BULLETIN DE LA S. M. F.

J. RIGUET

Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 114-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__114_0>

RELATIONS BINAIRES, FERMETURES, CORRESPONDANCES DE GALOIS;

PAR J. RIGUET.

Introduction.

Le présent travail est le résultat de la mise à jour d'une étude qui avait été faite alors qu'il était encore impossible de se procurer les Mémoires parus pendant la guerre, notamment ceux de O. Ore et C. J. Everett ([14], [15]).

Un double but est poursuivi : d'abord établir un certain nombre de formules relatives à des relations binaires quelconques permettant de réduire considérablement dans les démonstrations l'emploi d'éléments variables des ensembles de base et grâce à ces formules établir les propriétés élémentaires des relations binaires les plus utiles; ensuite définir et étudier les fermetures sur un ensemble ordonné et les correspondances de Galois entre deux ensembles ordonnés et représenter certaines fermetures et certaines correspondances de Galois à l'aide de relations binaires. Les définitions et les propriétés abstraites ainsi élaborées permettent de simplifier l'exposé de nombreuses théories mathématiques et peuvent jusqu'à un certain point guider dans les recherches.

Les applications du calcul des relations binaires sont innombrables, car les seules relations qui interviennent couramment en mathématiques sont les relations binaires et des relations ternaires d'un type particulier : les lois algébriques. L'importance des relations quasi fonctionnelles (Chap. I, § 6) est évident : la notion de fonction est la base même des mathématiques et pratiquement une relation n'est effectivement donnée qu'à partir de relations fonctionnelles. Les relations difonctionnelles (Chap. I, § 7) permettent de généraliser les lois d'homomorphisme dans les groupes (1). D'autre part, si T est une loi algébrique non partout définie sur un ensemble, il arrive souvent que la relation « $x \mathsf{T} y$ est défini » est difonctionnelle (2). En géométrie élémentaire, un exemple de relation difonctionnelle est donné par la relation d'orthogonalité.

Il n'est pas de chapitre de mathématiques où la notion de relation d'équivalence ne joue un rôle. On trouvera un exemple de l'emploi des relations de quasi

(1) Si E et F sont deux groupes dont on désigne les éléments unités respectifs par e et f, si $R \subset E \times F$ est une relation difonctionnelle compatible avec la loi de groupe et le passage à l'élément inverse et s'il en est de même pour $\overset{-1}{R}{}'$, $\overset{-1}{R}{}'(F)$ et $R(E)$ sont des groupes admettant respectivement $\overset{-1}{R}{}'(f) = \overset{-1}{R}{}' R(e)$ et $R(e) = R\overset{-1}{R}{}'(f)$ comme sous groupes distingués et l'application canonique définie au Chapitre I, paragraphe 8 entre $\dfrac{\overset{-1}{R}{}'(F)}{\overset{-1}{R}{}'(f)}$ et $\dfrac{R(E)}{R(e)}$ est un isomorphisme (dit *canonique*) entre ces deux groupes quotients.

(2) C'est le cas en particulier pour un groupoïde de Brandt.

équivalence dans [18]. Enfin les relations d'ordre constituent le fondement même de la topologie. Elles on fait l'objet de travaux très nombreux (*voir* en particulier [5] et aussi [6], qui contient une bibliographie très détaillée).

L'emploi des fermetures est indispensable non seulement en topologie, mais en algèbre. Si $\top$ est une loi algébrique associative sur un ensemble E et si X est un sous-ensemble de E, on définit la fermeture algébrique $\overset{\lll}{X}$ de X comme étant l'ensemble des $x_1 \top \dots \top x_n$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ parcourant l'ensemble des familles finies d'éléments de X. L'ensemble des parties de E stables pour $\top$ est l'ensemble des parties X fermées pour $\lll$. On appelle *loi produit* et l'on désigne par le même symbole $\top$ la loi algébrique sur $E \times E$ définie par $(x_1, y_1) \top (x_2, y_2) = (x_1 \top x_2, y_1 \top y_2)$. On dit que la relation $R \subset E \times E$ est *compatible* avec $\top$, lorsque $R \top R \subset R$, c'est-à-dire lorsque R est stable pour la loi produit (comparer à la définition de [1], § 4, n° 3, lorsque R est une relation d'équivalence). Lorsque X est une partie stable pour $\top$ et que la relation R est compatible avec $\top$, $R(X)$ est stable pour $\top$. Lorsque $\top$ admet un élément neutre, que la partie X contient cet élément neutre et que la relation R est compatible avec $\top$, $R[X]$ est stable pour $\top$. Ceci s'applique encore lorsque $R \subset E \times F$, F étant un ensemble différent de E. (Un bon exemple d'application est fourni par la correspondance de Galois définie dans la proposition 9 et le théorème 3 de [2], § 5, n° 6.) Au Chapitre I, paragraphe 3 nous rencontrerons des exemples de C fermetures sur les relations binaires.

Un exemple important de correspondance de Galois est le suivant : Étant donné une relation d'équivalence R sur un ensemble E nous appellerons *groupe d'inertie* de R et nous désignerons par $\mathfrak{T}_R$ (¹) le sous-groupe du groupe des automorphismes de R (*cf.* Chap. I, § 12) constitué par l'ensemble des permutations Σ telles que $\Sigma \subset R$ (²). Étant donné un groupe de permutations $\mathcal{G}$ d'un ensemble E, nous appellerons *équivalence de transitivité* de $\mathcal{G}$ et nous désignerons par $T_{\mathcal{G}}$ la relation d'équivalence $T_{\mathcal{G}} = \bigcup\limits_{\Sigma \in \mathcal{G}} \Sigma$. Soit $\mathcal{G}_0$ un groupe de permutations de E. On montre facilement que le couple d'applications qui, d'une part fait correspondre $T_{\mathcal{G}}$ au sous-groupe $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_0$ et d'autre part fait correspondre $\mathfrak{T}_R$ à la relation d'équivalence R, est une correspondance de Galois entre l'ensemble des sous-groupes $\mathcal{G}_0$ muni de l'ordre d'inclusion et l'ensemble des relations d'équivalence sur E muni de l'ordre dual de l'ordre d'inclusion.

Les différents rapports qu'entretiennent entre eux les différents concepts qu'on peut choisir comme notion fondamentale pour la définition d'un espace topologique : notion d'ensemble ouvert, notion d'ensemble fermé, notion de fermeture, notion d'ouverture, notion de voisinage, notion de convergence définissent des correspondances de Galois. Considérons par exemple le concept de voisinage et le concept de convergence. Convenons d'appeler une relation binaire $\mathcal{V} \subset \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ une relation de voisinage lorsqu'elle satisfait aux trois axiomes suivants : 1° $\mathcal{V}$ est transitive; 2° quel que soit $X \in \mathfrak{P}(E)$, $\mathcal{V}(X)$ est un filtre; 3° $\mathcal{V} \subset \mathcal{I}$,

(¹) $\mathfrak{T}$ étant la première lettre de Trägheitsgruppe, nom allemand du groupe d'inertie dans le cas où R est une congruence modulo un idéal premier dans un corps.

(²) Des conditions équivalentes sont $R\Sigma \subset R$, $\Sigma R \subset R$, $R\Sigma = R$, $\Sigma R = R$.

$\mathcal{J}$ désignant la relation d'inclusion. Convenons d'appeler une relation binaire $\mathcal{C} \subset E \times \Phi$ (Φ désignant l'ensemble des filtres sur E) une relation de convergence lorsqu'elle satisfait aux trois axiomes suivants : 1° $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ étant une famille de filtres quelconques : « quel que soit i, $\mathcal{C}\langle x, \mathcal{F}_i\rangle$ » $\rightleftharpoons \mathcal{C}\left\langle x, \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i\right\rangle$; 2° Si $\mathcal{F}_2$ est filtre plus fin que $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{C}\langle x, \mathcal{F}_1\rangle \rightarrow \mathcal{C}\langle x, \mathcal{F}_2\rangle$; 3° quel que soit $x \in E$, $\mathcal{C}\langle x, \mathcal{J}(x)\rangle$. Étant donné une relation de convergence $\mathcal{C}$ nous définirons une relation de voisinage associée $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ par : $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}(x)$ est le plus fin de tous les filtres $\mathcal{F}$ tels que $\mathcal{C}\langle x, \mathcal{F}\rangle$. Étant donné une relation de voisinage $\mathcal{V}$ nous définirons une relation de convergence associée $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ par : $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}\langle x, \mathcal{F}\rangle \rightleftharpoons \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$. Alors le couple d'applications, qui d'une part fait correspondre $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ à la relation de convergence $\mathcal{C}$, qui d'autre part fait correspondre $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ à la relation du voisinage $\mathcal{V}$, définit une correspondance de Galois parfaite entre l'ensemble des relations de convergence et l'ensemble des relations de voisinages sur E.

La correspondance entre filtres et grilles définie par G. Choquet ([1]) donne encore un exemple de correspondance de Galois parfaite. On en trouvera d'autres dans [15].

Indications historiques. — Les notions de relation symétrique d'une relation, de relation composée de deux relations, ainsi que la notion de coupe d'une relation par un élément étaient déjà connues de De Morgan (1860). Cependant chez De Morgan, de même que chez Peirce, ces deux dernières notions n'étaient pas clairement distinguées; la distinction ne devint explicite que chez Frege (1879). La notion de fermeture transitive est due à Frege (1884), de même que la notion de relation fonctionnelle. Ernst Schröder a publié dans le tome III de son *Algebra der Logik* en 1895 un énoncé qui équivaut à la formule numérotée (32) dans le Chapitre I de notre travail. Cette *Algebra der Logik* contient du reste l'essentiel du matériel utilisé quelques années plus tard par Whitehead et Russel dans les *Principia mathematica*. Depuis, à part un travail ([2]) de Dénès Kœnig, plus apparenté à la théorie des graphes qu'à la théorie des relations, aucun mémoire n'apportant des résultats nouveaux sur la théorie des relations quelconques n'a paru, à notre connaissance.

En ce qui concerne la notion de C fermeture, le fait qu'une C fermeture peut être obtenue à partir d'une $\wedge$ partie cofinale se trouve déjà implicitement dans le concept d'ensemble « extentionally attainable » de E. H. Moore.

L'idée de correspondance de Galois se trouve déjà implicitement dans [7].

Nous avons donné ici une théorie des relations binaires qui ne suppose pas connue la notion de structure algébrique. Si l'on suppose connue du lecteur la notion de structure algébrique, on peut donner une présentation abstraite de la théorie des relations binaires en considérant une lattice complète à multiplication $\vee$ distributive. Cette présentation englobe le calcul des complexes dans un

---

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 20 janvier 1947.

([2]) Dénès Kœnig, *Fundamenta mathematicæ*, 8, 1926, p. 114-134; *Mathematische Annalen*, 95, 1926, p. 135-138.

groupoïde de Brandt ([1]). Nous avons esquissé ailleurs [16] une présentation abstraite des relations n-aires.

Dans l'esprit de l'auteur, le présent travail doit servir d'introduction à une théorie générale des invariants (une relation R étant un invariant des relations R_1 et R_2 lorsque R peut se déduire de R_1 et R_2 par certaines opérations bien définies; par exemple $R = (R_1 R_2 \cap \Delta)\overset{-1}{R_2}$ est un invariant de R_1 et R_2) et a une théorie générale de Galois analogue à celle qui a déjà fait l'objet d'une étude de M. Krasner [12]. Aucune autre connaissance que celle des notations habituelles de la théorie des ensembles : appartenance d'un élément à un ensemble, réunion, intersection de sous-ensembles, produits d'ensembles, etc. n'est exigée du lecteur. Nous supposons seulement à propos de la représentation des relations binaires par des matrices que le lecteur connaît la définition de la somme, du produit et du produit tensoriel (encore appelé produit kroneckerien) de deux matrices ([2]).

I. — Relations binaires.

Notations. — Les notations employées sans avoir été définies sont celles de [Ens. R].

Le signe $\rightarrow$ est celui de l'implication de deux propositions, le signe $\rightleftharpoons$ celui de leur équivalence.

Le signe $\exists x$ se lit « il existe un x tel que ... ».

Pour des raisons typographiques, on utilisera ici un accent comme symbole de complémentation d'un sous-ensemble au lieu du $\complement$ de N. Bourbaki.

E, F, G étant trois ensembles quelconques $R \{x, y\}$ étant une relation binaire ([1]) quelconque entre éléments $x \in E$, $y \in F$; $S\{z, t\}$ étant une relation binaire quelconque entre éléments $z \in F$, $t \in G$, nous conviendrons, pour simplifier le langage, de toujours les identifier avec leurs sous-ensembles représentatifs $R \subset E \times F$, $S \subset F \times G$.

