (3), et les seuls cônes B_n (spéciaux ou non) qui ne soient pas rationnels sont ceux dont la base est l'intersection non rationnelle de deux quadriques d'un espace ordinaire E_3.

2. Image des sections planes. — La section de B_n par l'hyperplan E_{n-1} d'équation $\Sigma\lambda_i x_i = 0$ a pour image dans l'espace E_{n-2} défini par les u_k sa projection d'équation $\Sigma\lambda_i x_i(u_k) = 0$ obtenue en remplaçant les x_i par les expressions (3). Elle fait partie d'un système linéaire S de surfaces du 3^e ordre ayant en commun la variété définie par

$$\left\{\begin{array}{l} Q = p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0, \qquad F = q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0, \\ \qquad\qquad G = p_2 r_1 - p_1 r_2 = 0, \end{array}\right. \tag{4}$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

lorsque aucune des formes p_2, q_2, r_2 n'est égale à zéro.

Cette variété constitue l'intersection résiduelle de la quadrique Q avec la surface cubique F en dehors de l'espace linéaire E_{n-4} d'équations $q_1 = q_2 = 0$. Ainsi, en posant $p = n - 2$, Q est une quadrique Q_p (spéciale si $p \geq 4$ avec l'espace double E_{p-4}, $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$) F une cyclide cubique T_p contenant un E_{p-2} de Q_p et la recoupant ultérieurement suivant la quintique $q_p = V^5_{p-2}$ d'équations (4). Le système s'écrit encore

$$(5) \qquad PQ + \lambda F + \mu G = 0,$$

ou $P = 0$ est l'équation de la trace E_{p-1} sur l'espace (u_i) de l'hyperplan de section E_{n-1}, λ et μ des constantes. Sa dimension est n; les surfaces cubiques qui le constituent sont coupées par Q en dehors de la quintique q_p suivant un E_{p-2} qui a pour équations $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{\lambda}{\mu}$, et fait donc partie du système des E_{p-2} générateurs de Q; celui-ci contient $p_1 = p_2 = 0$ ainsi que $q_1 = q_2 = 0$. Nous l'appellerons 1^er^ système. Ces E_{p-2} (exemple $p_1 = p_2 = 0$) coupent q_p suivant une variété cubique V^3_{p-3} (telle que la section de F), tandis que ceux de l'autre système (exemple $p_1 = q_1 = 0$) rencontrent q_p suivant une variété quadrique V^2_{p-3} (telle que la section de $r_2 = 0$).

Résumons l'essentiel :

Les images des sections planes de B_n *forment un système linéaire de cyclides* (¹) T_p *passant par une quintique* q_p *elles recoupent la quadrique* Q_p *qui la contient suivant le premier système de ses* E_{p-2} *générateurs.*

Parmi elles s'en trouvent ∞^p décomposées en la quadrique Q et un E_{p-1} quelconque P, images de la section par l'hyperplan ΔP. Les points de la section ayant leurs projections sur Q sont ceux qui sont infiniment voisins de Δ. Il y a en effet pour les coordonnées d'un point N de Q impossibilité du système (1), donc aucun point de B_n en dehors de Δ dans le plan ΔN. Q se présente alors comme la base dans E_p de la quadrique (spéciale) formée par les plans E_2 tangents à B_n passant par Δ; pour un tel plan les deux génératrices D_1, D_2 de la section se coupent sur Δ. Quand elles sont confondues il y a indétermination pour le système (1), exprimée par les équations (4) de la quintique; on est en présence d'une droite D de B_n rencontrant Δ, et le plan DΔ a pour trace sur E_p un point N de q_p. Dans la section hyperplane de B_n, le point situé sur D a toujours pour projection N; on s'explique que

(¹) Au sens des notations. Elles n'ont pas l'ombilicale commune.

la quintique figure comme base du système linéaire image des sections planes.

