BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

# Sur les tétraèdres dont certaines bihauteurs se rencontrent

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 76 (1948), p. 79-94
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__79_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR LES TÉTRAÈDRES DONT CERTAINES BIHAUTEURS SE RENCONTRENT;

PAR M. B. GAMBIER.

**1. Introduction.** — Ce travail étudie d'abord les quadrilatères gauches tels que les *perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées se rencontrent* (pour abréger, nous emploierons le mot *bihauteur*; de même *bimédiane* signifiera une droite joignant les milieux de deux côtés opposés). Ces quadrilatères se séparent en deux familles distinctes :

Série A : *les pieds des bihauteurs sont sur un même cercle.*
Série B : *les bihauteurs se coupent à angle droit.*

En passant ensuite aux tétraèdres ABCD, nous cherchons sous quelles conditions la bihauteur (AB, CD) relative au couple AB, CD est rencontrée par chacune des deux autres, sans que ces deux dernières se rencontrent nécessairement : cela introduit les divers schémas [A, A], [A, B], [B, B], suivant que les deux quadrilatères gauches (ABCD) et (ADBC) qui sont intervenus appartiennent à l'une ou l'autre série (A) ou (B). Enfin nous chercherons sous quelles conditions nouvelles les deux dernières bihauteurs sont elles-mêmes sécantes et nous verrons qu'il n'y a que trois cas possibles schématisés par [A, A, A], [A, B, B], [B, B, B], le schéma [A, A, B] ne pouvant être obtenu que comme cas particulier de [A, A, A]; ces trois cas sont bien connus : appelons Π le parallélépipède dont les six faces sont les plans menés par chaque arête du tétraèdre T (ABCD) parallèlement à l'arête opposée; [A, A, A] *correspond au cas où les faces de* Π *sont des losanges, de sorte que* T *est orthocentrique;* [A, B, B] *est le cas où* Π *est droit, avec une base losange;* [B, B, B] *est le cas où* Π *est rectangle*, T *est équifacial.*

La méthode suivie ici ne fait appel qu'à la géométrie élémentaire, sans recours à la géométrie du tétraèdre ni à la théorie des quadriques. Ce travail a été suggéré par un article très condensé de M. Ehrhart (*Revue de Mathématiques spéciales*, Paris, Vuibert, avril 1948); au cours de la rédaction, le Général Marmion m'a communiqué un article élégant qu'il a publié sur ce même sujet (*Mathesis*, 57, 1948, p. 8-17), et cela expliquera pourquoi j'ai adopté plus loin les notations de M. Marmion; j'ai pu, grâce à une suggestion de M. Marmion, préciser une question de signe délicate qui se présente dans l'étude du schéma [A, A].

**2. Quadrilatères gauches.** — A propos de la question classique : *condition nécessaire et suffisante pour que les points* X, Y, Z, T *marqués sur les* *côtés* AB, BC, CD, DA *du quadrilatère gauche* ABCD *soient coplanaires*, nous nous permettrons de rappeler une démonstration, d'ailleurs classique, rendant possible de lever ultérieurement la difficulté de signe signalée plus haut.

La relation en jeu (*fig.* 1), est

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}\frac{\overline{YB}}{\overline{YC}}\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}\frac{\overline{TD}}{\overline{TA}}=+1. \tag{1}$$

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer que la relation est *nécessaire* pour pouvoir affirmer, *sans nouvelle démonstration*, qu'elle est *suffisante*; car

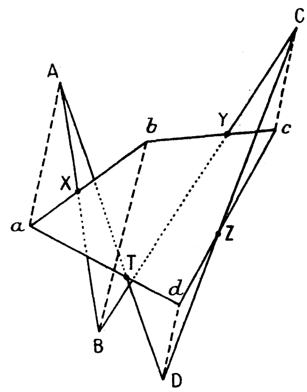


Fig. 1.

trois points X, Y, Z pris arbitrairement sur AB, BC, CD déterminent un plan *unique* coupant le dernier côté DA en un point *unique* T, déterminé précisément par la condition [1].

Pour démontrer que la relation est nécessaire, projetons la figure sur le plan XYZT parallèlement à une direction quelconque $\delta$, de façon à obtenir le quadrilatère plan *abcd* dont les côtés passent respectivement en X, Y, Z, T. On a

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}},\qquad \frac{\overline{YB}}{\overline{YC}}=\frac{\overline{Bb}}{\overline{Cc}},\qquad \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}=\frac{\overline{Cc}}{\overline{Dd}},\qquad \frac{\overline{TD}}{\overline{TA}}=\frac{\overline{Dd}}{\overline{Aa}}.$$

En multipliant membre à membre, on obtient la relation annoncée. Si l'on remarque que $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{Xa}}{\overline{Xb}}$, ..., on pourra encore dire : *la condition nécessaire et suffisante pour que la figure formée par un quadrilatère plan a b c d et quatre points $x$, $y$, $z$, $t$ marqués sur les côtés ab, bc, cd, da puisse être consi-*

---

[1] On remarquera que, grâce à cette relation, on peut, dès le début de la géométrie élémentaire de l'espace à 3 dimensions, à propos des plans parallèles, obtenir la conception du paraboloïde hyperbolique et des deux systèmes de génératrices de cette surface, sans avoir besoin d'avoir étudié au préalable l'ensemble des quadriques.

*dérée comme la projection d'un quadrilatère gauche* ABCD *et de quatre points coplanaires* X, Y, Z, T, *marqués sur les côtés, est*

$$(1') \qquad \frac{\overline{xa}}{\overline{xb}} \frac{\overline{yb}}{\overline{yc}} \frac{\overline{zc}}{\overline{zd}} \frac{\overline{td}}{\overline{ta}} = +1.$$

Appelons *surface prismatique* S(ABCD) *adjointe au quadrilatère gauche* ABCD, la surface obtenue en menant par chaque côté le plan (illimité) parallèle au côté opposé. Les bihauteurs XZ, YT relatives aux couples (AB, CD) et (BC, AD) sont chacune perpendiculaires à un couple de faces opposées de S(ABCD), de sorte qu'en menant un plan de section droite de S(ABCD), la projection orthogonale, sur ce plan, du quadrilatère et de ses deux bihauteurs

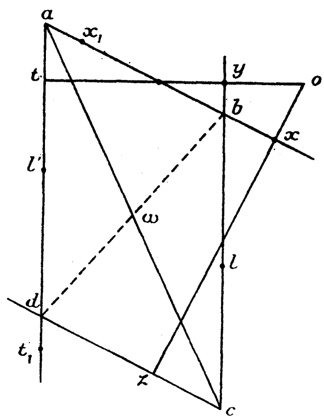


Fig. 2.