L'*ensemble symétrique* de R [Ens. R, § 3, n° 4] sera noté $\overset{-1}{R}$, c'est un sous-ensemble de $F \times E$ défini par

$$\overset{-1}{R}\{y, x\} \rightleftharpoons R\{x, y\}.$$

L'*ensemble composé* de R et S [Ens. R, § 3, n° 10] sera noté $S \circ R$ ou encore SR, lorsque aucune confusion n'est à craindre, c'est un sous-ensemble de $E \times G$ défini par

$$SR\{x, t\} \rightleftharpoons « \exists y \in F,\ R\{x, y\} \text{ et } S\{y, t\} ».$$

On appelle *coupe* de R suivant x et l'on note $R(x)$ l'ensemble des $y \in F$ tels que $R\{x, y\}$.

([1]) Le calcul des relations binaires n'est pas autre chose, en effet, que le calcul des complexes dans $E \times E$ muni de la structure de groupoïde de Brandt définie par la loi dyadique : $(y, z), (x, y) = (x, z)$.

([2]) Pour la définition du produit tensoriel ou kroneckerien de deux matrices on pourra consulter [3], § 1, n° 6, ou encore Mac Duffee, *Theory of matrices. Ergebnisse der Mathematik*, Berlin, 1933, p. 81, qui appelle ce produit « direct product ».

A. Chatelet [12, 13] appelle une relation binaire entre éléments d'un même ensemble « auto correspondance ».

X étant un sous-ensemble de E, nous appellerons *coupe de première espèce* de R suivant X et nous noterons R(X) le sous-ensemble de F

$$R(X) = \bigcup_{x \in X} R(x) \qquad \text{(comparer [Ens. R, § 3, n}^{\text{os}}\text{ 6, 7]).}$$

Nous appellerons *coupe de seconde espèce* de R suivant X et nous noterons R[X] le sous-ensemble de F

$$R[X] = \bigcap_{x \in X} R(x).$$

Nous poserons par définition

$$\mathrm{pr}_1 R = \overset{-1}{R}(F), \qquad \mathrm{pr}_2 R = R(E).$$

1. **Propriétés des coupes de première et de seconde espèce.** — Les formules ci-dessous donnent les principales propriétés des coupes de première et de seconde espèce qui se laissent facilement démontrer, les R désignant des relations binaires entre éléments E et F, les X des sous-ensembles de E, les Y des sous-ensembles de F.

(1) $S(R(X)) = (SR)(X)$ (¹);

(2) $R(X_1 \cup X_2) = R(X_1) \cup R(X_2)$ et plus généralement si $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(E)$, $\qquad R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cap R[X_2]$ et plus généralement si $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(E)$;

(3) $R\left(\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} R(X)$ en particulier $R(\varnothing) = \varnothing$, $\qquad R\left[\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X\right] = \bigcap_{X \in \mathcal{F}} R[X]$ en particulier $R[\varnothing] = F$;

(4) $X_1 \subset X_2 \rightarrow R(X_1) \subset R(X_2)$, $\qquad X_1 \subset X_2 \rightarrow R[X_1] \supset R[X_2]$;

(5) $R(X_1 \cap X_2) \subset R(X_1) \cap R(X_2)$, $\qquad R[X_1 \cap X_2] \supset R[X_1] \cup R[X_2]$;

(6) $(R_1 \cup R_2)(X) = R_1(X) \cup R_2(X)$ et plus généralement si $\mathcal{R} \subset \mathfrak{P}(E \times F)$, $\qquad (R_1 \cap R_2)[X] = R_1[X] \cap R_2[X]$ et plus généralement si $\mathcal{R} \subset \mathfrak{P}(E \times F)$;

(7) $\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right)(X) = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R(X)$ en particulier $\varnothing(X) = \varnothing$, $\qquad \left(\bigcap_{R \in \mathcal{R}} R\right)[X] = \bigcap_{R \in \mathcal{R}} R[X]$ en particulier $(E \times F)[X] = F$;

(8) $R_1 \subset R_2 \rightarrow R_1(X) \subset R_2(X)$, $\qquad R_1 \subset R_2 \rightarrow R_1[X] \subset R_2[X]$;

(9) $(R_1 \cap R_2)(X) \subset R_1(X) \cap R_2(X)$, $\qquad (R_1 \cup R_2)[X] \supset R_1[X] \cup R_2[X]$;

(10) $(R(X))' = R'[X]$, $\qquad (R[X])' = R'(X)$;

(11) $(E \times F)(X) = \begin{cases} F & \text{si } X \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{si } X = \varnothing, \end{cases} \qquad \varnothing[X] = \begin{cases} \varnothing & \text{si } X \neq \varnothing, \\ F & \text{si } X = \varnothing; \end{cases}$

(12) $\mathrm{pr}_1 \overset{-1}{R} = \mathrm{pr}_2 R$, $\qquad \mathrm{pr}_2 \overset{-1}{R} = \mathrm{pr}_1 R$;

(13) $\mathrm{pr}_1 SR = \overset{-1}{R}(\mathrm{pr}_1 S) \subset \mathrm{pr}_1 R$, $\qquad \mathrm{pr}_2 SR = S(\mathrm{pr}_2 R) \subset \mathrm{pr}_2 S$;

(14) $R(X) = R(X \cap \mathrm{pr}_1 R)$, $\qquad \overset{-1}{R}(Y) = \overset{-1}{R}(Y \cap \mathrm{pr}_2 R)$;

(15) $X \subset \mathrm{pr}_1 R \;\rightleftharpoons\; X \subset \overset{-1}{R}R(X)$, $\qquad Y \subset \mathrm{pr}_2 R \;\rightleftharpoons\; Y \subset R\overset{-1}{R}(Y)$;

(16) $\mathrm{pr}_1 R = \overset{-1}{R}(F) = \overset{-1}{R}R(E) = \overset{-1}{R}(\mathrm{pr}_2 R)$, $\qquad \mathrm{pr}_2 R = R(E) = R\overset{-1}{R}(F) = R(\mathrm{pr}_1 R)$;

(17) $X \neq \varnothing \;\rightarrow\; R[X] \subset R(X)$,

(18) $S[R(X)] = (S'R)'[X]$,

(19) $X \cap \overset{-1}{R}(Y) = \varnothing \;\rightleftharpoons\; Y \cap R(X) = \varnothing$,

(20) $X \subset \overset{-1}{R}[Y] \;\rightleftharpoons\; Y \subset R[X]$.

(¹) Il n'existe pas de relation analogue à celle-ci pour [ ], mais si l'on pose $R\boxed{X} \doteq R[X']$ et $S \odot R = (S'R')'$, alors $S\boxed{R\boxed{X}} = (S \odot R)\boxed{X}$, qui est analogue à (1).

Les formules de (1) à (12) se démontrent très facilement en se reportant aux définitions.

(13) résulte de ce que

$$\mathrm{pr}_1 SR = \overset{-1}{\widehat{SR}}(G) = \overset{-1}{R}\,\overset{-1}{S}(G) = \overset{-1}{R}(\mathrm{pr}_1 S)$$

d'après (24) donné ci-dessous. Or, $\mathrm{pr}_1 S \subset F$. Donc d'après (4)

$$\overset{-1}{R}(\mathrm{pr}_1 S) \subset \overset{-1}{R}(F) = \mathrm{pr}_1 R.$$

On montre de même la seconde formule de (13).

(14) résulte de ce que

$$R(X) = \bigcup_{x \in X} R(x) = \bigcup_{x \in X \cap \mathrm{pr}_1 R} R(x), \qquad \text{puisque} \quad x \notin \mathrm{pr}_1 R \rightarrow R(x) = \emptyset;$$

(15) se démontre ainsi : $X \subset \mathrm{pr}_1 R \rightarrow X \subset \overset{-1}{R}R(X)$, car si $x \in X \rightarrow x \in \mathrm{pr}_1 R$, on a $R(x) \neq \emptyset$. Or $x \in X \rightarrow R(x) \subset R(X)$ d'après (4). Donc $y \in R(x) \rightarrow y \in R(X)$, c'est-à-dire

$$x \in \overset{-1}{R}(y) \rightarrow y \in R(X) \rightarrow \overset{-1}{R}(y) \subset \overset{-1}{R}R(X)$$

d'après (4). Donc $x \in \overset{-1}{R}R(X)$ quel que soit $x \in X$, c'est-à-dire $X \subset \overset{-1}{R}R(X)$. Par ailleurs $X \subset \overset{-1}{R}R(X) \rightarrow X \subset \mathrm{pr}_1 R$ d'après (4), puisque $R(X) \subset F$. La première formule de (15) est donc démontrée; la seconde formule se démontre de manière analogue.

(16) résulte de (14) en faisant $X = E$, $Y = F$;

(17) résulte de ce que $\bigcap_{x \in X} R(x) \subset \bigcup_{x \in X} R(x)$;

(18) résulte de (10);

(19) se démontre ainsi

$$X \cap \overset{-1}{R}(Y) \neq \emptyset \rightleftharpoons \exists x \in X, \quad \exists y \in Y, \quad x \in \overset{-1}{R}(y) \rightleftharpoons \exists x \in Y, \quad \exists y \in Y, \quad y \in R(x)$$
$$\rightleftharpoons Y \cap R(X) \neq \emptyset;$$

(20) se démontre ainsi

$$X \subset \overset{-1}{R}[Y] \quad \rightleftharpoons \quad X \cap \left(\overset{-1}{R}[Y]\right)' = \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad X \cap \overset{-1}{R}{}'(Y) = \emptyset$$
$$\rightleftharpoons R'(X) \cap Y = \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad (R[X])' \cap Y = \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad Y \subset R[X],$$

en appliquant successivement (10), (20) et (10).

On déduit immédiatement de (19) que

$$\text{(21)} \qquad X \supset \overset{-1}{R}(Y) \quad \rightleftharpoons \quad Y' \supset R(X').$$

On a

$$\text{(22)} \qquad X \subset \overset{-1}{R}[R[X]], \qquad\qquad Y \subset R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right],$$

$$\text{(23)} \qquad R[X] = R\left[\overset{-1}{R}[R[X]]\right], \qquad \overset{-1}{R}[Y] = \overset{-1}{R}\left[R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right]\right];$$

en effet en faisant $Y = R[X]$ dans (20), on a $X \subset \overset{-1}{R}[R[X]]$; en faisant $X = \overset{-1}{R}[Y]$ dans (20), on a $Y \subset R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right]$. D'où (22).

Pour démontrer (23) remplaçons X par $\overset{-1}{R}[Y]$ dans (22), on a $\overset{-1}{R}[Y] \subset \overset{-1}{R}\left[R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right]\right]$. Or. d'après (4), $Y \subset R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right] \rightarrow \overset{-1}{R}[Y] \supset \overset{-1}{R}\left[R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right]\right]$. Donc $\overset{-1}{R}[Y] = \overset{-1}{R}\left[R\left[\overset{-1}{R}[Y]\right]\right]$. On démontre de même que $R[X] = R\left[\overset{-1}{R}[R[X]]\right]$.

Il est facile de démoutrer que

$$(24)\qquad \begin{cases} \overset{-1}{\widehat{R_1 \cup R_2}} = \overset{-1}{R_1} \cup \overset{-1}{R_2}, \quad \overset{-1}{\widehat{R_1 \cap R_2}} = \overset{-1}{R_1} \cap \overset{-1}{R_2}, \quad \overset{-1}{R'} = \left(\overset{-1}{R}\right)' \ \text{[1]}, \\ \overset{-1}{\widehat{SR}} = \overset{-1}{R}\,\overset{-1}{S}, \quad R_1 \subset R_2 \to \overset{-1}{R_1} \subset \overset{-1}{R_2}, \quad \overset{-1}{\widehat{\overset{-1}{R}}} = R, \end{cases}$$

$$(25)\qquad S(R_1 \cup R_2) = SR_1 \cup SR_2, \quad (S_1 \cup S_2)R = S_1R \cup S_2R,$$

$$(26)\qquad R_1 \subset R_2 \text{ et } S_1 \subset S_2 \ \to\ S_1R_1 \subset S_2R_2,$$

$$(27)\qquad S(R_1 \cap R_2) \subset SR_1 \cap SR_2, \quad (S_1 \cap S_2)R \subset S_1R \cap S_2R,$$

$$(28)\qquad S\emptyset = \emptyset R = \emptyset,$$

$$(29)\qquad R\Delta_E = \Delta_F R = R$$

en désignant par Δ_E et Δ_F les diagonales respectives des ensembles $E \times E$ et $F \times F$ [Ens. R, § 3, n° 4].

