BULLETIN DE LA S. M. F.

VICTOR THÉBAULT

# Sur une nouvelle sphère du tétraèdre orthocentrique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 74 (1946), p. 26-30

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__26_0>

## SUR UNE NOUVELLE SPHÈRE DU TÉTRAÈDRE ORTHOCENTRIQUE;

PAR M. V. THÉBAULT.

Tennie (Sarthe).

1. **Généralités.** — Dans un tétraèdre quelconque $T \equiv ABCD$, on désigne suivant l'usage par $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$, les arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC et les dièdres correspondants, par A, B, C, D les aires des faces opposées aux sommets A, B, C, D et par V le volume.

A. Les plans menés par chacune des arêtes et qui partagent l'arête opposée en deux segments proportionnels aux carrés des aires des faces passant par la première, concourent en un point K dont la somme des carrés des distances aux faces du tétraèdre T est minimum. (Premier point de LEMOINE.) Les coordonnées barycentriques de ce point sont $(A^2, B^2, C^2, D^2)$ et ses distances aux faces BCD, CDA, DAB, ABC sont égales à

$$d_a = \frac{3\,AV}{A^2+B^2+C^2+D^2}, \qquad \ldots, \qquad d_d = \frac{3\,DV}{A^2+B^2+C^2+D^2}.$$

B. Si l'on projette orthogonalement un point $A_1$ de la face BCD du tétraèdre T en $B_1$ sur la face CDA, puis que l'on projette $B_1$ en $D_1$ sur la face CBA et $D_1$ en $C_1$ sur la face BDA, ([1]) la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\overrightarrow{C_1A_1}$ soit perpendiculaire à la face BCD est que les vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$ soient proportionnels aux aires B, D, C, A des faces vers lesquelles ils sont dirigés.

Si un quadrangle gauche $Q_1 \equiv A_1B_1D_1C_1$ est orthogonalement inscrit à un tétraèdre quelconque T, les plans perpendiculaires aux côtés $A_1B_1$, $B_1D_1$, $D_1C_1$, $C_1A_1$ en leurs milieux concourent donc au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $T_1 \equiv A_1B_1D_1C_1$ qui coïncide avec le premier point de LEMOINE K du tétraèdre T

([1]) Pour fixer les idées, on suit le sens positif BDC sur le périmètre du triangle BDC dans la succession des faces CDA, BAC, DAB du tétraèdre T.

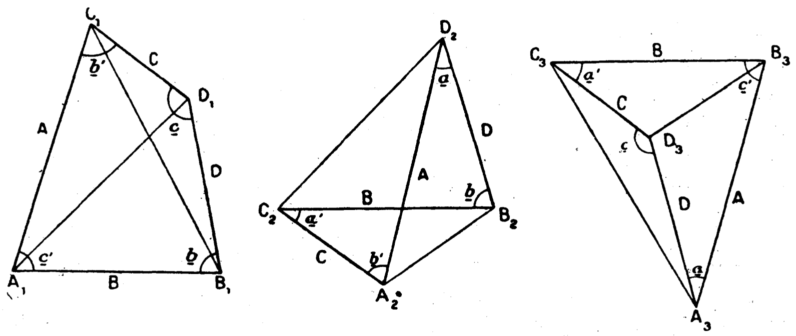
dont les coordonnées normales sont porportionnelles à $C_1A_1$, $A_1B_1$, $B_1D_1$, $D_1C_1$; de sorte que

$$C_1A_1 = 2\,d_a,\quad A_1B_1 = 2\,d_b,\quad D_1C_1 = 2\,d_c,\quad B_1D_1 = 2\,d_d.$$

Le tétraèdre T étant donné, on construit donc aisément le quadrangle $Q_1$. Il y a trois quadrangles gauches

$$Q_1 \equiv A_1B_1D_1C_1,\qquad Q_2 \equiv A_2C_2B_2D_2,\qquad Q_3 \equiv A_3D_3C_3B_3,$$

orthogonalement inscrits au tétraèdre T, et si l'on parcourt le périmètre du triangle BDC dans le sens opposé, on en détermine trois autres $Q'_1$, $Q'_2$, $Q'_3$.




Les angles $A_1$, $B_1$, $D_1$, $C_1$ du quadrangle gauche $Q_1$ sont égaux à $c'$, $b$, $c$, $b'$; les diagonales $B_1C_1$, $A_1D_1$ sont parallèles aux plus courtes distances des arêtes AB et DC, AC et DB, leurs longueurs sont inversement proportionnelles à celles-ci, et l'on a des conclusions analogues pour les angles et les diagonales des quadrangles gauches $Q_2$ et $Q_3$. Donc,

$$A_1C_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = 2\,d_a,\qquad B_1A_1 = B_2C_2 = B_3C_3 = 2\,d_b,$$
$$C_1D_1 = C_2A_2 = C_3D_3 = 2\,d_c,\qquad D_1B_1 = D_2B_2 = D_3A_3 = 2\,d_d,$$

$$(1)\qquad A_1D_1 = C_2D_2 = k(A^2 + C^2 - 2AC\cos b')^{\frac{1}{2}}$$
$$= k(B^2 + D^2 - 2BD\cos b)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\,bb'\sin\theta\,[1],$$

$$B_1C_1 = A_3C_3 = \frac{k}{2}\,cc'\sin\theta',\qquad A_2B_2 = B_3D_3 = \frac{k}{2}\,aa'\sin\theta'',$$

---

(1) En vertu d'une relation de G. Dostor (*Le trièdre et le tétraèdre, avec application des déterminants*, p. 143).