donne un parallélogramme *abcd* et deux segments *xz*, *yt* perpendiculaires aux côtés opposés (*fig.* 2); la condition nécessaire et suffisante pour que XZ, YT soient sécantes dans l'espace est donc

$$(2) \qquad \frac{\overline{xa}}{\overline{xb}} \frac{\overline{yb}}{\overline{yc}} \frac{\overline{zc}}{\overline{zd}} \frac{\overline{td}}{\overline{ta}} = +1,$$

ou

$$(2') \qquad \frac{\overline{xa}.\overline{zc}}{\overline{xb}.\overline{zd}} = \frac{\overline{yc}.\overline{ta}}{\overline{yb}.\overline{td}}.$$

Prenons $x_1$ symétrique de $z$ par rapport à ω centre du parallélogramme *abcd*; $x_1$ est sur *ab*; on a $\overline{zc} = -\overline{x_1 a}$ et $\overline{zd} = -\overline{x_1 b}$; de même, $t_1$ symétrique de $y$ par rapport à ω; il revient au même d'écrire

$$(3) \qquad \frac{\overline{xa}.\overline{x_1 a}}{\overline{xb}.\overline{x_1 b}} = \frac{\overline{t_1 a}.\overline{ta}}{\overline{t_1 d}.\overline{td}}.$$

On a évidemment $\omega x = \omega z = \omega x_1$, de sorte que $\overline{xa}.\overline{x_1 a}$ ou $\overline{ax}.\overline{ax_1}$ est la puissance ($\omega a^2 - \omega x^2$) de $a$ par rapport au cercle de centre $\omega$ et rayon $\omega x$; de même $\overline{xb}.\overline{x_1 b}$ est égale à $\omega b^2 - \omega x^2$; l'égalité (3) prend donc la forme

$$(3') \qquad \frac{\omega a^2 - \omega x^2}{\omega b^2 - \omega x^2} = \frac{\omega a^2 - \omega y^2}{\omega b^2 - \omega y^2}.$$

Si donc $\omega a = \omega b$, chaque membre de (3′) vaut l'unité, quels que soient $x$ et $y$ sur $ab$ et $bc$; *le parallélogramme est un rectangle*, *la surface* S(ABCD) *a ses dièdres droits*, XZ *et* YT *sont orthogonales;* c'est l'hypothèse B annoncée en introduction.

Si $\omega a \neq \omega b$, l'égalité (3′) exige $\omega x = \omega y$, de sorte que les *quatre pieds* X, Y, Z, T *des bihauteurs concourantes sont sur un même cercle :* c'est l'hypothèse A annoncée plus haut. *L'axe du cercle* XYZT *est alors la bimédiane* (AC, BD) *relative aux diagonales du quadrilatère gauche étudié.*

Autrement dit *nous avons décomposé la relation nécessaire et suffisante de concours des bihauteurs en un produit*

$$(\omega a^2 - \omega b^2)(\omega x^2 - \omega y^2) = 0,$$

de sorte que chacune des relations $\omega a = \omega b$ ou $\omega x = \omega y$ est *suffisante*, mais

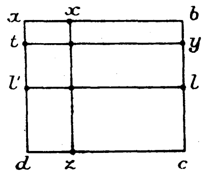


Fig. 3.

aucune des deux n'est *nécessaire* : l'étude est rendue un peu plus pénible en raison de ce fait.

On peut faire quelques remarques simples : si S(ABCD) a ses dièdres droits, $abcd$ est un rectangle et la figure (3) rend la relation (2) évidente puisque

$$\overline{xa} = \overline{zd}, \qquad \overline{xb} = \overline{zc}, \qquad \overline{yb} = \overline{ta}, \qquad \overline{yc} = \overline{td};$$

si nous considérons la bihauteur (AB, CD) et la bimédiane (BC, AD), elles se rencontrent, parce qu'elles ont encore pour projection deux segments $xy$ et $ll$ perpendiculaires aux côtés opposés du rectangle; au contraire, dans le cas de la figure 2, $l$ et $l'$ étant encore les milieux de $bc$, $ad$, l'égalité de $\dfrac{\overline{xa}\cdot\overline{zc}}{\overline{xb}\cdot\overline{zd}}$ ou $\dfrac{\omega a^2 - \omega x^2}{\omega b^2 - \omega x^2}$ et de $\dfrac{\overline{lc}}{\overline{lb}}\cdot\dfrac{\overline{l'a}}{\overline{l'b}}$ ou 1 n'est pas réalisée, de sorte que l'on peut énoncer le résultat suivant :

*la condition nécessaire et suffisante pour que les bihauteurs* (AB, CD) *et* (BC, AD) *se rencontrent, à angle droit, est que la bihauteur* (AB, CD) *rencontre la bimédiane* (BC, AD); dans cet énoncé on peut aussi bien associer la bimédiane (AB, CD) à la bihauteur (BC, AD).

En revenant au cas A, si O est le point de rencontre de $xz$ et $ty$, on a $\overline{Ox}\,\overline{Oz} = \overline{Oy}\,\overline{Ot}$; le premier membre est la puissance de O par rapport au cercle décrit sur $xy$ comme diamètre, égal donc à $\alpha^2 - A^2$, où $\alpha$ est la distance de O à la parallèle à $ab$ ou $cd$, issue de $\omega$, et A la demi-distance de $ab$ et $cd$; de même $\overline{Oy}\,\overline{Ot}$ est $\beta^2 - B^2$, $\beta$ et B étant définies de la même façon avec la parallèle à $bc$ et $cd$ issue de $\omega$; on a donc $\alpha^2 - \beta^2 = A^2 - B^2$ et le lieu de O est l'hyperbole équilatère de centre $\omega$, passant aux sommets de $abcd$; les asymptotes sont les bissectrices des diagonales $ac$, $bd$ [1].