H étant un ensemble quelconque et T une relation quelconque entre les éléments de G et de H, on a

$$(30)\qquad T(SR) = (TS)R \ \text{[2]}.$$

2. La relation de Dedekind [3]. — E, F, G étant trois ensembles quelconques, si $R \subset E \times F$, $S \subset F \times G$, $T \subset E \times G$, on a

$$(31)\qquad SR \cap T \subset \left(S \cap T\overset{-1}{R}\right)\left(R \cap \overset{-1}{S}T\right).$$

En effet, soit $z \in (SR \cap T)(x)$. Alors

$$z \in SR(x) \ \rightleftarrows\ \overset{-1}{S}(z) \cap R(x) \neq \emptyset,$$
$$z \in T(x) \ \rightleftarrows\ x \in \overset{-1}{T}(z) \to R(x) \subset R\overset{-1}{T}(z),$$
$$z \in T(x) \ \to\ \overset{-1}{S}(z) \subset S\overset{-1}{T}(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \overset{-1}{S}(z) \cap R(x) \neq \emptyset \ &\to\ \overset{-1}{R}T(z) \cap \overset{-1}{S}T(x) \cap \overset{-1}{S}(z) \cap R(x) \neq \emptyset, \\ &\to\ \left(R\overset{-1}{T} \cap S\right)(z) \cap \left(\overset{-1}{S}T \cap R\right)(x) \neq \emptyset, \\ &\to\ z \in \left(S \cap T\overset{-1}{R}\right)\left(R \cap \overset{-1}{S}T\right). \end{aligned}$$

Corollaire. — *Si les symboles* R, S *ont la même signification que dans la relation de Dedekind, et si* $T \subset G \times E$.

$$(32)\qquad \begin{aligned} SR \cap \overset{-1}{T} = \emptyset \ &\rightleftarrows\ TS \cap \overset{-1}{R} = \emptyset \ \rightleftarrows\ RT \cap \overset{-1}{S} = \emptyset \\ &\rightleftarrows\ TSR \cap \Delta_E = \emptyset \ \rightleftarrows\ RTS \cap \Delta_F = \emptyset \ \rightleftarrows\ SRT \cap \Delta_G = \emptyset. \end{aligned}$$

En effet, en substituant $\overset{-1}{T}$ à T dans la relation de Dedekind, on a

$$SR \cap \overset{-1}{T} \subset \left(S \cap \overset{-1}{T}\,\overset{-1}{R}\right)\left(R \cap \overset{-1}{S}\,\overset{-1}{T}\right).$$

---

[1] On écrit donc $\overset{-1}{R'}$ sans préciser.

[2] Mentionnons que pour $\odot$ on a

$$T \odot (S \odot R) = (T \odot S) \odot R,$$
$$S \odot (R_1 \cap R_2) = (S \odot R_1) \cap (S \odot R_2),$$
$$(S_1 \cap S_2) \odot R = (S_1 \odot R) \cap (S_2 \odot R),$$
$$(F \times G) \odot R = S \odot (E \times F) = E \times G, \quad \Delta'_F \odot R = R \odot \Delta'_E = R.$$

[3] Nous pensons pouvoir appeler ainsi cette relation, puisqu'elle contient comme cas particulier la relation entre idéaux dans un anneau découverte par Dedekind.

Donc

$$\mathrm{SR} \cap \overset{-1}{\mathrm{T}} \neq \emptyset \;\rightarrow\; \mathrm{S} \cap \overset{-1}{\mathrm{T}}\,\overset{-1}{\mathrm{R}} \neq \emptyset \text{ et } \mathrm{R} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}}\,\overset{-1}{\mathrm{T}} \neq \emptyset$$
$$\rightarrow\; \mathrm{TS} \cap \overset{-1}{\mathrm{R}} \neq \emptyset \text{ et } \mathrm{RT} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}} \neq \emptyset.$$

Par symétrie on a donc

$$\mathrm{SR} \cap \overset{-1}{\mathrm{T}} = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \mathrm{TS} \cap \overset{-1}{\mathrm{R}} = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \mathrm{RT} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}} = \emptyset.$$

On a

$$\mathrm{RT} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}} = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \mathrm{S}\Delta_{\mathrm{F}} \cap \overset{-1}{\widehat{\mathrm{RT}}} = \emptyset \;\rightleftharpoons\; (\mathrm{RT})\mathrm{S} \cap \Delta_{\mathrm{F}} = \emptyset.$$

De même pour les autres.

Corollaire. — *Si les symboles* R, S, T_1, T_2 *désignent quatre sous-ensembles d'un même ensemble* $E \times E$ *et si* $T_1 T_1 \subset T_1$, $T_2 T_2 \subset T_2$ *on a*

$$(33) \qquad \mathrm{S} \subset \mathrm{T}_2 \cap \overset{-1}{\mathrm{T}_2} \text{ et } \mathrm{R} \subset \mathrm{T}_1 \cap \overset{-1}{\mathrm{T}_1} \;\rightarrow\; \mathrm{T}_1 \cap \mathrm{SR} \cap \mathrm{T}_2 = (\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_1)(\mathrm{R} \cap \mathrm{T}_2) = (\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_2)(\mathrm{R} \cap \mathrm{T}_1).$$

En effet, en faisant $T = T_1 \cap T_2$ et en supposant $E = F = G$ dans la relation de Dedekind, on a

$$\mathrm{T}_1 \cap \mathrm{SR} \cap \mathrm{T}_2 \subset \big(\mathrm{S} \cap (\mathrm{T}_1 \cap \mathrm{T}_2)\overset{-1}{\mathrm{R}}\big)\big(\mathrm{R} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}}(\mathrm{T}_1 \cap \mathrm{T}_2)\big) \subset \big(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_1\overset{-1}{\mathrm{R}}\big)\big(\mathrm{R} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}}\mathrm{T}_2\big),$$

d'après (26). Or $\mathrm{S} \subset \overset{-1}{\mathrm{T}_2}$, donc $\mathrm{S}\overset{-1}{\mathrm{T}_2} \subset \mathrm{T}_2\mathrm{T}_2 \subset \mathrm{T}_2$. De même $\mathrm{R} \subset \overset{-1}{\mathrm{T}_1}$, donc $\mathrm{T}_1\overset{-1}{\mathrm{R}} \subset \mathrm{T}_1\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_1$.
Donc $\mathrm{T}_1 \cap \mathrm{SR} \cap \mathrm{T}_2 \subset (\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_1)(\mathrm{R} \cap \mathrm{T}_2)$. Or $(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_1)(\mathrm{R} \cap \mathrm{T}_2) \subset \mathrm{SR} \cap \mathrm{T}_1\mathrm{R} \cap \mathrm{ST}_2$.
Mais $\mathrm{S} \subset \mathrm{T}_2$, donc $\mathrm{ST}_2 \subset \mathrm{T}_2\mathrm{T}_2 \subset \mathrm{T}_2$; $\mathrm{R} \subset \mathrm{T}_1$, donc $\mathrm{T}_1\mathrm{R} \subset \mathrm{T}_1\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_1$.
Donc $(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_1)(\mathrm{R} \cap \mathrm{T}_2) \subset \mathrm{SR} \cap \mathrm{T}_1 \cap \mathrm{T}_2$, ce qui démontre (33).

La relation de Dedekind peut être généralisée de diverses façons. Par exemple, si l'on se donne quatre ensembles E, F, G, H et si $R \subset E \times F$, $S \subset F \times G$, $T \subset G \times H$, $U \subset E \times H$, on a

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{TSR} \subset \big(\mathrm{T} \cap \mathrm{U}\overset{-1}{\mathrm{R}}\,\overset{-1}{\mathrm{S}}\big)\big(\mathrm{S} \cap \overset{-1}{\mathrm{T}}\mathrm{U}\overset{-1}{\mathrm{R}}\big)\big(\mathrm{R} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}}\,\overset{-1}{\mathrm{T}}\mathrm{U}\big);$$

en effet,

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{TSR} = \mathrm{U} \cap (\mathrm{TS})\mathrm{R} \subset \big(\mathrm{TS} \cap \mathrm{U}\overset{-1}{\mathrm{R}}\big)\big(\mathrm{R} \cap \overset{-1}{\mathrm{S}}\,\overset{-1}{\mathrm{T}}\mathrm{U}\big),$$

d'après (31). Or

$$\big(\mathrm{TS} \cap \mathrm{U}\overset{-1}{\mathrm{R}}\big) \subset \big(\mathrm{T} \cap \mathrm{U}\overset{-1}{\mathrm{R}}\,\overset{-1}{\mathrm{S}}\big)\big(\mathrm{S} \cap \overset{-1}{\mathrm{T}}\mathrm{UR}\big),$$

d'après (31).

Corollaire. — *Quel que soit* $R \subset E \times F$,

$$(34) \qquad \mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}'} \subset \Delta'_{\mathrm{F}}, \qquad \overset{-1}{\mathrm{R}'}\mathrm{R} \subset \Delta'_{\mathrm{E}},$$

car

$$\overset{-1}{\mathrm{R}'} \cap \overset{-1}{\mathrm{R}} = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \overset{-1}{\mathrm{R}'}\Delta_{\mathrm{F}} \cap \overset{-1}{\mathrm{R}} = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \mathrm{R}\,\overset{-1}{\mathrm{R}'} \cap \Delta_{\mathrm{F}} = \emptyset, \qquad \text{d'après (32)},$$
$$\mathrm{R} \cap \mathrm{R}' = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \mathrm{R}\,\Delta_{\mathrm{E}} \cap \mathrm{R}' = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \overset{-1}{\mathrm{R}'}\mathrm{R} \cap \Delta_{\mathrm{E}} = \emptyset.$$

3. Quelques définitions. — Avant de passer à l'étude de certaines relations binaires, nous poserons quelques définitions.

Étant donné deux ensembles E et F et $R \subset E \times F$, nous appellerons *fermeture rectangle de* R la relation $\mathrm{pr}_1 R \times \mathrm{pr}_2 R$ [1].

---

[1] Lorsque $X \subset E$ et $Y \subset F$, nous désignons par $X \times Y$ l'ensemble des $(x, y) \in E \times F$ tels que $x \in X$ et $y \in Y$.

Nous dirons que R est une *relation rectangle* lorsqu'elle est égale à sa fermeture rectangle.

Nous supposerons désormais jusqu'à la fin de ce paragraphe qu'on se donne un ensemble E et $R \subset E \times E$. Nous désignerons par Δ la diagonale de $E \times E$, par $\overset{m}{R}$ le composé $R \ldots R$ de m facteurs égaux à R.

Il est facile de voir que

$$R \cap \Delta = \overset{-1}{R} \cap \Delta = R \cap \overset{-1}{R} \cap \Delta$$

et que, quel que soit l'entier m,

$$pr_1 \overset{m}{R} \subset pr_1 R, \qquad pr_2 \overset{m}{R} \subset pr_2 R.$$

Nous poserons

$$E_R = pr_1\left(R \cup \overset{-1}{R}\right) = pr_2\left(R \cup \overset{-1}{R}\right) = pr_1 R \cup pr_2 R,\ \Delta_{E_R} = \Delta \cap (E_R \times E_R)$$

Nous appellerons :

Fermeture carrée de R et nous désignerons par $\overline{R}^{c}$ la relation $\overline{R}^{c} = E_R \times E_R$ autrement dit la fermeture rectangle de $R \cup \overset{-1}{R}$;

Fermeture transitive de R et nous désignerons par $\overline{R}$ la relation $\overline{R} = \bigcup_{m \in N^*} \overset{m}{R}$ (²);

Fermeture quasi réflexive de R la relation $R \cup \Delta_{E_R}$;

Fermeture réflexive (ou *large*) de R la relation $R \cup \Delta$;

Fermeture symétrique de R la relation $R \cup \overset{-1}{R}$;

Fermeture préordinale de R la relation $\overline{R \cup \Delta} = \Delta \cup \overline{R}$;

Fermeture de quasi équivalence de R et nous désignerons par $\overline{R}^{k}$ la relation $\overline{R}^{k} = \overline{R \cup \overset{-1}{R}} = \Delta_{E_R} \cup \overline{R \cup \overset{-1}{R}} = \overline{\Delta_{E_R} \cup R \cup \overset{-1}{R}}$ (³)

Ouverture antiréflexive (ou *stricte*) (⁴) de R la relation $R \cap \Delta'$;

Ouverture symétrique de R la relation $R \cap \overset{-1}{R}$.

Nous dirons qu'une relation R est respectivement : carrée, transitive, quasi réflexive, réflexive, symétrique, de préordre, de quasi équivalence, antiréflexive (⁴), si elle est respectivement égale à sa fermeture carrée, à sa fermeture transitive, à sa fermeture quasi réflexive, à sa fermeture réflexive, à sa fermeture symétrique (ou ce qui est équivalent, à son ouverture symétrique), à sa fermeture préordinale, à sa fermeture de quasi équivalence, à son ouverture antiréflexive.

(²) Nous désignons avec N. Bourbaki par N l'ensemble des entiers positifs ou nuls et par N* l'ensemble des entiers positifs non nuls. On pose parfois $\overset{\circ}{R} = \Delta_{E_R}$. Alors $\overline{R} \cup \Delta_{E_R} = \bigcup_{m \in N} \overset{m}{R}$. Ceci est conforme aux principes d'algèbre, puisque la composition est associative et Δ_{E_R} élément neutre pour R ([1], § 2, Déf. 2).