$\theta$, $\theta'$, $\theta''$ étant les angles des arêtes CA et DB, AB et DC, BC et DA, en posant

$$k = \frac{6V}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}. \tag{2}$$

**2.** Théorème. — *Dans un tétraèdre orthocentrique* $T \equiv ABCD$, *les sommets des quadrangles gauches* $Q_1$ *et* $Q'_1$, $Q_2$ *et* $Q'_2$, $Q_3$ *et* $Q'_3$, *orthogonalement inscrits, sont vingt-quatre points situés sur une même sphère dont le centre coïncide avec le premier point de* Lemoine K.

En effet, dans les tétraèdres $T_1 \equiv A_1B_1D_1C_1$, $T_2 \equiv A_2C_2B_2D_2$, $T_3 \equiv A_3D_3C_3B_3$, les dièdres suivant les arêtes $B_1C_1$ et $A_1D_1$, $A_2B_2$ et $C_2D_2$, $A_3C_3$ et $B_3D_3$, sont droits. Or, si l'on transporte le tétraèdre $T_2$ de façon que la face $C_2B_2D_2$ coïncide avec la face $A_1B_1D_1$ du tétraèdre $T_1$ qui lui est égale, le plan de la face $C_2A_2D_2$ coïncide avec celui de la face $C_1A_1D_1$ et le point $A_2$ avec le symétrique du point $C_1$, par rapport à la médiatrice du côté $A_1D_1$, c'est-à-dire en un point de la circonférence circonscrite au triangle $C_1A_1D_1$ situé aussi sur la sphère circonscrite au tétraèdre $T_1$. Les sphères circonscrites aux tétraèdres $T_1$ et $T_2$ sont donc égales, de même que les sphères circonscrites aux tétraèdres $T_2$ et $T_3$ pour la même raison. Ces trois sphères coïncident puisqu'elles ont pour centre commun le premier point de Lemoine K du tétraèdre fondamental, (1, B). Les sommets des quadrangles gauches $Q'_1$, $Q'_2$, $Q'_3$ étant visiblement symétriques de ceux des quadrangles $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, par rapport au point K, le théorème est donc démontré.

*Calcul du rayon $\sigma$ de la sphère* $(K, \sigma)$. — Soient M le milieu du côté $A_1D_1$, $\omega_1$ et $\omega_2$ les centres des cercles circonscrits aux triangles $A_1B_1D_1$ et $A_1C_1D_1$, de rayons $\rho_1$ et $\rho_2$. On a successivement

$$\rho_1 = A_1D_1 : 2\sin b, \qquad \rho_2 = A_1D_1 : 2\sin b'$$
$$K\omega_1 = \omega_2 M = \rho_2 \cos b' = A_1D_1 : 2\cot b',$$

et, en vertu des égalités (1),

$$\sigma = KA_1 = \left(\overline{K\omega_1}^2 + \overline{\omega_1 A_1}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} A_1D_1 . \left(\frac{1}{\cot^2 b'} + \frac{1}{\sin^2 b}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{kbb'}{4\sin b \sin b'} (1 - \cos b \cos b')^{\frac{1}{2}}.$$

Or,

$$\sin b = \frac{3bV}{2BD}, \qquad \sin b' = \frac{3b'V}{2CA};$$

en définitive, eu égard à (2),

$$\sigma = \frac{2ABCD}{3(A^2+B^2+C^2+D^2)V}(1-\cos b \cos b')^{\frac{1}{2}}.$$

Le rayon $\sigma$ de la sphère circonscrite au tétraèdre $T_1$ est bien égal à ceux des sphères circonscrites aux tétraèdres $T_2$ et $T_3$, car, dans le tétraèdre orthocentrique T,

$$\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c'.$$

Cette sphère $(K, \sigma)$ peut être appelée *seconde sphère de* LEMOINE du tétraèdre orthocentrique T, par analogie avec le cercle du même nom dans le triangle.

N. B. — *Les tétraèdres* $T_1$, $T_2$, $T_3$ *ont chacun deux dièdres opposés droits et leurs volumes sont équivalents. Les perpendiculaires communes aux deux couples d'arêtes opposées n'appartenant pas aux dièdres droits sont rectangulaires.*

En vertu des relations (1),

$$A_1^2 + C_1^2 = B_1^2 + D_1^2, \qquad A_2^2 + B_2^2 = C_2^2 + D_2^2, \qquad A_3^2 + C_3^2 = B_3^2 + D_3^2.$$

3. Nous avons montré que dans un tétraèdre quelconque T, les sphères circonscrites aux tétraèdres $T_1$, $T_2$, $T_3$ dont les sommets coïncident avec ceux des quadrangles gauches $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, ont pour centre commun le premier point de LEMOINE K, mais qu'elles ne coïncident pas [1] (*secondes sphères de* LEMOINE).

Ajoutons que les volumes des tétraèdres $T_1$, $T_2$. $T_3$ sont encore équivalents et qu'ils ont pour expression commune

$$v = \frac{162V^5}{(A^2+B^2+C^2+D^2)^3}.$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 1944, t. 218, pp. 25-27.

Enfin, de cette expression des volumes des tétraèdres $T_1$, $T_2$, $T_3$ et des formules (1), il résulte que *les plus courtes distances des côtés opposés des quadrangles gauches* $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ *sont inversement proportionnelles à deux arêtes opposées du tétraèdre* T *et celles des diagonales aux produits d'une des plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre* T *par le sinus de l'angle des deux autres.*

(Manuscrit reçu le 9 juin 1945.)