3. **Expression analytique de la condition (A) ou (B) de concours des bihauteurs du quadrilatère ABCD.** — Commençons par le cas A. Nous pouvons supposer que le plan de la figure 2 est le plan XYZT (de sorte qu'il sera indifférent d'écrire X ou $x$, Y ou $y$, Z ou $z$, T ou $t$); la figure 4 représente le plan projetant AB;

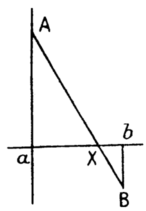


Fig. 4.

supposons que, dans ce plan, nous prenions comme axes rectangulaires : premier axe, $\overrightarrow{ab}$ orienté de $a$ vers $b$ *par exemple*; second axe, l'arête $a$A de S(ABCD) orientée comme on voudra; *le plan est ainsi orienté* et *l'angle* $\varphi_1$ *de droites indéfinies* ($ab$, AB), défini en grandeur et signe (à $k\pi$ près), donne la relation

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\alpha}{\overline{Xa}} = \frac{\beta}{\overline{Xb}} = \frac{\beta - \alpha}{\overline{ab}},$$

où $\alpha$, $\beta$ sont les cotes algébriques de A, B (avec la convention faite jusqu'ici, $\overline{ab}$ n'est autre que la mesure, en valeur absolue, de la longueur $ab$). Pour la même raison, si dans le plan parallèle à AB$ab$, projetant CD, plan CD$cd$, nous choisissons comme premier ou second axe : $\overrightarrow{dc}$ orienté de $d$ vers $c$, puis l'arête de S(ABCD) issue de D et orientée dans le même sens que l'arête issue de A, nous avons pour l'angle $\varphi_2 = (cd, \text{CD})$

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\delta}{\overline{Zd}} = \frac{\gamma}{\overline{Zc}} = \frac{\gamma - \delta}{\overline{dc}} = \frac{\gamma - \delta}{\overline{ab}},$$

$$(6) \qquad \overline{ab}(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1) = \alpha - \beta + \gamma - \delta.$$

[1] On remarquera aussi que $Oxby$ et $Otdz$ sont deux quadrilatères plans inversement semblables, les sommets homologues étant inscrits au même rang; même remarque pour $Oxab$ et $Oycz$.

De plus

$$(7)\qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\alpha\gamma}{\overline{\mathrm{X}a}.\overline{\mathrm{Z}c}} = \frac{\alpha\gamma}{\omega \mathrm{X}^2 - \omega a^2} = \frac{\beta\delta}{\overline{\mathrm{X}b}.\overline{\mathrm{Z}d}} = \frac{\beta\delta}{\omega \mathrm{X}^2 - \omega b^2}.$$

Nous allons de même, dans les plans parallèles $bc$BC, $ad$AD prendre comme axes orientés : premier axe, $\overrightarrow{bc}$ (ou $\overrightarrow{ad}$); second axe, la même direction que précédemment sur l'arête de S(ABCD); on a donc, si $\psi_1 = (bc, \mathrm{BC})$, $\psi_2 = (ad, \mathrm{AD})$

$$(6')\qquad \overline{bc}(\operatorname{tg}\psi_2 - \operatorname{tg}\psi_1) = \beta - \gamma + \delta - \alpha,$$

$$(7')\qquad \operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{\beta\delta}{\omega \mathrm{Y}^2 - \omega b^2} = \frac{\gamma\alpha}{\omega \mathrm{Y}^2 - \omega a^2}.$$

Il suffit évidemment de reprendre les formules (6), (7) et de faire une permutation circulaire sur les lettres $a$, $b$, $c$, $d$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; $\omega$X est remplacé par $\omega$Y.

*La comparaison de* $\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2$ *et* $\operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\psi_2$ *montre que la condition nécessaire et suffisante de concours des bihauteurs, dans l'hypothèse* (A), *peut encore s'exprimer par l'une ou l'autre des équations*

$$(8)\qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\psi_1 . \operatorname{tg}\psi_2,$$

$$(9)\qquad \overline{ab}\operatorname{tg}(\mathrm{AB}, \mathrm{CD}) + \overline{bc}\operatorname{tg}(\mathrm{BC}, \mathrm{DA}) = 0.$$

L'équation (9) se déduit des équations (6), (6′) ajoutées membre à membre après les avoir divisées au préalable par les quantités égales $1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2$ ou $1 + \operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\psi_2$.

Nous allons utiliser la relation (9) pour donner l'expression analytique précise de l'hypothèse (A); il est nécessaire, auparavant, de montrer que les conventions faites sur l'orientation adoptée séparément sur $ab$ ou $bc$ ou sur le choix de $ab$, $bc$ plutôt que $bc$, $cd$ n'ont aucune influence sur le résultat définitif; quant au choix du sens positif sur les arêtes de S(ABCD), pourvu qu'il soit le même sur toutes les arêtes, il n'a non plus aucune influence sur le résultat définitif.

Si nous changeons le sens positif adopté sur $ab$, nous changeons de signe à la fois $\overline{ab}$ et tg(AB, CD) : l'équation (9) ne change pas.

Si nous avons pris le parcours $bcd$ au lieu de $abc$, le terme relatif à $bc$ n'a pas changé; quant au terme $\overline{ab}\operatorname{tg}(\mathrm{AB}, \mathrm{CD})$, il est remplacé par $\overline{cd}\operatorname{tg}(\mathrm{CD}, \mathrm{AB})$ : or puisque nous venons de voir que le sens positif pris sur $ab$ ou $cd$ est sans influence, prenons le sens $\overrightarrow{ab}$ comme primitivement : alors $\overline{cd} = -\overline{ab}$ et (CD, AB) $=-$ (AB, CD), puisque l'orientation est restée la même dans les deux plans parallèles $ab$AB et $cd$CD; finalement $\overline{cd}\operatorname{tg}(\mathrm{CD}, \mathrm{AB})$ est égal à $\overline{ab}\operatorname{tg}(\mathrm{AB}, \mathrm{CD})$ parce que les deux termes du produit ont changé de signe.

Au lieu de tourner dans le sens $abc$, si nous tournons dans le sens $cba$, nous ne changerons pas la relation (9), puisque le sens positif adopté sur chaque côté du parallélogramme $abcd$ est indifférent.

Si l'on change le sens positif sur les arêtes de S(ABCD), chaque terme de (9) change de signe, de sorte que la relation subsiste encore.

Figurons le parallélépipède $\Pi$; *à un tétraèdre* T *correspond un seul* $\Pi$; *mais* *à un parallélépipède* Π *correspondent deux tétraèdres* T, T′ *symétriques par rapport au centre* G *de* Π *qui est aussi le centre de gravité de* T *ou de* T′ (*fig.* 5); en prenant, dans deux faces parallèles de Π, deux diagonales non parallèles, leurs extrémités sont les sommets de l'un des tétraèdres T; nous avons dénommé par la même lettre, avec ou sans accent, un sommet de Π et le sommet symétrique par rapport au centre de Π.

Notations : $a$, $b$, $c$, longueurs des côtés du triangle ABC; $a'$, $b'$, $c'$, longueurs des arêtes DA, DB, DC; $l$, $m$, $n$ bimédianes LL′ (BC, AD), MM′ (CA, BD), NN′(AB, CD); $\lambda$, $\mu$, $\nu$ faces du trièdre G(LMN) ou D′(ABC); L, M, N dièdres de ces trièdres (inutile de rappeler que $\lambda$, $\mu$, $\nu$, L, M, N sont des nombres compris entre o et $\pi$).