(³) En effet cela résulte d'une part de ce que $\Delta_{E_R} = \Delta \cap \left(\overset{-1}{R}\, R \cup R \overset{-1}{R}\right) \subset \overline{R \cup \overset{-1}{R}}$ (*Cf.* la fin du présent paragraphe) et d'autre part de ce que $R \Delta_{E_R} = \Delta_{E_R} R = R$ (*cf.* ci-dessous le corollaire de la proposition 2).

(⁴) On dit aussi *stricte* ou *aliorelative* pour antiréflexive.

Il est facile de montrer que :

R transitive	$\rightleftharpoons$	$\overset{2}{R} \subset R$;
R quasi réflexive	$\rightleftharpoons$	$R \supset \Delta_{E_R}$;
R réflexive	$\rightleftharpoons$	$R \supset \Delta$;
R symétrique	$\rightleftharpoons$	$R = \overset{-1}{R}$;
R préordre	$\rightleftharpoons$	R réflexive et transitive;
R quasi équivalence	$\rightleftharpoons$	R symétrique, transitive;
R antiréflexive	$\rightleftharpoons$	$R \subset \Delta'$.

D'après (13) il est immédiat que $pr_1 \overline{R} = pr_1 R$, $pr_2 \overline{R} = pr_2 R$, autrement dit R et $\overline{R}$ ont même fermeture rectangle.

Une relation de quasi équivalence réflexive sera appelée *relation d'équivalence.*

On vérifiera facilement que

$$\Delta_{E_R} = \Delta \cap \left(\overset{-1}{R} R \cup R \overset{-1}{R}\right)$$
$$R \subset \Delta \ \rightleftharpoons\ R = \Delta_{E_R}$$

et que lorsque R est symétrique

$$R \supset \Delta \ \rightleftharpoons\ \Delta_{E_R} = \Delta$$

Remarque. — On peut définir R sans faire intervenir l'ensemble des entiers en posant par exemple $\overline{R} = \bigcap\limits_{U \supset UR \cup R} U$. L'équivalence des deux définitions résulte de ce que $U = \overline{R} \rightarrow U \supset UR \cup R \rightarrow U \supset UR$ et $U \supset R \rightarrow U \supset UR \supset R^2 \rightarrow U \supset \overline{R}$.

On montre de même que quel que soit $x \in E$ $\overline{R}(x) = \bigcap\limits_{X \supset R(X \cup \{x\})} X$.

4. Représentation des relations binaires entre éléments d'ensembles finis par des matrices. — Considérons deux ensembles finis E et F et une relation R entre les éléments de E et de F. Puisque E est fini nous pouvons désigner ses éléments par $a_1, \dots, a_n$; puisque F est fini nous pouvons désigner ses éléments par $b_1, \dots, b_m$.

Faisons correspondre à R le tableau rectangulaire ou matrice de m lignes et n colonnes obtenu en écrivant 1 à l'intersection de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne lorsque $(a_p, b_q) \in R$ et en écrivant 0 lorsque $(a_p, b_q) \notin R$.

Il est facile de constater que la matrice correspondant à R' se déduit de celle correspondant à R en changeant les 0 en 1 et les 1 en 0, que si R_1 et R_2 sont deux relations entre les éléments de E et de F, la matrice correspondant à $R_1 \cap R_2$ (resp. $R_1 \cup R_2$) est la matrice obtenue en « ajoutant » les éléments des matrices correspondant à R_1 et R_2 suivant la règle habituelle de l'addition des matrices avec les lois

$$0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0 \qquad (\text{resp. } 0 \cup 0 = 0),$$
$$1 \cap 1 = 1 \qquad (\text{resp. } 1 \cup 1 = 1 \cup 0 = 0 \cup 1 = 1);$$

que la matrice correspondant à zéro a tous ses éléments égaux à zéro, que la matrice correspondant à $E \times F$ a tous ses éléments égaux à 1, que dans le cas particulier où $E = F$, la matrice correspondant à $\overset{-1}{R}$ est la symétrique de la matrice correspondant à R par rapport à sa diagonale principale et que la matrice correspondant à la diagonale Δ est constituée par des 1 remplissant la diagonale principale et des zéros partout ailleurs.

Soit X un sous-ensemble de E. Faisons correspondre à X la matrice à une colonne et à n lignes obtenue en écrivant 1 dans la $r^{\text{ième}}$ ligne lorsque $a_p \in X$ et en écrivant 0 lorsque $a_p \notin X$. On constate alors facilement que la matrice a une colonne et a m lignes obtenues en multipliant la matrice correspondant à R avec la matrice correspondant à X par la règle habituelle de la multiplication des matrices avec les lois

$$00 = 01 = 10 = 0, \qquad 11 = 1,$$

$\cup$ étant considérée comme addition est identique à la matrice correspondant à $R(X)$.

Soit G un ensemble quelconque et S une relation entre les éléments de F et de G. On constate de la même manière que la matrice correspondant à SR est identique à la matrice obtenue en faisant le produit des matrices correspondant à S et à R suivant la règle précédente.

Exemples. — Supposons que

$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \text{ (1)}, \qquad F = \{b_1, b_2, b_3\}, \qquad G = \{c_1, c_2\}, \qquad X = \{a_1, a_2\},$$
$$R = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_3)\}, \qquad S = \{(b_1, c_1), (b_3 c_2)\}.$$

On trouve que

$$R(X) = \{b_1, b_3\}, \qquad SR = \{(a_1, c_2), (a_2, c_1), (a_3, c_1), (a_4, c_1), (a_4, c_2)\}.$$

Les matrices correspondant à X, R, S s'écrivent respectivement

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Nous constatons qu'à $R(X)$ correspond

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

et qu'à SR correspond

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

(1) Rappelons que nous désignons par $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ l'ensemble dont les éléments sont a_1, a_2, a_3, a_4. En particulier l'ensemble dont le seul élément est x se note $\{x\}$ [Ens. R, § 1, n° 9].

5. Relations rectangles. — *Proposition* 1. — Soient E et F deux ensembles quelconques $A \subset E$, $B \subset F$, $X \subset E$. On a

$$(A \times B)(X) = \begin{vmatrix} B & \text{si} \quad X \cap A \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si} \quad X \cap A = \emptyset. \end{vmatrix} \tag{35}$$

En effet, on a, d'après (3) et (7),

$$(A \times B)(X) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B \\ x \in X}} \{(a, b)\}(x).$$

Or, d'après la définition de la coupe $\{(a, b)\}$ suivant x, on a

$$\{(a, b)\}(x) = \begin{vmatrix} \{b\} & \text{si} \quad x = a, \\ \emptyset & \text{si} \quad x \neq a. \end{vmatrix}$$

Donc

$$(A \times B)(X) = \begin{vmatrix} \bigcup_{b \in B} \{b\} = B & \text{si} \quad X \cap A \neq \emptyset. \\ \emptyset & \text{si} \quad X \cap A = \emptyset. \end{vmatrix}$$

Proposition 2. — Soient trois ensembles quelconques et soit $R \subset E \times F$, $S \subset F \times G$ et $A \subset E$, $B \subset F$, $C \subset G$, $B_1 \subset F$, $B_2 \subset F$

$$\begin{cases} S(A \times B) = A \times S(B), \\ (B \times C)R = \overset{-1}{R}(B) \times C, \\ (B_2 \times C)(A \times B_1) = \begin{vmatrix} A \times C & \text{si} \quad B_1 \cap B_2 \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si} \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset. \end{vmatrix} \end{cases} \tag{36}$$

En effet,

$$(x, z) \in S(A \times B) \quad \rightleftharpoons \quad \{z\} \cap S(A \times B)(x) \neq \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad \overset{-1}{S}(z) \cap (A \times B)(x) \neq \emptyset,$$

d'après (19). Ceci implique que $x \in A$ car, sinon d'après la proposition précédente, on aurait $\overset{-1}{S}(z) \cap (A \times B)(x) = \emptyset$. Mais alors $(A \times B)(x) = B$. Donc

$$\overset{-1}{S}(z) \cap (A \times B)(x) \neq \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad \overset{-1}{S}(z) \cap B \neq \emptyset \quad \text{et} \quad x \in A \quad \rightleftharpoons \quad \{z\} \cap S(B) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad x \in A$$

d'après (19), c'est-à-dire $(x, z) \in A \times S(B)$. La première formule est donc démontrée. La seconde se démontre de façon analogue. La troisième se déduit immédiatement de l'une quelconque des deux premières et de la proposition 1.

Corollaire. — *Si* $R \subset E \times E$, *on a*

$$\Delta_{E_R} R = R \Delta_{E_R} = R, \qquad \Delta_{E_R} \overset{-1}{R} = \overset{-1}{R} \Delta_{E_R} = \overset{-1}{R}.$$

En effet $(\Delta \cap (E'_R \times E'_R)) R \subset (E'_R \times E'_R)(E_R \times E_R) = \emptyset$.
Or $\Delta = (\Delta \cap (E'_R \times E'_R)) \cup \Delta_{E_R}$. Donc $R = \Delta R = \Delta_{E_R} R = R\Delta = R\Delta_{E_R}$.

Corollaire. — *Soit* $R \subset E \times F$. *On a*

R est une relation rectangle $\rightleftharpoons$ Il existe $A \subset E$, $B \subset F$ tels que $R = A \times B$, (*a*)

$\rightleftharpoons$ $R(F \times E)R = R$, (*b*)

$\rightleftharpoons$ $R\overset{-1}{R}{}'R = \emptyset$. (*c*)

En effet,

R relation rectangle $\rightarrow (a)$: Il suffit de prendre $A = \mathrm{pr}_1 R$, $B = \mathrm{pr}_2 R$;
$(a) \rightarrow (b)$, car d'après la proposition précédente, si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, on a

$$(A\times B)(F\times E)(A\times B) = (A\times B)$$

et ceci reste vrai si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;

$(b) \rightarrow (c)$ car

$$R(F\times E)R = R \;\rightarrow\; R(F\times E)R\cap R' = \emptyset \;\rightleftharpoons\; \overset{-1}{R}{}'R(F\times E)\cap \overset{-1}{R} = \emptyset,$$

$$\rightleftharpoons\; R\overset{-1}{R}{}'R\cap(E\times F) = \emptyset \;\rightleftharpoons\; R\overset{-1}{R}{}'R = \emptyset \quad \text{d'après (32)};$$

$(c) \rightarrow R$ est une relation rectangle : en effet, d'après la proposition précédente,

$$R(F\times E)R = \overset{-1}{R}(F)\times R(E) = \mathrm{pr}_1 R\times \mathrm{pr}_2 R.$$

Remarquons que

$$(A_1\times A_2)\cap\Delta_E = \emptyset \;\rightleftharpoons\; A_1\cap A_2 = \emptyset,$$
$$(B_1\times B_2)\cap\Delta_F = \emptyset \;\rightleftharpoons\; B_1\cap B_2 = \emptyset;$$

ceci permet, d'après (36) et (32), de compléter les formules (19) et (20) de la manière suivante :

$$(19) \qquad (X\times Y)\cap R = \emptyset \;\rightleftharpoons\; X\cap\overset{-1}{R}(Y) = \emptyset \;\rightleftharpoons\; Y\cap R(X) = \emptyset,$$

$$(20) \qquad X\times Y\subset R \;\rightleftharpoons\; X\subset\overset{-1}{R}[Y] \;\rightleftharpoons\; Y\subset R[X].$$

On a vu que le composé d'une relation binaire quelconque et d'une relation rectangle est une relation rectangle. L'intersection d'une famille quelconque de relations rectangles est une relation rectangle et la réunion d'une famille de relations rectangles ayant toutes la même projection sur E (ou la même projection sur F) est une relation rectangle; plus généralement si $\mathcal{R}\subset\mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(F)$ on montre facilement que

$$\bigcap_{(X,Y)\in\mathcal{R}}(X,Y) = \Big(\bigcap_{X\in\mathrm{pr}_1\mathcal{R}} X\Big)\times\Big(\bigcap_{Y\in\mathrm{pr}_2 R} Y\Big)$$

et que si $\mathcal{R}$ est une relation rectangle

$$\bigcup_{(X,Y)\in\mathcal{R}}(X,Y) = \Big(\bigcup_{X\in\mathrm{pr}_1\mathcal{R}} X\Big)\times\Big(\bigcup_{Y\in\mathrm{pr}_2 R} Y\Big).$$

Comparer [Ens. R, § **4**, n° **3**, form. (38) et n° **8**, form. (43)].

Considérons deux ensembles finis $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $F = \{b_1, \ldots, b_m\}$.