Examinons le cas des petites valeurs de p :

$p=2$. — La représentation d'une B_4 se fait par un système linéaire de cubiques passant par 5 points, qui définissent la conique Q, et sont les images de 5 droites rencontrant Δ, tandis que Q est l'image de Δ elle-même. L'hyperplan qui contient Δ et deux d'entre elles recoupe B_4 suivant une 4e droite; sa projection joint deux des points, on trouve ainsi $C_5^2 = 10$ autres droites, ce qui fait 16 au total.

$p=3$. — Le système représentatif est celui des surfaces cubiques (1) ayant une quintique base commune (2). Les génératrices du 1er système de la quadrique qui la contient sont des trisécantes, tandis que celles du 2e système sont des cordes s'appuyant sur les précédentes.

$p=4$. — Q devient un cône de sommet $p_1=p_2=q_1=q_2=0$. La cyclide F admet 4 points doubles définis par

$$q_1=q_2=r_1=r_2=0$$

(les dérivées partielles s'annulent en effet pour les coordonnées d'un de ces points). Chaque surface cubique du système, qui est une T_4 possède de même 4 points doubles. Ces surfaces se distinguent essentiellement de la surface cubique générale, et c'est une différence fondamentale avec l'espace ordinaire.

$p=5$. — Q_5 est un cône à droite double; les T_5 sont des cyclides ayant une B_3 de points doubles.

$p=6$. — Q_6 admet l'E_2 double $p_1=q_1=p_2=q_2=0$; les T_6 ont une B_4 de points doubles, et les 4 points vérifiant

$$p_1=q_1=p_2=q_2=r_1=r_2=0$$

sont triples pour la quintique. En effet, un E_2 passant par l'un de ces points, qui est double pour Q et T, coupe T suivant une

(1) *Cf.* ENRIQUES, p. 556 : droites d'une surface cubique d'après son image plane.

(2) Il figure comme l'un des types birationnellement distincts de systèmes linéaires de degré > 3, à intersections variables elliptiques (GODEAUX, p. 35).

cubique nodale et Q le long de deux droites se croisant au point double et recoupant la cubique en deux points seulement.

Ce raisonnement s'étend mot pour mot quand $p > 6$; il conduit à l'existence sur q_p d'une $B_{p-1} \equiv V^4_{p-6}$ située dans l'E_{p-4} double de Q et dont tous les points sont triples.

Abordons pour terminer une réciproque : un système de $p+2$ surfaces cubiques T_p ayant une quintique base commune q_p définit-il une B^2_{p+2}? Soit une surface cubique et une quadrique ayant un plan commun ($p_1 = p_2 = 0$); leurs équations se mettent sous la forme $G = p_2 r_1 - p_1 r_2 = 0$, $Q = p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$ (comme on le voit en prenant p_1 et p_2 comme plans de coordonnées); leur quintique commune a pour équations $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r^2}$ et la surface cubique $F = q_1 r_2 - q_2 r_1$ la contient aussi, Q, F, G sont trois formes bases définissant la varieté algébrique q_p, et toutes les formes cubiques qui la contiennent sont, d'après un théorème de Nœther, $PQ + \lambda F + \mu G$, où P est une forme linéaire, λ et μ des constantes. Par un changement des $p+2$ formes de base données, qui équivaut à une homographie dans E_n, on se ramène aux expressions (3) des x_i d'où l'on déduit (1). La réponse est affirmative.

3. **Cas particuliers.** — La représentation paramétrique (3) de B_p englobe le cas particulier où l'une des quadriques (1) est un cône de sommet A_n situé sur Δ. Ceci entraîne $p_1 = 0$, et, pour B_n, l'existence d'un point double A_n. Les formules (3) deviennent

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 = -u_1 p_2 q_1, & x_2 = -u_2 p_2 q_1, & \ldots, & x_{n-1} = -u_{n-1} p_2 q_1. \\ & x_n = q_1 r_2 - q_2 r_1, & x_{n+1} = p_2 r_1. & \end{array} \right.$$

Le système linéaire des surfaces S images des sections planes $\lambda_i x_i = 0$ est formé de cyclides cubiques ayant en commun la variété d'équations $p_2 q_1 = 0$, $p_2 r_1 = 0$, $q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0$, soit la quintique q_p décomposée suivant

$$q_1 = 0, \quad r_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad p_2 = 0, \quad q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0.$$