Pour calculer l'angle (AB, CD) ou (AB, C′D′) nous orientons, comme il a été

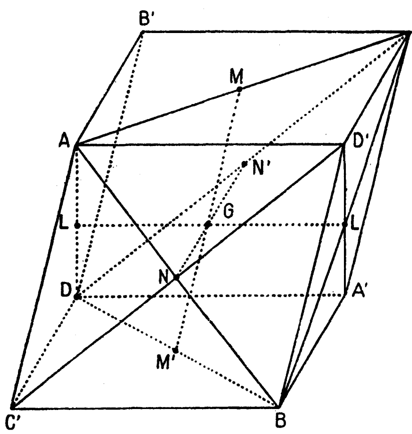


Fig. 5.

expliqué, le plan ABC′D′ en prenant, par exemple, comme premier axe la perpendiculaire abaissée de C′ sur BD′ orientée de C′ vers le côté BD′, (de sorte que $\overline{ab}$ soit un nombre positif) et comme second axe $\overrightarrow{C'A}$ : l'*une* des déterminations de (AB, C′D′) est l'angle $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NC'})$ ou simplement l'angle ANC′ du triangle ANC′, au sens du début de la géométrie élémentaire. Ce triangle ANC′ où AC′ $= m$, AN $= \frac{c}{2}$, C′N $= \frac{c'}{2}$ donne

$$(10)\qquad 4m^2 = c^2 + c'^2 - 2cc'\cos(\text{AB, CD}).$$

Ensuite les triangles AC′B et AD′C′ donnent

$$(11)\qquad \begin{cases} c^2 = l^2 + m^2 - 2lm\cos\nu, & c^2 + c'^2 = 2(l^2 + m^2), \\ c'^2 = l^2 + m^2 + 2lm\cos\nu, & c^2c'^2 = (l^2 + m^2)^2 - 4l^2m^2\cos^2\nu. \end{cases}$$

L'équation (10) peut donc s'écrire

$$(10')\qquad \cos(\text{AB, CD}) = \frac{l^2 - m^2}{cc'}, \qquad \sin^2(\text{AB, CD}) = \frac{c^2c'^2 - (l^2 - m^2)^2}{c^2c'^2} = \frac{4l^2m^2\sin^2\nu}{c^2c'^2}.$$

*Puisque nous nous sommes arrangés pour que* (AB, CD) *ait, pour détermination choisie, la valeur, au sens élémentaire,* $\widehat{ANC'}$, on en conclut

$$\sin(AB,\ CD) = \frac{2\,lm \sin\nu}{cc'}, \tag{12}$$

$$\operatorname{cotg}(AB,\ CD) = \frac{l^2 - m^2}{2\,lm \sin\nu}. \tag{13}$$

Pour calculer cotg(BC, DA), dans le plan BA′CD′, nous choisissons pour premier axe celui qui est mené de B perpendiculairement à A′C, orienté de B vers A′C et comme second axe BD′; on a alors (BC, DA) = (BC, D′A′) = (LB, LA′); mais alors on peut choisir, comme détermination, l'angle en L du triangle BLA′, au sens de la géométrie élémentaire. Il est donc inutile d'aller plus loin : nous voyons qu'il suffit de faire une permutation circulaire sur les lettres $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$; $l$, $m$, $n$; A, B, C; $\lambda$, $\mu$, $\nu$. On a donc

$$\operatorname{cotg}(BC,\ DA) = \frac{m^2 - n^2}{2\,mn \sin\lambda}. \tag{14}$$

Dans ces formules (13), (14), les nombres $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ ont été choisis *positifs* (par suite des hypothèses que nous avons le droit de faire); or $ab$, $cd$ sont inversement proportionnels à XZ et YT puisque $ab$ XZ et $bc$ YT représentent l'aire $abcd$; donc il revient au même d'écrire, avec les déterminations trouvées de cotg(AB, CD) et cotg(BC, AD),

$$XZ \operatorname{cotg}(AB,\ CD) + YT \operatorname{cotg}(BC,\ AD) = 0. \tag{14'}$$

Si V est le volume du tétraèdre ABCD, on a (V, XZ, $l$, $m$, $\sin\nu$ étant tous positifs)

$$6V = XZ \text{ aire } ABC'D' = XZ\, lm \sin\nu,$$

$$XZ \operatorname{cotg}(AB,\ CD) = \frac{3V(l^2 - m^2)}{l^2 m^2 \sin^2\nu}.$$

L'équation (14) revient donc à

$$\frac{n^2(l^2 - m^2)}{\sin^2\nu} + \frac{l^2(m^2 - n^2)}{\sin^2\lambda} = 0. \tag{15}$$

Nous allons récapituler les conditions de concours (A) de deux bihauteurs quelconques du tétraèdre T par les formules (16) où, sur chaque ligne, figurent deux bihauteurs

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll} (b,\ b'),\ (c,\ c') & \dfrac{m^2(n^2 - l^2)}{\sin^2\mu} + \dfrac{n^2(l^2 - m^2)}{\sin^2\nu} = 0, \\[2ex] (c,\ c'),\ (a,\ a') & \dfrac{n^2(l^2 - m^2)}{\sin^2\nu} + \dfrac{l^2(m^2 - n^2)}{\sin^2\lambda} = 0, \\[2ex] (a,\ a'),\ (b,\ b') & \dfrac{l^2(m^2 - n^2)}{\sin^2\lambda} + \dfrac{m^2(n^2 - l^2)}{\sin^2\mu} = 0. \end{array}\right\} \quad (A)$$

Les calculs indiqués à l'instant permettent de donner à la première de ces relations la forme équivalente où n'entrent que les arêtes de T :

$$\frac{4a^2a'^2 - (a^2 + a'^2 - c^2 - c'^2)^2}{a^2 + a'^2 - c^2 - c'^2} + \frac{4c^2c'^2 - (b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2)^2}{b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2} = 0. \tag{17}$$

On peut faire diverses remarques : on a trouvé le résultat

$$(18) \qquad l^2 = \frac{b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2}{4}, \qquad m^2 = \ldots, \qquad n^2 = \ldots,$$

de sorte que *le tétraèdre* $\overline{\mathrm{T}}$ *qui aurait, dans son ensemble, les mêmes longueurs d'arêtes que* T, *mais avec une disposition différente* ($a$, $b$, $c$ *issues d'un même sommet, et* $a'$, $b'$, $c'$ *arêtes formant un triangle*) *donne deux bihauteurs des couples* ($b$, $b'$), ($c$, $c'$) *par exemple concourantes elles aussi si les bihauteurs correspondantes de* T *concourent, le tout dans l'hypothèse* (A).