Soit A une partie de E, B une partie de F. On constate très facilement que la matrice représentant $A\times B$ est le produit kroneckerien (ou produit tensoriel. *Cf.* la note p. 117) de la transposée de la matrice représentant B. Par exemple, si

$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \qquad F = \{b_1, b_2, b_3\}, \qquad A = \{a_1, a_3\}, \qquad B = \{b_1, b_3\},$$

la transposée de la matrice représentant A est $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, la matrice représentant B est $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ et leur produit kroneckerien est la matrice $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ qui représente la relation rectangle $A\times B$.

On constatera facilement que pour qu'une matrice représente une relation rectangle, il faut et il suffit, que si deux éléments 1 figurent dans cette matrice, alors les deux lignes et les deux colonnes de ces deux éléments constituent un rectangle dont les deux autres sommets sont eux aussi occupés par des 1.

Pour clore ce paragraphe, nous donnerons la généralisation suivante de (15).

Proposition 3. — Soient D, E, F, G quatre ensembles quelconques, $R\subset E\times F$, $P\subset D\times F$, $S\subset E\times G$. On a

(37) $$S\subset(F\times G)R \rightleftharpoons S\subset S\overset{-1}{R}R,\qquad P\subset R(D\times E)\rightleftharpoons P\subset R\overset{-1}{R}P.$$

En effet

$$(x, z)\in S\rightarrow(x, z)\in(F\times G)R=\overset{-1}{R}(F)\times G.$$

Donc $x\in\overset{-1}{R}(F)$, donc $x\in\overset{-1}{R}R(x)$ d'après (15). Donc

$$(x, z)\in\overset{-1}{R}R(x)\times\{z\}=\{(x, z)\}\overset{-1}{R}R.$$

Donc

$$S\subset\bigcup_{(x,z)\in S}\{(x, z)\}\overset{-1}{R}R=S\overset{-1}{R}R.$$

Démonstration analogue pour la seconde formule.

Corollaire. — *Quel que soit* $R\subset E\times F$, $S\subset E\times F$,

(38) $$S\subset S\overset{-1}{R}R,\qquad S\subset R\overset{-1}{R}S$$

quel que soit $R\subset E\times F$,

(39) $$R\subset R\overset{-1}{R}R.$$

6. **Relations quasi fonctionnelles.** — Soit R une relation binaire entre les éléments de deux ensembles E et F. Nous dirons que :

R est *partout définie,* lorsque $\Delta_E\subset\overset{-1}{R}R$ (ou ce qui est équivalent $\Delta_E=\Delta_{E_{\overset{-1}{R}R}}$);

R est *quasi fonctionnelle* (ou encore *univoque*), lorsque $R\overset{-1}{R}\subset\Delta_F$ (ou ce qui est équivalent $R\overset{-1}{R}=\Delta_{F_{\overset{-1}{R}R}}$);

R est *biunivoque* lorsque R et $\overset{-1}{R}$ sont univoques;

R est *fonctionnelle* de E dans F, lorsque $\Delta_E\subset\overset{-1}{R}R$ et $R\overset{-1}{R}\subset\Delta_F$;

R est *fonctionnelle* de E *sur* F, lorsque $\Delta_E\subset\overset{-1}{R}R$ et $R\overset{-1}{R}=\Delta_F$;

R est *fonctionnelle biunivoque* de E dans F, lorsque $\Delta_E=\overset{-1}{R}R$ et $R\overset{-1}{R}\subset\Delta_F$;

R est *fonctionnelle biunivoque* de E *sur* F, lorsque $\Delta_E=\overset{-1}{R}R$ et $R\overset{-1}{R}=\Delta_F$.

Lorsque $E=F$ une relation fonctionnelle biunivoque de E sur E est encore appelée *permutation* de E.

Proposition 4. — L'énoncé « R est une relation partout définie » est équivalent à l'un quelconque des douze énoncés suivants :

a. Quel que soit $x \in E$, $R(x) \neq \emptyset$;

b. $pr_1 R = E$;

c. quels que soient $P_1 \subset D \times E$, $P_2 \subset D \times E$, D étant un ensemble donné, on a $RP_1 \cap RP_2 = \emptyset \rightarrow P_1 \cap P_2 = \emptyset$;

d. quel que soit $P \subset D \times E$, D étant un ensemble donné, on a $RP = \emptyset \rightleftharpoons P = \emptyset$;

e. quelles que soient les parties X_1 et X_2 de E, on a

$$R(X_1) \cap R(X_2) = \emptyset \rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset;$$

f. quelle que soit la partie X de E, on a $R(X) = \emptyset \rightleftharpoons X = \emptyset$;

g. quels que soient $S_1 \subset F \times G$, $S_2 \subset F \times G$, G étant un ensemble donné, on a $S_1 \cup S_2 = F \times G \rightarrow S_1 R \cup S_2 R = E \times G$;

h. quel que soit $S \subset F \times G$, G étant un ensemble donné, on a $S'R \cup SR = E \times G$;

i. $R' \subset \Delta'_F R$;

j. quelles que soient les parties Y_1 et Y_2 de F, on a

$$Y_1 \cup Y_1 = F \rightarrow \overset{-1}{R}(Y_2) \cup \overset{-1}{R}(Y_2) = E;$$

k. quelle que soit la partie Y de F, $\overset{-1}{R}(Y) \cup \overset{-1}{R}(Y') = E$;

l. $\overset{-1}{R}R \supset (\overset{-1}{R'}R)'$.

En effet :

R partout définie $\rightleftharpoons (a)$, car $\Delta_E \subset \overset{-1}{R}R \rightleftharpoons$ quel que soit x, $x \in \overset{-1}{R}R(x) \rightleftharpoons$ quel que soit x, $\{x\} \cap \overset{-1}{R}R(x) \neq \emptyset \rightleftharpoons R(x) \neq \emptyset$ quel que soit x d'après (19);

R partout définie $\rightarrow (b)$, car $\Delta_E \subset \overset{-1}{R}R \rightarrow \Delta_E(E) \subset \overset{-1}{R}R(E)$, c'est-à-dire $pr_1 R = E$;

$(b) \rightarrow$ R partout définie, car $X \subset E \rightarrow X \subset pr_1 R \rightarrow X \subset \overset{-1}{R}R(X)$ d'après (15). Donc quel que soit $X \subset E$, $\Delta(X) \subset \overset{-1}{R}R(X)$, c'est-à-dire $\overset{-1}{R}R \supset \Delta$;

R partout définie $\rightarrow (c)$, car $RP_1 \cap RP_2 = \emptyset \rightleftharpoons \overset{-1}{R}RP_2 \cap P_1 = \emptyset$ d'après (32). Or $\overset{-1}{R}RP_2 \supset P_2$ puisque $\overset{-1}{R}R \supset \Delta$. Donc $P_2 \cap P_1 = \emptyset$;

$(c) \rightarrow (d)$: faire $P_1 = P_2 = P$;
$(c) \rightarrow (e)$: faire $P_1 = D \times X_1$, $P_2 = D \times X_2$;
$(d) \rightarrow (f)$: faire $P = D \times X$;
$(e) \rightarrow (f)$: faire $X_1 = X_2 = X$;
$(f) \rightarrow (b)$ car : $R(X) = \emptyset \rightleftharpoons R(X) \cap F = \emptyset \rightleftharpoons X \cap \overset{-1}{R}(F) = \emptyset \rightleftharpoons X \subset (pr_1 R)'$.

Donc quel que soit $X \subset (pr_1 R)' = \emptyset$, c'est-à-dire $pr_1 R = E$.

R partout définie $\rightarrow (g)$, car $(S_1 \cup S_2)R = (F \times G)R = \overset{-1}{R}(F) \times G = F \times G$ d'après (b);

$(g) \rightarrow (h)$: faire $S_1 = S$, $S_2 = S'$;
$(g) \rightarrow (j)$: faire $S_1 = Y_1 \times G$, $S_2 = Y_2 \times G$;
$(h) \rightarrow (k)$: faire $S = Y \times G$;
$(j) \rightarrow (k)$: faire $Y_1 = Y$, $Y_2 = Y'$;
$(k) \rightarrow (b)$: faire $Y = F$;
$(g) \rightarrow (i)$: faire $S_1 = \Delta_F$, $S_2 = \Delta'_F$ en supposant $G = F$;
$(i) \rightarrow (b)$: car si l'on ajoute R aux deux membres de $R' \subset \Delta'_F R$, il vient

$$E \times F \subset \Delta'_F R \cup \Delta_F R = (F \times F)R = \overset{-1}{R}(F) \times F.$$

Donc $E = \overset{-1}{R}(F)$;

(*k*) $\rightarrow (l)$: faire $G = E$ et $S = \overset{-1}{R}$;
(*l*) $\rightarrow$ R partout définie résulte de (34).

Proposition 5. — L'énoncé « R est quasi fonctionnelle » est équivalent à l'un quelconque des neuf énoncés suivants :

a. Quel que soit x, $R(x)$ a au plus un élément;

b. quels que soient $S_1 \subset F \times G$, $S_2 \subset F \times G$, G étant un ensemble donné, on a $(S_1 \cap S_2)R = S_1 R \cap S_2 R$;

c. quels que soient $S_1 \subset F \times G$, $S_2 \subset F \times G$, G étant un ensemble donné, on a $S_1 \cap S_2 = \emptyset \rightarrow S_1 R \cap S_2 R = \emptyset$;

d. Quel que soit $S \subset F \times G$, G étant un ensemble donné, on a $SR \cap S'R = \emptyset$;

e. $\Delta'_F R \subset R'$;

f. quelles que soient les parties Y_1 et Y_2 de F, on a

$$\overset{-1}{R}(Y_1 \cap Y_2) = \overset{-1}{R}(Y_1) \cap \overset{-1}{R}(Y_2);$$

g. quelles que soient les parties Y_1 et Y_2 de F, on a

$$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \rightarrow \overset{-1}{R}(Y_1) \cap \overset{-1}{R}(Y_2) = \emptyset;$$

h. quelle que soit la partie Y de F, on a $\overset{-1}{R}(Y) \cap \overset{-1}{R}(Y') = \emptyset$;

i. quelle que soit la partie Y de F, on a $\overset{-1}{R}(Y') = \overset{-1}{R}(F) \cap \left(\overset{-1}{R}(Y)\right)'$.

En effet :

R est quasi fonctionnelle $\rightleftharpoons (a)$, car

$$\begin{aligned} R\overset{-1}{R} \subset \Delta &\rightleftharpoons \text{quels que soient } y_1, y_2, y_2 \in R\overset{-1}{R}(y_1) \rightarrow y_2 = y_1,\\ &\rightleftharpoons \text{quels que soient } y_1, y_2, \exists x, y_1 \in R(x) \text{ et } y_2 \in R(x) \rightarrow y_1 = y_2,\\ &\rightleftharpoons \text{quel que soit } x, R(x) \text{ a au plus un élément.}\end{aligned}$$

R quasi fonctionnelle $\rightarrow (b)$. Pour le démontrer il suffit de prouver d'après (27) que $(S_1 \cap S_2)R \supset S_1 R \cap S_2 R$. Or $(S_1 R \cap S_2 R)\overset{-1}{R} \subset S_1 R \overset{-1}{R} \cap S_2 R \overset{-1}{R} \subset S_1 \cap S_2$, puisque $R\overset{-1}{R} \subset \Delta_F$. D'où $(S_1 R \cap S_2 R)\overset{-1}{R} R \subset (S_1 \cap S_2)R$. D'autre part $(S_1 R \cap S_2 R) \subset (F \times G)R$. Donc d'après (36), on a $S_1 R \cap S_2 R \subset (S_1 R \cap S_2 R)\overset{-1}{R} R$. On a donc bien $(S_1 R \cap S_2 R) \subset (S_1 \cap S_2)R$.

(*b*) $\rightarrow (c)$: c'est immédiat;
(*c*) $\rightarrow (d)$: il suffit de faire $S_1 = S$, $S_2 = S'$;
(*d*) $\rightarrow (e)$: il suffit de prendre $G = F$ et $S = \Delta_F$;
(*e*) $\rightarrow$ R est quasi fonctionnelle, car

$$\Delta'_F R \subset R' \rightleftharpoons \Delta'_F R \cap R = \emptyset \rightleftharpoons R\overset{-1}{R} \cap \Delta'_F = \emptyset \rightleftharpoons R\overset{-1}{R} \subset \Delta_F;$$

(*b*) $\rightarrow (f)$: il suffit de prendre $S_1 = Y_1 \times G$, $S_2 = Y_2 \times G$;
(*f*) $\rightarrow (g)$: c'est immédiat;
(*g*) $\rightarrow (h)$: il suffit de faire $Y_1 = Y$ et $Y_2 = Y'$;
(*h*) $\rightarrow (i)$: En effet, d'après (*h*), $\overset{-1}{R}(Y') \subset \overset{-1}{R}(Y)'$. De plus $\overset{-1}{R}(Y') \subset \overset{-1}{R}(F)$.