La première variété est une quadrique Q_{p-1} de l'espace $q_1 = 0$ elle rencontre la deuxième, cubique, suivant la Q_{p-2} :

$$p_2 = q_1 = r_1 = 0.$$

Cette cubique est donc une cyclide T_{p-1}. Ainsi :

Quand B_n *admet un point double, on peut prendre comme quintique de base du système représentatif une variété décomposée en une quadrique* Q_{p-1} *et une cyclide cubique* T_{p-1} *passant par une* Q_{p-2} *de la quadrique.*

Lorsque $p = 2$, trois des cinq points bases du système linéaire de cubiques sont alignés sur la droite $p_2 = 0$.

Pour $p = 3$ la quintique est décomposée en une conique et une cubique plane la rencontrant en deux points [1].

Remarque. — Pour $p = 2$, dans le cas général (3), le système S est birationnellement équivalent à celui des cyclides du 4[e] ordre C_2 passant par 4 points fixes. Il suffit pour le voir d'effectuer une transformation quadratique ayant pour sommets du triangle fondamental deux des cinq points bases, que nous prenons pour points cycliques dans le langage. Quand les quatre points fixes sont sur un même cercle, B_4 admet un point double.

Cette remarque ne s'étend pas à l'espace ($p = 3$). C'est seulement dans le cas particulier du point double qu'on peut réaliser la représentation paramétrique d'une B_5 par des cyclides du 4[e] ordre C_3. En effectuant alors une inversion qui prend pour ombilicale la conique commune à toutes les cyclides T_2 du système S, on les transforme en cyclides C ayant une cyclique sphérique ou plane commune. Il en va de même pour $p > 3$.

Il nous reste à faire rentrer dans le type (3′) donc (3) le cas particulier B réservé au 1. Rappelons les hypothèses : aucun point de Δ n'est double pour la 2[e] quadrique, tandis que la 1[re] admet Δ comme droite double. C'est un lieu de plans passant par Δ ; celle-ci est double pour la B_n, alors constituée par des droites rencontrant Δ. Un changement de repère permet d'obtenir la conclusion suivante :

La représentation (3′) *convient au cas réservé du* 1. *La par-*

---

[1] Le genre g de la courbe décomposée est lié à celui des courbes composantes g_1 et g_2 d'après la formule $g = g_1 = g_2 + i - 1$ ou i est le nombre des points de jonction (ENRIQUES, p. 403). $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, $i = 2$ donc $g = 2$ comme dans le cas général.

ticularité porte sur la quadrique Q_{p-1}, *qui devient spéciale, et dont la singularité peut aller jusqu'à la décomposition en deux* E_{p-2}.

Exemple : $p = 3$, quintique constituée par deux droites concourantes et une cubique plane rencontrant chacune d'elles. La B_5 correspondante admet une droite double.

Nous n'avons pas voulu, dans cette étude, tenter une classification des B_n, mais montrer seulement que la représentation paramétrique (3) convient à toute B_n non conique, tandis que la représentation particulière (3') traduit la présence d'éléments doubles dans C_n.

4. Rationalité des cyclides. — *a. Cyclides* C_p *du* 4^e *ordre.* — La projection d'une B_{p+1} faite d'un point O extérieur, sur un E_p ne passant pas par O, est une surface du 4^e ordre C_p. Il y a dans cette projection correspondance birationnelle entre E_p et la quadrique Q_{p+1} du faisceau, qui passe par O et contient B_{p+1} ; la rationalité de B_{p+1} entraîne celle de C_p, elle lui est équivalente. La section de Q_{p+1} par son plan tangent en O a pour trace sur E_p une Q_{p-1} qui est double pour C_p : il est facile de voir en effet qu'une droite de E_p s'appuyant sur Q_{p-1} ne recoupe C_p qu'en deux points. C_p est donc bien une cyclide du 4^e ordre de l'espace E_p.