Les bimédianes correspondantes de T et $\overline{\mathrm{T}}$ ont la même longueur; les angles $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ de $\overline{\mathrm{T}}$ sont les suppléments des angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$ correspondants; si l'on suppose $\lambda > \mu > \nu$, on aura $\bar{\lambda} < \bar{\mu} < \bar{\nu}$ et les conditions d'existence de T et $\overline{\mathrm{T}}$ entraînent

$$\lambda < \mu + \nu, \quad \pi < \lambda + \mu + \nu < 2\pi, \quad \lambda + \mu < \pi + \nu.$$

*Les deux parallélépipèdes* $\Pi$, $\overline{\Pi}$ *ont leurs faces correspondantes égales, mais assemblées autrement.*

Si maintenant on étudie l'hypothèse (B) pour le concours des bihauteurs (AB, CD) et (AD, BC), on trouve $\mathrm{M} = \frac{\pi}{2}$; la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne alors $\cos\mu = \cos\nu\cos\lambda$; on a trouvé plus haut

$$\cos\nu = (c'^2 - c^2) : 4\,lm,$$

de sorte que la relation peut s'écrire $4(b'^2 - b^2)\,m^2 = (c'^2 - c^2)\,(a'^2 - a^2)$ ou encore

$$(c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2)\,(b'^2 - b^2) = (c'^2 - c^2)\,(a'^2 - a^2).$$

En récapitulant, comme plus haut, les conditions de concours de deux bihauteurs quelconques du tétraèdre T dans l'hypothèse (B)

$$(19) \quad \left\{\begin{array}{ll} & (b, b'), (c, c') \\ \cos\lambda = \cos\mu\cos\mu, & (b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2)(a'^2 - a^2) = (b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2), \\ & (c, c'), (a, a') \\ \cos\mu = \cos\nu\cos\lambda, & (c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2)(b'^2 - b^2) = (c'^2 - c^2)(a'^2 - a^2), \\ & (a, a'), (b, b') \\ \cos\nu = \cos\lambda\cos\mu, & (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)(c'^2 - c^2) = (a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2). \end{array}\right\} \ (\mathrm{B})$$

*Cette fois si deux bihauteurs de* T *concourent dans l'hypothèse* (B), *les bihauteurs homologues de* $\overline{\mathrm{T}}$ *ne concourent pas, du moins dans le cas le plus général.* Cela tient à ce que chaque terme $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ change de signe; si donc un couple de bihauteurs, celui de la première ligne du tableau (19) par exemple, concourt dans T et $\overline{\mathrm{T}}$, on a $\cos\lambda = \cos\mu\cos\nu = -\cos\mu\cos\nu$, de sorte que $\cos\lambda$ est nul ainsi que l'un des deux autres cosinus; supposons que l'on ait $\cos\lambda = \cos\mu = 0$; l'arête GN de $\Pi$ est perpendiculaire à GL et GM de sorte que ***le parallélépipède*** $\Pi$ ***est droit et réciproquement :*** c'est le cas [B, B] dont nous parlerons plus bas; *il résulte aussi de là, que les cas* [A, A, A], [A, B, B],

[ B, B, B ] *dont nous parlerons plus bas donnent le concours en un point pour* T *aussi bien que pour* T′

A propos de la méthode suivie ici pour obtenir la relation (9) sans ambiguïté de signe,

$$\overline{ab}\,\mathrm{tg}(AB, CD) + \overline{bc}(BC, DA) = 0$$

ou la relation (14), où XZ, YT se sont trouvées être positives,

$$XZ\,\mathrm{cotg}(AB, CD) + YT\,\mathrm{cotg}(BC, AD) = 0,$$

nous devons encore faire une remarque : donnons-nous, rapportées à un trièdre trirectangle orienté (dextrorsum ou sinistrorsum, peu importe) $Oxyz$, deux droites $D_1$, $D_2$ de paramètres directeurs $(a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, b_2, c_2)$ respectivement; pour évaluer l'angle des deux droites, nous devons, par l'origine, mener les parallèles à $D_1$, $D_2$, soient $\delta_1$, $\delta_2$, puis orienter la perpendiculaire issue de O à ce plan $(\delta_1, \delta_2)$; si $\vec{\delta_3}$ est cette perpendiculaire orientée, on peut appeler $(D_1, D_2)$, angle des deux droites indéfinies $(D_1, D_2)$ prises dans cet ordre, l'un des angles, estimé par l'observateur placé sur $\vec{\delta_3}$, les pieds en O, traversé des pieds à la tête par $\vec{\delta_3}$, dont il faut faire tourner $\delta_1$ pour la faire coïncider avec $\delta_2$, ; le sens positif des rotations pour cet observateur a été obtenu par lui en se plaçant sur $\overrightarrow{Oz}$, les pieds en O, la tête vers l'extrémité de $\overrightarrow{Oz}$, et amenant $\overrightarrow{Ox}$ sur $\overrightarrow{Oy}$ par une rotation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue; si l'on change l'orientation de $\vec{\delta_3}$, l'angle $(D_1, D_2)$ change de signe, $\mathrm{tg}(D_1, D_2)$ ou $\mathrm{cotg}(D_1, D_2)$ changent de signe; si l'on considère maintenant un vecteur quelconque, *orienté*, parallèle à $\vec{\delta_3}$, la valeur algébrique $l$ de ce vecteur change aussi de signe si l'on change l'orientation de l'axe $\vec{\delta_3}$, de sorte que le produit $l\,\mathrm{tg}(D_1, D_2)$ ou $l\,\mathrm{cotg}(D_1, D_2)$ est une quantité parfaitement définie en grandeur et signe dès que l'on donne $D_1$, $D_2$ et le vecteur $\vec{l}$ perpendiculaire à $D_1$ et $D_2$, donc parallèle à leur perpendiculaire commune. Soient alors $A_1$, $A_2$ les pieds de la perpendiculaire commune à $D_1$ et $D_2$ : choisissons pour le vecteur annoncé, $\overrightarrow{A_1A_2}$. Si l'on échange l'ordre de $D_1$ et $D_2$ et si en même temps on remplace $\overrightarrow{A_1A_2}$ par $\overrightarrow{A_2A_1}$, le produit $\bar{l}\,\mathrm{tg}(D_1, D_2)$ aura une valeur algébrique bien déterminée quand on donne $D_1$, $D_2$ sans les orienter ni préciser leur ordre : en effet si l'on choisit l'ordre $D_1$, $D_2$ l'observateur se place sur $A_1 A_2$, les pieds en $A_1$, la tête en $A_2$ et fait tourner le plan $A_1 A_2 D_1$ autour de lui pour l'amener sur $A_1 A_2 D_2$ : il multiplie la valeur absolue de $A_1 A_2$ par la tangente de l'angle qu'il a évalué (en se bornant par exemple à la détermination comprise entre 0 et $\pi$); si l'on change l'ordre $(D_1, D_2)$, l'observateur se place les pieds en $A_2$, la tête en $A_1$; la rotation est, géométriquement parlant, opposée à la précédente et évaluée par le même observateur qui s'est retourné des pieds à la tête : on trouve la même mesure pour l'angle; le produit annoncé ne change pas. Si l'on remplace le trièdre orienté $Oxyz$ par un trièdre de disposition différente, les valeurs algébriques des angles étudiés changent de signe, donc aussi le produit étudié; mais alors, si l'on applique le résultat à un système de deux droites tel que AB et CD, puis à un autre système de deux droites tel que BC et AD, le rapport que nous avons eu à étudier

$$XZ \cot g(AB, CD) : \quad YT \cot g(BC, AD)$$

ne change pas; dans le cas du concours des deux bihauteurs nous avons vu qu'il est égal à $(-1)$ : *c'est une propriété intrinsèque indépendante du mode de repérage employé*, obtenue par conséquent sans avoir à faire intervenir le moindre radical.