Donc $\overset{-1}{R}(Y') \subset \overset{-1}{R}(F) \cap \left(\overset{-1}{R}(Y)\right)'$.

Par ailleurs $F = Y \cup Y'$ donne $\overset{-1}{R}(F) = \overset{-1}{R}(Y) \cup \overset{-1}{R}(Y')$. D'où

$$\overset{-1}{R}(F) \cap \left(\overset{-1}{R}(Y)\right)' = \overset{-1}{R}(Y') \cap \left(\overset{-1}{R}(Y)\right)' \subset \overset{-1}{R}(Y');$$

$(i) \to$ R quasi fonctionnelle, car $\overset{-1}{R}(Y') = \overset{-1}{R}(F) \cap \left(\overset{-1}{R}(Y)\right)' \subset \left(\overset{-1}{R}(Y)\right)'$.

Donc $\overset{-1}{R}(Y) \cap \overset{-1}{R}(Y') = \emptyset$ ou $Y' \cap R\overset{-1}{R}(Y) = \emptyset$ ou $R\overset{-1}{R}(Y) \subset Y$,

quel que soit $Y \subset F$. Donc $R\overset{-1}{R} \subset \Delta_F$.

Des deux propositions procédentes on déduit les deux propositions :

Proposition 6. — L'énoncé « R est une relation fonctionnelle » est équivalent à l'un quelconque des quatre énoncés suivants :

— Quel que soit $x \in E$, $R(x)$ est réduit à un élément;
— quel que soit $S \subset F \times G$, G étant un ensemble donné, on a $(SR)' = S'R$;
— $R' = \Delta'_F R$;
— quelle que soit la partie Y de F, on a $\left(\overset{-1}{R}(Y)\right)' = \overset{-1}{R}(Y')$.

Proposition 7. — L'énoncé « R est une relation fonctionnelle biunivoque de E sur F » est équivalent à l'un quelconque des trois énoncés suivants :

— quel que soit $S \subset F \times G$, $P \subset D \times E$, D et G étant deux ensembles donnés, on a $(SR)' = S'R$, $(RP)' = RP'$;
— $R' = \Delta'_F R = R\Delta'_E$;
— quelles que soient les parties X de E et Y de F, on a $(R(X))' = R(X')$, $\left(\overset{-1}{R}(Y)\right)' = \overset{-1}{R}(Y')$.

Désignons par $\mathfrak{r}$ le symbole de la *description*, c'est-à-dire le symbole qui explicite l'élément d'un ensemble réduit à un élément. Autrement dit, quel que soit $x \in E$, on a $\mathfrak{r}\{x\} = x$.

Si R est une relation quasi fonctionnelle, la relation $y \in R(x)$ équivaut d'après (a) du théorème précédent à $y = \mathfrak{r}R(x)$. Si nous posons $\mathfrak{r}R(x) = r(x)$, nous dirons que r est la *quasi-application* associée à la relation quasi fonctionnelle R. On dira que $pr_1 R$ est le *domaine de définition* de r et si X est un sous-ensemble de E, on conviendra de donner un sens à l'écriture $r(X)$ en posant par définition $r(X) = R(X)$. On définit de même l'*application* associée à une relation fonctionnelle.

On montre facilement que le composé de deux relations quasi fonctionnelles (resp. fonctionnelles) est une relation quasi fonctionnelle (resp. fonctionnelle) et que, étant donné $R \subset E \times F$ et $S \subset F \times E$:

Si R quasi fonctionnelle et si $SR = \Delta_E$, alors $RS = \Delta_F$ et $R = \overset{-1}{S}$ est fonctionnelle biunivoque de E sur F.

Si R et S sont partout définies et si $RS \subset \Delta_F$ et $SR \subset \Delta_E$, alors $R = \overset{-1}{S}$ est fonctionnelle biunivoque de E sur F.

Il est immédiat que pour qu'une matrice représente une relation quasi fonctionnelle, il faut et il suffit qu'il y ait au plus un élément 1 dans chaque colonne; pour qu'elle représente une relation fonctionnelle, il faut et il suffit qu'il y ait un et un seul élément 1 dans chaque colonne; pour qu'elle représente une permutation, il faut et il suffit qu'il y ait un et un seul élément 1 dans chaque ligne et chaque colonne.

7. **Relations difonctionnelles.** — Nous allons donner ici quelques notions sur une généralisation des relations quasi fonctionnelles que nous appellerons relations difonctionnelles.

Soient E et F deux ensembles quelconques et R une relation binaire entre les éléments de E et de F.

Nous appellerons *noyau* de cette relation la relation d'équivalence sur E

$$\text{noy.}\,(R) = \left(\overset{-1}{R}{}'R\right)' \cap \left(\overset{-1}{R}R'\right)'.$$

Le fait que noy. (R) est une relation d'équivalence résulte de

$$R(x_1) = R(x_2) \rightleftharpoons \text{noy.}\,(R) \lessgtr x_1, x_2 \lessgtr.$$

En effet

$$R(x_1) = R(x_2) \rightleftharpoons R(x_1) \subset R(x_2) \quad \text{et} \quad R(x_2) \subset R(x_1),$$

or

$$R(x_1) \subset R(x_2) \rightleftharpoons R(x_1) \cap R'(x_2) = \emptyset \rightleftharpoons x_1 \notin \overset{-1}{R}R'(x_2).$$

De même

$$R(x_1) \supset R(x_2) \rightleftharpoons x_2 \notin \overset{-1}{R}R'(x_1) \rightleftharpoons x_1 \notin \overset{-1}{R}{}'R(x_2).$$

Donc

$$R(x_1) = R(x_2) \rightleftharpoons x_1 \in \left(\left(\overset{-1}{R}R'\right)' \cap \left(\overset{-1}{R}{}'R\right)'\right)(x_2).$$

On dit que (noy. R)(x) est l'*ensemble des générateurs* de R(x).

Proposition 8.

$$\text{noy.}(R) = \text{noy.}(R'), \qquad R(\text{noy.}\,R) = \left(\text{noy.}\,\overset{-1}{R}\right)R = R, \qquad R'(\text{noy.}\,R) = \left(\text{noy.}\,\overset{-1}{R}\right)R' = R'.$$

En effet, la première égalité résulte de la définition, la seconde de ce que

$$(\text{noy.}\,R) \supset \Delta \rightarrow R(\text{noy.}\,R) \supset R$$

et que

$$\overset{-1}{R}{}'R \cap (\text{noy.}\,R) = \emptyset \rightleftharpoons R(\text{noy.}\,R) \cap R' = \emptyset \rightarrow R(\text{noy.}\,R) \subset R,$$

on change ensuite R en $\overset{-1}{R}$; la troisième s'obtient en substituant R′ à R et en appliquant la premire égalité.

Corollaire. — *Quels que soient* $x \in E$, $y \in F$

$$R(x) = R((\text{noy.}\,R)(x)) = R[(\text{noy.}\,R)(x)],$$
$$\overset{-1}{R}(y) = \overset{-1}{R}((\text{noy.}\,\overset{-1}{R})(y)) = \overset{-1}{R}\left[(\text{noy.}\,\overset{-1}{R})(y)\right].$$

Définition. — Nous dirons que la relation $R \subset E \times F$ est *difonctionnelle* lorsque $R\overset{-1}{R}R \subset R$ ou ce qui est équivalent [d'après (39)], lorsque $R\overset{-1}{R}R = R$.

Pour que R soit difonctionnelle, il faut et il suffit que $\overset{-1}{R}$ le soit. On démontre sans difficulté la

Proposition 9. — **Les huit conditions**

$$R'R \subset (\overset{-1}{R}R)', \qquad R'R \subset (R\overset{-1}{R});$$

$$\text{noy.}\, R \supset \overset{-1}{R}R, \qquad \text{noy.}\, \overset{-1}{R} \supset R\overset{-1}{R};$$

$$\overset{-1}{R}(\text{noy.}\, \overset{-1}{R})' \subset R', \qquad R(\text{noy.}\, R)' \subset R';$$

quels que soient $x_1 \in E$, $x_2 \in E$: quels que soient $y_1 \in F$, $y_2 \in F$:

$$R(x_1) \cap R(x_2) \neq \emptyset \rightarrow R(x_1) = R(x_2), \qquad \overset{-1}{R}(y) \cap \overset{-1}{R}(y_2) \neq \emptyset \rightarrow \overset{-1}{R}(y_1) = \overset{-1}{R}(y_2)$$

sont chacune nécessaires et suffisantes pour que R soit difonctionnelle.

Étant donné une relation $R \subset E \times F$, nous dirons qu'un rectangle $K_0 \subset R$ est *maximal* (dans R) lorsque K étant un rectangle tel que $K_0 \subset K \subset R$, on a $K_0 = K$.

Proposition 10. — Si R est une relation difonctionnelle, si R_1, R_2 sont des rectangles maximaux de R tels que $R_1 \neq R_2$, alors

$$pr_1 R_1 \cap pr_1 R_2 = \emptyset, \qquad pr_2 R_1 \cap pr_2 R_2 = \emptyset \qquad (\text{d'où en particulier } R_1 \cap R_2 = \emptyset).$$

La proposition est évidente si R_1 ou R_2 sont vides. Supposons donc $R_1 \neq \emptyset$, $R_2 \neq \emptyset$. On a $R_1 = A_1 \times B_1$, $R_2 = A_2 \times B_2$, A_1, A_2 étant des sous-ensembles de E non vides, B_1, B_2 des sous-ensembles de F non vides.

Montrons que l'hypothèse $pr_2 R \cap pr_2 R_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, est absurde. $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ entraîne

$$\overset{-1}{R_2} R_1 = (B_2 \times A_2)(A_1 \times B_1) = A_1 \times A_2.$$

D'où, puisque $A_2 \neq \emptyset$,

$$R_2 \overset{-1}{R_2} R_1 = (A_2 \times B_2)(A_1 \times A_2) = A_1 \times B_2$$

et puisque $A_1 \neq \emptyset$,

$$R_1 \overset{-1}{R_1} R_2 = (A_1 \times B_1)(A_2 \times A_1) = A_2 \times B_1.$$

Or $R_1 \subset R$, $R_2 \subset R$ entraîne $R_1 \cup R_2 \cup R_2 \overset{-1}{R_2} R_1 \cup R_1 \overset{-1}{R_1} R_2 \subset R \cup R\overset{-1}{R}R \subset R$, puisque R est difonctionnelle. Donc $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \subset R$. Donc le rectangle

$$K = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

est inclus dans R. On a $K \neq R_1$, car $K = R_1$ implique $A_1 \cup A_2 = A_1$, $B_1 \cup B_2 = B_1$, c'est-à-dire $A_2 \subset A_1$ et $B_2 \subset B_1$, c'est-à-dire $R_2 \subset R_1$, ce qui est absurde, puisque $R_2 \neq R_1$ et que R_2 est maximal. On a donc $R_1 \subset K \subset R$ et $K \neq R_1$. Donc R_1 n'est pas maximal, contre l'hypothèse. On a donc $pr_2 R_1 \cap pr_2 R_2 = \emptyset$. On montre de la même façon que $pr_1 R_1 \cap pr_1 R_2 = \emptyset$.

Proposition 11. — Une condition nécessaire et suffisante pour que R soit relation difonctionnelle est que R soit réunion de rectangles dont les projections sont disjointes.

La condition est nécessaire :

Il suffit de montrer que R est la réunion de ses rectangles maximaux. Or, l'ensemble des rectangles maximaux de R est identique à l'ensemble des $\overset{-1}{R}(y) \times R(x)$ lorsque (x, y) parcourt R.

En effet, $(x, y) \in R \rightarrow x \in \overset{-1}{R}(y) \rightarrow (\overset{-1}{R}(y) \times R(x))(x) = R(x)$ et ceci ayant lieu pour tout $x \in pr_1 R$, on a bien $\overset{-1}{R}(y) \times R(x) \subset R$. D'autre part, $\overset{-1}{R}(y) \times R(x) \subset A \times B \subset R$ entraîne en prenant la coupe par x : $R(x) \subset (A \times B)(x) \subset R(x)$ et comme $R(x) \neq \emptyset$, $R(x) = B$. En prenant la relation symétrique et la coupe par y on a de même $\overset{-1}{R}(y) = A$.

D'autre part, $R \subset pr_1 R \times pr_2 R = \bigcup_{(x,y)\in R} \overset{-1}{R}(y) \times R(x)$.

La condition est suffisante :

car si $R = \bigcup_{i\in I} R_i$, R_i étant un rectangle et $i \neq j \rightarrow pr_1 R_i \cap pr_1 R_j = \emptyset$ et $pr_2 R_i \cap pr_2 R_j = \emptyset$, on a

$$R\overset{-1}{R}R = \bigcup_{i,j,k\in I} R_i \overset{-1}{R_j} R_k = R,$$

car

$$R_i \overset{-1}{R_j} R_k = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \text{ ou } i \neq k \text{ ou } j \neq k, \\ R_i & \text{si } i = j = k. \end{cases}$$

En particulier, tout rectangle est une relation difonctionnelle.