Réciproquement, toute cyclide C_p du 4^e ordre peut s'obtenir par projection d'une B_{p+1}, car $X_{p+1} = 0$ et $\varphi_1(x_1, \ldots, x_p) = 0$ étant les équations de la Q_{p-1} double, la cyclide aura pour équation par rapport aux coordonnées absolues $x_1, \ldots, x_p$

$$\varphi_1^2 + \varphi_1 P_1 + \varphi_2 = 0.$$

où φ_1 est une forme quadratique et P_1, φ_2 des polynomes du 1^{er} et du 2^e degré respectivement, équation qui résulte de l'élimination de x_n entre les deux quadriques Q_{p+1}

$$x_n - \varphi_1 = 0, \qquad x_n^2 + x_n P_1 + \varphi_2 = 0.$$

Celles-ci définissent une B_{p+1} qui se projette suivant C_p du point $A_n(00\ldots 1)$.

La représentation paramétrique s'obtient immédiatement si l'on choisit Q comme sommet du repère dans E_{p+1}, les $p+1$ autres sommets se trouvant dans E_p; elle est fournie par les $p+1$ expressions des coordonnées correspondantes de B_{p+1}. Donc :

On peut toujours obtenir une représentation rationnelle d'une C_p par $p+1$ cyclides cubiques T_{p-1}, de l'espace des paramètres E_{p-1}, qui possèdent une quintique q_{p-1} commune.

b. Cyclides T_p du 3^e ordre. — Quand le point O est sur B_{p+1} la projection est du 3^e ordre. Elle contient la trace du plan tangent E_{p-1} à B_{p+1}, qui est un E_{p-2}. Elle se fait donc suivant une cyclide cubique T_p. Réciproquement toute T_p s'obtient de cette manière, car $x_{p+1}=0$ et $x_p=0$ étant les équations du E_{p-2}, T_p aura pour équation par rapport aux coordonnées absolues $x_1, \ldots, x_p$: $x_p\varphi_1+\varphi_2=0$ (où φ_1 est une forme quadratique et φ_2 un polynome du 2^e degré), équation qui résulte de l'élimination de x_n entre $x_n-\varphi_1=0$, $x_px_n+\varphi_2=0$. Celles-ci définissent une B_{p+1}, qui se projette suivant T_p du point $A_n(00\ldots1)$ situé sur B_{p+1}. La rationalité de B_{p+1} entraîne celle de T_p, dont les $p+1$ premières équations (3) nous fournissent une représentation paramétrique particulière; les $p+1$ surfaces correspondantes de l'espace des paramètres sont des cyclides cubiques T_{p-1} ayant en commun l'intersection complète de Q et F, décomposée suivant la quintique q_p et un E_{p-2} de Q du 1^er^ système. Cette propriété subsiste après changement du repère dans E_p. Donc :

On peut toujours obtenir une représentation rationnelle d'une T_p par $p+1$ cyclides cubiques T_{p-1} se rencontrant suivant une quintique q_{p-1} et un E_{p-3} du 1^er^ système de la quadrique Q_{p-1} qui la contient.

$p=3$. — Réseau des cubiques passant par 6 points, représentant la surface cubique la plus générale de l'espace ordinaire. On le transforme birationnellement en cycliques passant par 5 points fixes au moyen d'une transformation quadratique.

$p=4$. — Réseau des surfaces cubiques ayant en commun une quintique de genre 2 et l'une de ses cordes trisécantes. On représente ainsi la T_4, qui n'est pas comme on l'a vue au 2 la variété cubique à trois dimensions la plus générale de l'espace à quatre dimensions, malheureusement, car autrement sa rationalité serait démontrée.

Nous voyons ici pourquoi les deux problèmes annoncés dans l'introduction divergent : T_4 a un point double (elle en a même 4 situés dans un E_2); on ne s'étonne plus de sa rationalité, ni de celle de B_3. Il en va de même pour $p > 4$, où les points doubles de T_p sont tous les points d'une B_{p-2}.

Remarque. — Il est facile de voir dans l'espace à p dimensions, en prenant l'origine au point double d'une V^3_{p-1} qui en possède un, que le réseau des surfaces cubiques qui la représentent rationnellement dans un E_{p-1} a pour base l'intersection générale d'une surface cubique quelconque et d'une quadrique, tandis que pour une T_p, cette intersection est comme on l'a vu décomposée (¹).