Faisons une application de ceci (en nous servant, par exception, de la théorie des quadriques réglées à centre); soit $H_1$ une semi-quadrique réglée appartenant à un hyperboloïde à une nappe, $H_2$ la semi-quadrique complémentaire. Une génératrice $\mathcal{G}_1$ *quelconque* de $H_1$ donnera, sous des conditions de réalité faciles à indiquer, deux génératrices $\mathcal{G}_2^1$, $\mathcal{G}_2^2$ de $H_2$ qui lui sont perpendiculaires; une génératrice *quelconque* $\mathcal{G}_2$ de $H_2$ donne de même deux génératrices $\mathcal{G}_1^1$, $\mathcal{G}_1^2$ de $H_1$ qui lui sont perpendiculaires; le quadrilatère gauche $\mathcal{G}_2^1\, \mathcal{G}_1^1\, \mathcal{G}_2^2\, \mathcal{G}_1^2$ est tel que les bihauteurs $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ concourent sans être orthogonales (puisque $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ont été choisies quelconques sur les semi-quadriques $H_1$ et $H_2$); on est dans le cas (A); on déduit de là en faisant varier $\mathcal{G}_2$ (c'est-à-dire $\mathcal{G}_1^1$, $\mathcal{G}_1^2$) que le *produit de la longueur du segment découpé par la sphère de Monge sur une génératrice du premier système et de la cotangente de l'angle des plans tangents aux extrémités de ce segment reste constant quand cette génératrice varie, et l'on peut même l'affecter d'un signe constant; une génératrice variable du second système donnera un produit analogue constant, égal et de signe contraire au précédent;* si chaque produit indiqué reste constant, il est immédiat qu'ils doivent être égaux et de signe contraire, car la symétrie par rapport à l'origine change les deux produits l'un en l'autre, en changeant leur signe.

C'est cette proposition qui a servi de point de départ à M. Marmion pour son travail de Mathesis; les suggestions que M. Marmion m'a données pour démontrer directement la relation (9) nous a conduits, au contraire, à déduire la propriété de l'hyperboloïde de l'étude des bihauteurs concourant suivant l'hypothèse (A).

On peut remarquer que le concours de deux bihauteurs peut se produire de façon à avoir simultanément l'hypothèse (A) et l'hypothèse (B); il est souvent commode de définir T par les six éléments de grandeur $l$, $m$, $n$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Si l'on veut que les bihauteurs $(b, b')$ et $(c, c')$ donnent cette particularité, il suffit de choisir arbitrairement $\mu$, $\nu$ puis de calculer $\lambda$ par la relation $\cos\lambda = \cos\mu \cos\nu$ qui donne pour $\lambda$ une seule détermination comprise entre o et $\pi$; ensuite on choisit $m$, $n$ par exemple et l'égalité $m^2(n^2 - l^2)\sin^2\nu + n^2(l^2 - m^2)\sin^2\mu = 0$ fournit $l$.

La condition de concours des bihauteurs $(b, b')$, $(c, c')$ dans le cas A peut s'interpréter géométriquement de la façon suivante : elle s'écrit

$$\frac{m^2 - l^2}{n^2 - l^2} = \frac{m^2 \sin^2\nu}{n^2 \sin^2\mu} = \frac{l^2 m^2 \sin^2\nu}{l^2 n^2 \sin^2\mu}. \tag{20}$$

Il s'agit ici du quadrilatère gauche ABDC; $l$ est la bimédiane relative aux diagonales AD, BC; $m^2 - l^2$ est la puissance de M par rapport à la sphère décrite sur LL′ comme diamètre, $n^2 - l^2$ la puissance de N; $lm \sin\nu$ est l'aire du parallélogramme dont LL′, MM′ sont les bimédianes; $ln \sin\mu$ a le même sens pour LL′, NN′; *le rapport des puissances en jeu est égal au carré du rapport des aires correspondantes, de plus* LL′ *est ou la plus grande, ou la plus petite bimédiane.*

4. **Étude du tétraèdre.** — Étudions maintenant les tétraèdres tels qu'une bihauteur soit rencontrée par chacune des deux autres, en supposant d'abord que les deux autres ne soient pas sécantes, puis qu'elles soient elles-mêmes sécantes. Si la bihauteur $(a, a')$ ou (BC, AD) est coupée par les deux autres, il y a à distinguer les diverses possibilités :

$$\begin{cases} (a, a'), (b, b')\ \text{A}, \\ (a, a'), (c, c')\ \text{A}, \end{cases} \text{puis} \begin{cases} (a, a'), (b, b')\ \text{A}, \\ (a, a'), (c, c')\ \text{B}, \end{cases} \text{puis} \begin{cases} (a, a')\,(b, b')\ \text{B}, \\ (a, a')\,(c, c')\ \text{B}. \end{cases}$$

Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où $(a, a')$, $(b, b')$ donnerait le cas B et $(a, a')$, $(c, c')$ le cas A, car il suffirait de permuter $b$ et $c$, $b'$ et $c'$, B et C pour retrouver une étude déjà faite.

5. **Étude de** $\begin{cases} (a, a'), (b, b')\ \text{A}, \\ (a, a'), (c, c')\ \text{A}. \end{cases}$ — Nous avons à nous reporter au tableau (16) et à ses deux dernières lignes, d'où l'on déduit

$$\frac{l^2(n^2 - m^2)}{\sin^2\lambda} = \frac{m^2(n^2 - l^2)}{\sin^2\mu} = \frac{n^2(l^2 - m^2)}{\sin^2\nu}. \tag{21}$$

*Aucun des dénominateurs n'est nul, de sorte qu'il y a deux cas essentiellement distincts à séparer.*

1° *aucun numérateur ne s'annule,* $l$, $m$, $n$ étant trois nombres différents.

2° *un numérateur est nul, et par suite tous les trois sont nuls,* $l = m = n$.