Il est facile de vérifier que l'intersection d'une famille quelconque de relations difonctionnelles sur les ensembles E et F est une relation difonctionnelle et que si R_1 et R_2 sont deux relations difonctionnelles, telles que $R_1 R_2 = R_2 R_1$ et $R_1 \overset{-1}{R_2} = \overset{-1}{R_2} R_1$, $R_1 R_2$ et $R_1 \overset{-1}{R_2}$ sont des relations difonctionnelles.

Toute relation quasi fonctionnelle ou toute relation inverse d'une relation quasi fonctionnelle est difonctionnelle.

On constatera facilement que pour qu'une matrice représente une relation difonctionnelle, il faut et il suffit que si dans le rectangle constitué par deux lignes et deux colonnes quelconques de la matrice trois des sommets sont occupés par des 1, alors le 4^e sommet est aussi occupé par un 1.

Par exemple la matrice $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ représente une relation difonctionnelle.

***8. Relations de quasi-équivalence et d'équivalence.** — Rappelons (*Cf.* § 3) que l'on appelle relation de quasi-équivalence, une relation qui est identique à sa fermeture de quasi-équivalence, ou ce qui revient au même, une relation symétrique et transitive et qu'on appelle relation d'équivalence une relation de quasi-équivalence, réflexive, ou, ce qui revient au même, une relation réflexive, symétrique et transitive, ou, ce qui revient au même, une relation de quasi-équivalence partout définie.

Proposition 12. — Soit $R \subset E \times E$.

R est une relation de quasi-équivalence $\rightleftarrows$ R est quasi-réflexive et difonctionnelle.

R est une relation d'équivalence $\rightleftarrows$ R est réflexive et difonctionnelle.

Démontrons la première partie, la démonstration de la seconde se fait de manière analogue.

$\rightarrow$ résulte de ce que la transitivité et la symétrie impliquent $R\overset{-1}{R}R \subset R$.

$\leftarrow$ car $R \supset \Delta_{E_R} \rightarrow \overset{-1}{R} \supset \Delta_{E_R} \rightarrow R\overset{-1}{R}R \supset R\,\Delta_{E_R} R = RR$. Or R étant difonctionnelle $R\overset{-1}{R}R \subset R$.

On a donc $RR \subset R$. R est donc transitive. R est symétrique, car $\Delta_{E_R} \subset R$ implique $\overset{-1}{R} = \Delta_{E_R}\overset{-1}{R}\Delta_{E_R} \subset R\overset{-1}{R}R \subset R$. Donc $R \subset \overset{-1}{R}$. Donc $R = \overset{-1}{R}$.

Lorsque $R \subset E \times E$ est une relation d'équivalence, on désigne l'ensemble des coupes par $\frac{E}{R}$ et l'on dit que cet ensemble est *l'ensemble quotient* de E par R [Ens. R, § 5, n° 2].

On démontre sans peine le

THÉORÈME. — *Soient* E, F *deux ensembles. Si* $R \subset E \times F$ *est une relation difonctionnelle*, $R\overset{-1}{R}$ *est une relation d'équivalence sur* $\overset{-1}{R}(F)$, $R\overset{-1}{R}$ *est une relation d'équivalence sur* $R(E)$ *et la relation qui à* $\overset{-1}{R}(y)$ *fait correspondre* $R\overset{-1}{R}(y)$ *et à* $R(x)$ *fait correspondre* $\overset{-1}{R}R(x)$ *est une application biunivoque* (*dite* canonique) *entre* $\frac{\overset{-1}{R}(F)}{\overset{-1}{R}R}$ *et* $\frac{R(E)}{R\overset{-1}{R}}$.

COROLLAIRE. — R *est une relation d'équivalence* $\rightleftarrows$ $R = \text{noy.}(R)$.

$\leftarrow$ est évident;

$\rightarrow$ car d'après la proposition précédente R étant difonctionnelle $\overset{-1}{R}R \subset \text{noy.}(R)$. R étant partout définie $\overset{-1}{R}R \supset \left(\overset{-1}{R'}R\right)'$, donc $\overset{-1}{R}R \supset \left(\overset{-1}{R}R'\right)'$, donc $\overset{-1}{R}R \supset R\left(\overset{-1}{R'}R\right)' \cap \left(\overset{-1}{R}R'\right)' = \text{noy.}(R)$. Donc $\overset{-1}{R}R = \text{noy.}(R)$. Mais si R est une relation d'équivalence $\overset{-1}{R}R = R$. Donc $R = \text{noy.}(R)$.

Les propositions précédentes ont montré le rapport entre relations de quasi-équivalence et relations difonctionnelles. Les propositions ci-dessous montrent le rapport entre les relations de quasi-équivalence et les relations rectangles symétriques, c'est-à-dire les relations carrées.

Étant donné une relation $R \subset E \times E$ nous dirons qu'un carré $K_0 \subset R$ est *maximal* (dans R) lorsque K étant un carré tel que $K_0 \subset K \subset R$, on a $K = K_0$.

Proposition 13. — Si S est une relation de quasi-équivalence et si R_1, R_2 sont des carrés maximaux de R tels que $R_1 \neq R_2$, on a $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

En effet, si $R_1 = A_1 \times A_1$ et $R_2 = A_2 \times A_2$ et si $R_1 \subset R$ et $R_2 \subset R$, on a $R_1R_2 \subset R$, $R_2R_1 \subset R$. Supposons $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ c'est-à-dire $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Alors $R_1R_2 = A_1 \times A_2$, $R_2R_1 = A_2 \times A_1$. Posons

$$K = (A_1 \cup A_2) \times (A_1 \cup A_2) = (A_1 \times A_1) \cup (A_1 \times A_2) \cup (A_2 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2).$$

On a donc $K \subset R$. On a $K \neq R_1$ car $K = R_1$ implique $A_1 \subset A_2 = A_1$ c'est-à-dire $A_2 \subset A_1$ c'est-à-dire $R_2 \subset R_1$ ce qui est absurde puisque $R_2 \neq R_1$ et que R_2 est maximal. On a donc $R_1 \subset K \subset R$ et $K \neq R_1$. Donc R_1 n'est pas maximal, contre l'hypothèse. On a donc $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Proposition 14. — R relation de quasi-équivalence $\rightleftarrows$ R est réunion de carrés disjoints.

$\rightarrow$ Il suffit de montrer que R est la réunion de ses carrés maximaux. Or, l'ensemble des

carrés maximaux de R est identique à l'ensemble des $R(x) \times R(x)$ lorsque x parcourt $pr_1 R$. En effet $R(x) \times R(x) \subset A \times A \subset R$ entraîne en prenant la coupe de x

$$(R(x) \times R(x))(x) \subset (A \times A)(x) \subset R(x),$$

c'est-à-dire $R(x) \subset A \subset R(x)$ c'est à dire $R(x) = A$. D'autre part

$$R \subset pr_1 R \times pr_2 R = \bigcup_{(x,y)\in R} R(x) \times R(y) = \bigcup_{\substack{x \in pr_1 R \\ R(y) = R(x)}} R(x) \times R(y) = \bigcup_{x \in pr_1 R} R(x) \times R(x).$$

D'où la proposition.

$\leftarrow$ Si $R = \bigcup_{i \in I} R_i$, R_i étant un carré et $i \neq j \rightarrow R_i \cap R_j = \emptyset$, on vérifie immédiatement que $R = RR \supset \Delta_{E_R}$

La proposition précédente montre en particulier que tout carré est une relation de quasi-équivalence. Il est facile de vérifier que l'intersection d'une famille quelconque de relations de quasi-équivalence (resp. d'équivalence) est une relation de quasi-équivalence (resp. d'équivalence) et que le composé de deux relations de quasi-équivalence permutables (resp. d'équivalences permutables) est une relation de quasi-équivalence (resp. d'équivalence).

Un exemple de relation de quasi-équivalence est donné par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \quad \begin{matrix}\text{réunion des carrés} \\ \text{représentés par}\end{matrix} \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \quad \text{et} \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

9. **Relations connexes.** — Nous dirons qu'une relation $R \subset E \times E$ est *connexe* lorsque $\overline{R}^k = \overline{R}^c$ ou ce qui est équivalent lorsque $\overline{R}^c \subset \overline{R}^k$.

On montre facilement que si $R \subset E \times E$

$$R \text{ connexe} \rightleftharpoons \overset{-1}{R} \text{ connexe} \rightleftharpoons \overline{R \cup \overset{-1}{R}} \text{ connexe} \rightleftharpoons \overline{R}^k \text{ est un carré.}$$

Proposition 15. — Si $(R_i)_{i\in I}$ est une famille de relations connexes sur un même ensemble E dont les fermetures carrées sont deux à deux non disjointes, $\bigcup_{i\in I} R_i$ est une relation connexe

En effet puisque $\overline{R}_i^c \cap \overline{R}_j^c \neq \emptyset$, on a

$$pr_1 (R_i \cup \overset{-1}{R_i}) \times pr_1 (R_j \cup \overset{-1}{R_j}) = \overline{R}_j^c \, \overline{R}_i^c .$$

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{i\in I} R_i}^c &= pr_1 \Big(\bigcup_{i\in I} (R_i \cup \overset{-1}{R_i}) \Big) \times pr_1 \Big(\bigcup_{i\in I} (R_i \cup \overset{-1}{R_i}) \Big) \\ &= \Big(\bigcup_{i\in I} pr_1 (R_i \cup \overset{-1}{R_i}) \Big) \Big(\bigcup_{i\in I} pr_1 (R_i \cup \overset{-1}{R_i}) \Big) \\ &= \bigcup_{i,j\in I} pr_1 (R_i \cup \overset{-1}{R_i}) \times pr_1 (R_j \cup \overset{-1}{R_j}) = \bigcup_{i,j\in I} \overline{R}_j^c \, \overline{R}_i^c . \end{aligned}$$

Par hypothèse $\overline{R_i}^c \subset \overline{R_i}^k$. Donc

$$\overline{\bigcup_{i\in I} R_i}^c \subset \bigcup_{i,j\in I} \overline{R_j}^k\, \overline{R_i}^k \subset \overline{\bigcup_{i\in I} R_i}^k ,$$

ce qui démontre la proposition.

Étant donné une relation $R \subset E \times E$ nous dirons qu'une relation connexe $K_0 \subset R$ est *maximale* (dans R) lorsque K étant une relation connexe telle que $K_0 \subset K \subset R$ ceci implique $K = K_0$.

Corollaire. — *Si* R *est une relation quelconque et si* R_1, R_2 *sont des relations connexes maximales de* R *telles que* $R_1 \neq R_2$, *leurs fermetures carrées sont disjointes.*

En effet si $\overline{R_1}^c \cap \overline{R_2}^c \neq \emptyset$ d'après la proposition précédente $R_1 \cup R_2 \subset R$ est une relation connexe de R. Mais R_1 étant maximale $R_1 = R_1 \cup R_2$ et R_2 étant maximale $R_2 = R_1 \cup R_2$. Donc $R_1 = R_2$ contre l'hypothèse.

Remarque. — R_1 et R_2 étant des relations quelconques

$$\overline{R_1}^c \cap \overline{R_2}^c = \emptyset \quad \rightleftarrows \quad R_1 R_2 = R_2 R_1 = R_1 \overset{-1}{R_2} = \overset{-1}{R_2} R_1 = \emptyset$$
$$\rightleftarrows \quad pr_1 R_1 \cap pr_1 R_2 = pr_2 R_1 \cap pr_1 R_2 = pr_1 R_1 \cap pr_2 R_2 = pr_2 R_1 \cap pr_2 R_2 = \emptyset.$$

En effet, d'après (36) le composé de deux carrés disjoints est toujours nul. On a alors

$$\overline{R_1}^c \cap \overline{R_2}^c = \emptyset \to \overline{R_1}^c\, \overline{R_2}^c = \emptyset \to (R_1 \cup \overset{-1}{R_1})(R_2 \cup \overset{-1}{R_2}) = \emptyset \to pr_1(R_1 \cup \overset{-1}{R_1}) \cap pr_1(R_2 \cup \overset{-1}{R_2}) = \emptyset \to \overline{R_1}^c \cap \overline{R_2}^c = \emptyset.$$

Proposition 16. — Si R est une relation quelconque, R est réunion de l'ensemble des relations connexes maximales (disjointes) de R.

En effet soit $(x, y) \in R$. (x, y) est d'après la proposition précédente contenu dans une relation connexe maximale de R, a savoir la réunion de toutes les relations connexes de R contenant (x, y).

Proposition 17. — Si R relation quelconque et si R_i désigne une relation connexe maximale dans R, $\overline{R_i}^k = \overline{R_i}^c$ est un carré maximal dans la quasi-équivalence $\overline{R}^k$ et $R_i = R \cap \overline{R_i}^c$.