5. **Exemple.** — Illustrons la représentation rationnelle d'une B_n par l'exemple d'une B_3 déterminée, d'équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_4^2 - 2x_6^2 = 0, \end{cases}$$

nous apercevons sur B_3 la droite (²)

$$(\Delta)\qquad \begin{cases} x_1 = x_2 = x_6. \\ x_3 = x_4 = x_5. \end{cases}$$

Opérons le changement de variables, défini par

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 = x'_1, & x_3 = x'_3 \\ x_2 - x_1 = x'_2, & x_4 - x_3 = x'_4 \\ x_6 - x_1 = x'_6, & x_5 - x_3 = x'_5 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{matrix} x_1 = x'_1. & x_3 = x'_3, \\ x_2 = x'_1 + x'_2. & x_4 = x'_3 + x'_4. \\ x_6 = x'_1 + x'_6. & x_5 = x'_3 + x'_5. \end{matrix}$$

Les équations de Δ deviennent $x'_2 = x'_4 = x'_5 = x'_6 = 0$ et celles des deux quadriques doivent être linéaires en x'_1 et x'_3. Elles s'écrivent en effet

$$2x'_1 x'_2 + 2x'_3(x'_4 + x'_5) + x'^2_2 + x'^2_4 + x'^2_5 = 0,$$
$$2x'_1(x'_2 - 2x'_6) - 6x'_3 x'_4 + x'^2_2 - 2x'^2_4 - 2x'^2_6 = 0.$$

(¹) C'est ainsi que pour $p = 4$ la sextique gauche de genre 4 (Enriques, p. 180) dégénère en quintique de genre 2 et corde trisécante, sur lesquelles on peut comme au 3, vérifier la formule du genre d'une courbe décomposée ($4 = 2 + 0 + 3 - 1$).

(²) Si aucune droite n'était apparente, il faudrait prendre un point sur B_5 et couper par le plan tangent. On obtiendrait ainsi 4 droites.

Nous en sommes au stade des équations (1). Prenons comme paramètres $x'_1 = u$, $x'_4 = v$, $x'_5 = w$, $x'_6 = h$; résolvons en x'_1 et x'_3, chassons les dénominateurs et revenons aux x_i par les formules (7), on obtient les équations paramétriques suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= -3v(u^2+v^2+w^2)-(v+w)(u^2-3v^2-2h^2),\\
x_2 &= -3v(u^2+v^2+w^2)-(v+w)(u^2-3v^2-2h^2)+2u[3uv+(v+w)(u-2h)],\\
x_3 &= -(u-2h)(u^2+v^2+w^2)+u(u^2-3v^2-2h^2),\\
x_4 &= -(u-2h)(u^2+v^2+w^2)+u(u^2-3v^2-2h^2)+2v[3uv+(v+w)(u-2h)],\\
x_5 &= -(u-2h)(u^2+v^2+w^2)+u(u^2-3v^2-2h^2)+2w[3uv+(v+w)(u-2h)],\\
x_6 &= -3v(u^2+v^2+w^2)-(v+w)(u^2-3v^2-2h^2)+2w[3uv+(v+w)(u-2h)].
\end{aligned}\right.$$

La quintique q de base a pour équations

$$\frac{u}{u-2h} = \frac{v+w}{-3v} = \frac{u^2+v^2+w^2}{u^2-3v^2-2h^2}.$$

La vérification directe des identités qu'on obtient en portant dans (6) les expressions (8) des x_i n'est plus alors qu'une assurance contre les accidents de calcul.

Il est à noter qu'en prenant pour u, v, w, h des nombres entiers, les formules (8) donnent une infinité à 4 paramètres de solutions en nombres entiers du système (6). C'est ainsi que les nombres 1, 2, 3, 4 fournissent, au signe près, qui n'intervient pas dans (6) pour x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 les valeurs

131, 73, 55, 61, 119, 101

qui sont effectivement une solution.

(Manuscrit reçu le 15 mars 1945).