Dans le premier cas $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont, si, $l$, $m$, $n$ sont donnés, liés par deux relations distinctes et nous obtenons des tétraèdres T dépendant de quatre paramètres de forme et grandeur exactement.

Dans le second cas, qui ne donne encore que deux conditions, non seulement les deux concours annoncés sont réalisés avec (A), mais aussi le troisième $(b, b')$, $(c, c')$ avec A encore, et nos tétraèdres T dépendent encore de quatre paramètres de forme et grandeur.

*Nous avons ainsi deux familles bien distinctes de tétraèdres;* nous sommes mis en garde contre le raisonnement spécieux, qui *a priori*, paraît inattaquable : pour obtenir le schéma [A, A, A] nous pourrions commencer par le schéma [A, A] relatif aux couples $[(a, a'), (b, b')]$ et $[(a, a'), (c, c')]$, puis disposer des paramètres qui restent pour obtenir le concours (A) de $(b, b')$, $(c, c')$ : si $(l - m)(l - n)(m - n) \neq 0$, nous obtenons, avec cette nouvelle condition, des tétraèdres T donnant le schéma [A, A, A] et ne dépendant que de neuf paramètres; mais ils ne donnent pas la solution générale du schéma [A, A, A]; au contraire si nous sommes dans le cas $l = m = n$, nous sommes automatiquement dans l'hypothèse [A, A, A].

Plaçons-nous dans l'hypothèse $(l - m)(l - n)(m - n) \neq 0$; les équations (21) entraînent, par addition terme à terme des deux derniers rapports

(22) $$\sin^2\lambda = \sin^2\mu + \sin^2\nu$$

de la sorte les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$ ne sont pas indépendants (tandis que pour la seconde famille annoncée ils ne sont soumis à aucune condition). De plus en multipliant les termes de chaque rapport respectivement par $m^2n^2$, $n^2l^2$, $l^2m^2$, on obtient

(23) $$m^2n^2\sin^2\lambda = n^2l^2\sin^2\mu + l^2m^2\sin^2\nu.$$

L'équation (23) exprime que le parallélépipède $\Pi$ a une face dont le carré de l'aire est égal à la somme des carrés des aires des deux autres faces; l'équation (22) exprime la même propriété pour le parallélépipède $\Pi_1$ obtenu en portant sur GL, GM, GN la longueur 1 de part et d'autre de G. On pourra donc construire T en donnant $\mu$, $\nu$ d'où l'on déduit $\lambda$, avec certaines conditions de réalité que nous n'écrivons pas. Ensuite on se donnera $m$ et $n$ par exemple, et (23) définit $l$. On remarquera alors que $m = n$ donnerait $l = m = n$, de sorte que nous obtenons ainsi des tétraèdres à neuf paramètres de grandeur et position qui forment une sous-famille commune à la famille à dix paramètres que nous venons de trouver et à la famille suivante.

Pour cette nouvelle famille $l = m = n$ suffit : $\Pi$ a ses faces qui sont toutes des losanges, de sorte que les diagonales sont rectangulaires. T *est un tétraèdre orthocentrique et réciproquement.* Nous n'insisterons pas sur les propriétés bien connues de ces *tétraèdres orthocentriques;* rappelons simplement qu'en appelant U, V les pieds de la bihauteur (AC, BD) ou $(b, b')$, U sur AC et V sur BD, le schéma [A, A] précisé comme titre de ce paragraphe entraîne que Y, T, U, V soient sur un même cercle ainsi que Y, T, X, Y, donc les six pieds sont sur une même sphère, centrée en G puisque l'axe du cercle (Y, T, U, V) est la bimédiane $(c, c')$ et celui du cercle (Y, T, X, Y) la bimédiane $(b, b')$; dans le cas [A, A, A] on retrouve la sphère bien connue qui passe par les pieds des bihauteurs et par les six points L, L', M, M', N, N'.

On voit aussitôt que [A, A, B] ne peut exister du moins si $(l - m)(l - n)(m - n) \neq 0$; si $(b, b')$, $(c, c')$ donnaient le cas B, on aurait $L = \frac{\pi}{2}$; comme $\sin L$, $\sin M$, $\sin N$ sont proportionnels à $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$, on aurait $\sin^2 L = \sin^2 M + \sin^2 N$ et comme $L = \frac{\pi}{2}$, $\sin^2 M + \sin^2 N = 1$, $M + N = \frac{\pi}{2}$, $L + M + N = \pi$, ce qui ne se peut pour un trièdre non aplati [1].

*Si $l = m = n$, on peut obtenir* (A, A, B) : on peut prendre arbitrairement les

[1] L'hypothèse [A, A] avec $(l - m)(l - n)(n - n) \neq 0$ empêche toute hypothèse B d'avoir lieu : il faudrait en effet avoir la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour l'un des dièdres L, M, N; pour L nous venons de voir que cela est impossible; si M ou N était égal à $\frac{\pi}{2}$, l'égalité $\sin^2 L = \sin^2 M + \sin^2 N$ donnerait pour $\sin^2 L$ une valeur supérieure à l'unité.

supports de GL, GM, GN; pourvu que le trièdre ainsi obtenu ait son dièdre en L droit et l'on porte sur les arêtes la même longueur $\frac{l}{2}$ de part et d'autre de G : dans ce cas le couple $(b, b')$, $(c, c')$ est formé de deux bihauteurs satisfaisant à la fois aux conditions A, B. Les divers auteurs qui ont étudié la question semblent avoir oublié ce cas précis, inclus dans [A, A, A].

6. **Étude de** $\left\{\begin{matrix}(a, a'), (b, b')\ \mathrm{A}, \\ (a, a'), (c, c')\ \mathrm{B}.\end{matrix}\right\}$ — On a les relations

$$(24) \qquad \frac{l^2(m^2-n^2)}{\sin^2\lambda} + \frac{m^2(n^2-l^2)}{\sin^2\mu} = 0 \qquad \cos\mu = \cos\nu\cos\lambda$$

qui permettent de choisir $\lambda$, $\mu$ arbitrairement (dans un champ de réalité que nous

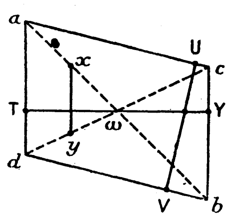


Fig. 6.

n'étudierons pas); $\nu$ en résulte; la première équation (24) permet ensuite de choisir $l$ et $m$; $n$ en résulte. Il est intéressant de figurer la section droite de la surface prismatique S(ACBD) par le plan YTUV (*fig.* 6); d'après le cas B, la bihauteur YT ou (BC, AD) rencontre la bimédiane (AB, CD) projetée suivant

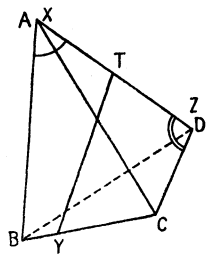


Fig. 7.

l'unique point $\omega$ centre du parallélogramme $acbd$; YT est donc la perpendiculaire abaissée de $\omega$ sur $cb$ et $ad$; on a ensuite U sur $ac$ en prenant $\omega\mathrm{U} = \omega\mathrm{Y}$. Quant à la bihauteur XZ, d'après l'hypothèse B, elle est perpendiculaire à YT, donc se projette suivant un segment perpendiculaire à YT limité à $ab$ et $cd$. Si l'on a choisi ce segment, la figure de l'espace en résultera, car on a bien utilisé les quatre paramètres de grandeur et forme à notre disposition : trois pour le parallélogramme $acbd$ et un pour le choix du segment $xz$. Un cas particulier intéressant est celui où $xz$ coïncide avec $ad$ ou $cb$, $ad$ par exemple en disposant des notations : on a ainsi le cas où dans le tétraèdre ABCD (*fig.* 7) l'arête AD est orthogonale sur AB et CD, X étant confondu avec A, Z avec D : le quadrilatère gauche ABCD a ses bihauteurs XZ et YT coplanaires suivant l'hypothèse B [1].

Ayant étudié le schéma [A, B] nous pouvons chercher si $(b, b')$, $(c, c')$ donnent des bihauteurs UV, XZ elles-mêmes concourantes; le schéma (A, A, B) a été liquidé et nous savons qu'en réalité (A, B) rentrerait dans le cas [A, A]; n'en parlons plus. Il reste le schéma (A, B, B) qui peut être considéré comme cas particulier du schéma (B, B) non encore étudié : nous allons faire cette étude.

**7. Étude de** $\left\{\begin{matrix} (a, a'), (b, b')\ \mathrm{B}, \\ (a, a'), (c, c')\ \mathrm{B}. \end{matrix}\right\}$. — Nous avons ici $\mathrm{M} = \mathrm{N} = \frac{\pi}{2}$, de sorte que *le parallélépipède* II *est droit, l'arête* LL′ *étant perpendiculaire au plan* GMN *et nous savons que ces conditions sont suffisantes. Les angles* $\mu$ *et* $\nu$ *sont droits.* Les faces parallèles à LL′ de II sont des rectangles, AB = CD, AC = BD. *Le quadrilatère gauche* ACDB *a ses côtés opposés égaux : la droite* LL′ *qui réunit*

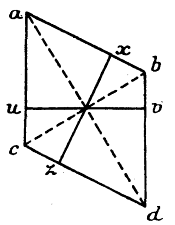


Fig. 8.

*les milieux des diagonales* AD *et* BC *est un axe de symétrie du quadrilatère et du tétraèdre* ABCD *lui-même*; UV perpendiculaire commune à AC et BD rencontre LL′ à angle droit; pour la même raison XZ, bihauteur (AB, CD) rencontre LL′ à l'angle droit; Y coïncide avec L et T avec L′.

La surface prismatique S(ABDC) a pour section droite un parallélogramme *abdc* (*fig.* 8). La projection de YT ou LL′ se réduit au point $\omega$ centre du parallélogramme; UV se projette suivant *uv* issue de $\omega$ normalement à *ac* et *bd*; XZ suivant *xz* issue de $\omega$ normalement à *a b* et *cd* [2].

Supposons maintenant que XZ et UV se coupent aussi : si c'est en vertu de (A),

---

[1] On peut se demander si le couple $(a, a')$, $(b, b')$ peut concourir à la fois à cause des raisons A et B; mais alors l'on aurait un schéma (B, B) qui est étudié au paragraphe suivant. Si le couple $(a, a')$, $(c, c')$ concourt aussi pour la raison (A), on a un schéma [A, A] qui a été étudié déjà.

[2] Dans l'étude de ce schéma (B, B) il peut arriver que le couple $(a, a')$, $(b, b')$ corresponde aussi au schéma (A); il suffit pour cela que l'on ait $\mu = \nu = \frac{\pi}{2}$, $\frac{l^2(m^2 - n^2)}{\sin^2\lambda} + m^2(n^2 - l^2) = 0$ de sorte que l'on peut prendre $\lambda$ arbitrairement, puis $m$ et $n$ arbitrairement sous la seule restriction $n^2 > m^2\cos^2\lambda$ et on aura $l^2 = m^2 n^2 \sin^2\lambda : (n^2 - m^2\cos^2\lambda)$. Il est impossible que chaque couple $(a, a')$, $(b, b')$ et $(a, a')$ $(c, c')$ corresponde à la fois au schéma (A) et au schéma (B) comme cela a été indiqué en note au paragraphe 6, à moins que $l$, $m$, $n$ ne soient égaux : II *est alors un parallélépipède droit à base losange dont les faces latérales sont des carrés*; le schéma à trois termes correspondant donne un couple où B est invariable, tandis que chacun des deux autres couples donne, *ad libitum*, A ou B.

on a $\omega x = \omega u = \omega v = \omega z$, *sorte de que le parallélogramme abcd est un losange, le quadrilatère gauche* ABDC *a ses côtés tous égaux;* $\Pi$ *est un parallélépipède droit à base losange et a trois plans de symétrie deux à deux perpendiculaires :* les plans diamétraux LL'AD, LL'BC complétés par le plant MM'NN'; les deux plans diamétraux sont aussi plans de symétrie pour le tétraèdre T.

*Si l'hypothèse* B *est réalisée pour le dernier couple,* $\Pi$ *est un parallélépipède rectangle et le tétraèdre* ABCD *a ses côtés opposés égaux :* c'est une figure classique; dans ce cas d'ailleurs $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, les deux tétraèdres $\overline{T}$ et T coïncident.

8. *Conclusion.* — Nous avons ainsi retrouvé les cas classiques de tétraèdres à bihauteurs sécantes au même point :

1° tétraèdre orthocentrique,
2° tétraèdre formé par les sommets d'un losange gauche,
3° tétraèdre à arêtes apposées égales, ou équifacial.

*Une mention spéciale doit être accordée au cas où* $\Pi$ *est un cube, c'est-à-dire où* T *est un tétraèdre régulier* : pour chaque couple de bihauteurs, le concours a lieu aussi bien pour la raison (A) que pour la raison (B), de sorte qu'un tétraèdre régulier est une solution de chacun des schémas indiqués ici, (A, A, A), (A, A, B), (A, B, B), (B, B, B); mais le tétraèdre régulier n'est pas une solution du type (A, A) avec $(l - m)(l - n)(m - n) \neq 0$ : ce dernier type joue un rôle très spécial qui semble n'avoir pas été suffisamment mis en évidence par les géomètres qui ont étudié cette question.