En effet soit $R = \bigcup_{i\in I} R_i$ la représentation de R comme réunion de ses relations connexes maximales. On a $\overline{R}^k = \bigcup_{i\in I} \overline{R_i}^k$.

En effet

$$\overline{R}^k = \overline{\bigcup_{i\in I} R_i}^k = \overline{\bigcup_{i\in I} (R_i \cup \overset{-1}{R_i})} = \bigcup_{i\in I} \overline{R_i \cup \overset{-1}{R_i}} = \bigcup_{i\in I} \overline{R_i}^k .$$

car $R_i R_j = R_i \overset{-1}{R_j} = \emptyset$ quels que soient $i, j \in I$, $i \neq j$.

Or on a vu au paragraphe 8 que la quasi-équivalence $\overline{R}^k$ se décompose d'une manière évidemment unique en la réunion de ses carrés maximaux. Donc $\overline{R_i}^c = \overline{R_i}^k$ est un carré maximal dans la quasi-équivalence $\overline{R}^k$.

D'autre part

$$R = R \cap \overline{R}^{k} = R \cap \bigcup_{i \in I} \overline{R}_i^{c} = \bigcup_{i \in I} \left(R \cap \overline{R}_i^{c}\right).$$

Or la décomposition de R en la réunion de ses relations connexes maximales donnée dans **la proposition précédente est évidemment** unique. De plus $R_i \subset R \cap \overline{R}_i^{c}$. Donc $R_i = R \cap \overline{R}_i^{c}$.

Nous laisserons au lecteur le soin de montrer, ce qui se fait sans aucune difficulté d'après les résultats précédents que :

pour que R soit connexe il faut et il suffit qu'il n'existe pas $R_1 \neq \emptyset$ et $R_2 \neq \emptyset$ tels que

$$R = R_1 \cup R_2, \qquad R_1 R_2 = R_2 R_1 = \emptyset, \qquad R_1 \overset{-1}{R}_2 = \overset{-1}{R}_2 R_1 = \emptyset;$$

pour que R soit connexe il faut et il suffit qu'il n'existe pas $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $B_1 \neq \emptyset$, $B_2 \neq \emptyset$ tels que

$$\begin{array}{ll} pr_1 R = A_1 \cup A_2, & A_1 \cap A_2 = \emptyset, \\ pr_2 R = B_1 \cup B_2, & B_1 \cap B_2 = \emptyset, \end{array} \qquad R \subset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2);$$

que si $R \subset E \times E$ est un rectangle, R est connexe, qu'un carré maximal est toujours une relation connexe maximale, alors qu'un rectangle maximal n'est pas nécessairement une relation connexe maximale.

Exemple. — Considérons les trois matrices

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad M_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad M_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Considérons la relation R donnée par la matrice M_1. On trouve que

$$\overline{R}^{c} = \left(R \cup \overset{-1}{R}\right) \cup \left(R \cup \overset{-1}{R}\right)^2$$

est représenté par la matrice donnée au paragraphe 8 comme exemple de relation de quasi-équivalence. R est réunion des relations connexes maximales représentées par les matrices M_2 et M_3.

10. Relations cycliques et acycliques, cycles. — Soit $R \subset E \times E$ une relation binaire.

Nous dirons que R est une *relation cyclique* lorsque $\overline{\overline{R}}$ est un carré.

Nous dirons que R est une *relation acyclique* lorsque $\overline{R}$ est une relation stricte (c'est-à-dire $\overline{R} \subset \Delta'$).

Nous dirons que R est un *cycle* lorsque R est une relation quasi fonctionnelle cyclique.

Nous dirons que R est une *permutation circulaire* lorsque R est une permutation de E et aussi un cycle.

Toute relation cyclique est connexe.

Pour que R soit une relation cyclique, resp. une acyclique, resp. un cycle, resp. une permutation circulaire, il faut et il suffit que $\overset{-1}{R}$ le soit. Il est facile de montrer que

R est cyclique	$\rightleftharpoons$	$\overset{-1}{R} \subset \overline{R}$ et $R\left(\overset{-1}{\overline{R}}\right)' R = \emptyset \rightleftharpoons \overline{R}^{c} = \overline{R}$,
R est une permutation circulaire	$\rightleftharpoons$	R est un cycle partout défini,
	$\rightleftharpoons$	R est un cycle et $\overline{R} \supset \Delta$,
	$\rightleftharpoons$	R est quasi fonctionnelle et $\overline{R} = E \times E$.
R est connexe	$\rightleftharpoons$	$R \cup \overset{-1}{R}$ est cyclique.

Proposition 18.

$$\text{R acyclique} \rightleftharpoons \overline{R} \text{ ne contient pas de carré} \neq \emptyset, \qquad (a)$$

$$\rightleftharpoons \text{R ne contient pas de cycle} \neq \emptyset. \qquad (b)$$

En effet :

R non acyclique $\rightarrow$ non (b), car

$$\text{R non acyclique} \rightleftharpoons \overline{R} \cap \Delta \neq \emptyset \rightleftharpoons \exists x \; x \in \overline{R}(x),$$

donc il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$(x, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \ldots, (x_n, x) \in R,$$

c'est-à-dire

$$K = \{(x, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x)\} \subset R.$$

Or K est une relation cyclique $\neq \emptyset$.

Non $(b) \rightarrow$ non (a) car soit $K \subset R$, $K \neq \emptyset$ un cycle. On a $\overline{K} \subset \overline{R}$. Or $\overline{K}$ est un carré.

Non $(a) \rightarrow$ R non acyclique. $\overline{R}$ contenant un carré, il existe $A \neq \emptyset$, $A \times A \subset \overline{R}$. Donc $\Delta \cap \overline{R} \neq \emptyset$ c'est-à-dire $\overline{R} \not\subset \Delta'$.

Nous dirons qu'une relation cyclique $K_0 \subset R$ est *minimale* lorsque K étant une relation cyclique telle que $K \subset K_0$ ceci implique $K = K_0$ ou $K = \emptyset$.

Proposition 19. — R est un cycle $\rightleftharpoons$ R est une relation cyclique minimale.

$\leftarrow$ En effet, supposons que R soit une relation cyclique minimale et que R ne soit pas quasi fonctionnelle. Alors il existe x, x_1, y tels que $x_1 \in R(x)$, $y \in R(x)$ avec $y \neq x_1$. Soit n_x la *période* de x, c'est-à-dire le nombre entier, minimum des n tels que $x \in R^n(x)$. Alors $x \in R^{n_x}(x)$. Donc $x \in R^{n_x - 1}(x_1)$. Donc il existe $x_2, \ldots, x_n$ tels que

$$K = \{(x, x_1), (x_1, x_2), \ldots; (x_{n-1} x_n), (x_n, x)\} \subset R.$$

Or K est un cycle $\neq$ R. En effet on a $(x, y) \in R$ mais $(x, y) \notin K$ car sinon on aurait soit $y = x_1$ contre l'hypothèse faite, soit $y = x_i$ pour $i = 2, 3, \ldots,$ ou n_x et alors n_x ne serait pas la période de x, soit $y = x_{n_x}$ contre cette même hypothèse.

$\rightarrow$ Supposons que R soit un cycle et qu'il existe un cycle $K \neq \emptyset$, $K \subset R$, $K \neq R$. Puisque $K \subset R$ et $K \neq R$ il existe x tel que $K(x) \neq R(x)$, $K(x) \subset R(x)$. Or K étant un cycle $K(x) = \{x\}$. Donc $\{x\} \neq R(x)$, $\{x\} \subset R(x)$. Donc R n'est pas quasi fonctionnelle.

Exemples. — Considérons les matrices

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad M_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

La relation R représentée par la matrice M_1 est cyclique car $\overline{R} = R \cup R^2 \cup R^3$ est une relation carrée représentée par la matrice M_2. La relation S représentée par la matrice M_3 est un cycle, $\overline{S}$ est représenté par la même matrice que $\overline{R}$. Enfin la matrice M_4 représente une permutation circulaire.

11. Relations de préordre, d'ordre, etc. — Rappelons qu'au paragraphe 3 une relation $R \subset E \times E$ a été dite relation de *préordre* lorsqu'elle coïncidait avec sa fermeture préordinale, autrement dit lorsque R était réflexive et transitive.

Une relation R sera dite *relation d'ordre* (sous entendu *large* ou *réflexif*) si c'est une relation de *préordre* telle que $R \cap \overset{-1}{R} = \Delta$.

Une relation R sera dite *relation d'ordre strict* (ou encore relation d'ordre anti-réflexif) si R est une relation transitive et une relation stricte.

Une relation R sera dite une *chaîne* sous entendu *stricte*, lorsqu'elle est une relation d'ordre strict satisfaisant à

$$R \cup \overset{-1}{R} \cup \Delta_{E_R} = \overline{R}^c.$$

Une relation R sera dite *relation d'ordre strict total*, respectivement *relation d'ordre total* lorsque R est une chaîne et que $\overline{R}^c = E \times E$, respectivement lorsque $R \cap \Delta'$ est une relation d'ordre strict total.

Une relation R sera dite *anti-transitive* lorsque $\overline{RR} \subset R'$.

Une relation R sera dite *relation de couverture* ou *relation de consécutivité* lorsque R est acyclique et anti-transitive.

Une relation R sera dite *relation d'enchaînement* lorsque R est une relation de consécutivité telle que $\overline{R}$ est une chaîne.

Il est facile de démontrer les propositions suivantes

R relation de préordre	$\rightleftharpoons \overset{-1}{R}{}'R = \overset{-1}{R}{}' \rightleftharpoons R\overset{-1}{R}{}' = \overset{-1}{R}{}'$,
R relation anti-transitive	$\rightleftharpoons \overline{R} \subset (\overset{-1}{R}R)' \rightleftharpoons \overline{R} \subset (R\overset{-1}{R})'$,
»	$\rightleftharpoons R = \overline{R} \cap (\overline{R}\,\overline{R})'$,
R relation d'ordre strict	$\rightleftharpoons$ R acyclique et transitive,
»	$\rightleftharpoons$ R relation transitive et $R \cap \overset{-1}{R} = \emptyset$.
R relation d'ordre total	$\rightleftharpoons$ R relation d'ordre et $R \cup \overset{-1}{R} = E \times E$,
»	$\rightleftharpoons$ R relation transitive et $R = \overset{-1}{R}{}' \cup \Delta$,

R relation d'ordre strict total $\rightleftarrows$ R relation d'ordre strict et $R \cup \overset{-1}{R} \cup \Delta = E \times E$ (¹),

» $\rightleftarrows$ R relation transitive et $R' = \overset{-1}{R} \cup \Delta$,

» $\rightleftarrows$ R relation transitive et $R \cup \overset{-1}{R} = \Delta'$,

R est une chaîne $\rightleftarrows$ $R\overset{-1}{R} \cup \overset{-1}{R}R \subset R \cup \overset{-1}{R} \cup \Delta_{E_R}$ et R est connexe.

R est une relation d'enchaînement $\rightleftarrows$ R est une relation de consécutivité

et $\overset{c}{\overline{R}} = \Delta_{E_R} \cup \overline{R} \cup \overline{\overset{-1}{R}}$.

Si R est une relation de préordre, resp. d'ordre, resp. d'ordre strict, il en est de même de $\overset{-1}{R}$ que l'on appelle alors préordre dual, resp. ordre dual, resp. ordre strict dual de R.

Si R est une relation d'ordre, l'ouverture stricte de R est une relation d'ordre strict appelée ordre strict associé à R. L'ordre associé à l'ordre strict associé à R est identique à R.

Si R est une relation d'ordre strict, la fermeture réflexive de R est une relation d'ordre appelée ordre associé à R. L'ordre strict associé à l'ordre associé à R est identique à R.

Proposition 20. — Si R est une relation d'ordre strict, la relation $C = R \cap (R^2)'$ est une relation de consécutivité. On dira que C est la *relation de consécutivité associée à* R.

En effet :

$\overline{C} \subset \Delta'$ car $C \subset R \rightarrow \overline{C} \subset \overline{R} = R \subset \Delta'$, $C\overline{C} \subset C'$ car $C \subset (R^2)' \rightarrow R^2 \subset C'$.

Or $R^2 = R\overline{R}$. D'ou $R\overline{R} \subset C'$. Mais $C \subset R \rightarrow \overline{C} \subset \overline{R} \rightarrow C\overline{C} \subset R\overline{R} \subset C'$.

Proposition 21. — Pour que R soit une relation d'enchaînement il faut et il suffit que R soit connexe et biunivoque.

La condition est nécessaire.

En effet :

$$\overset{-1}{R}R \subset \overset{c}{\overline{R}} = \overline{R} \cup \overline{\overset{-1}{R}} \cup \Delta_{E_R}$$

Donc

$$\overset{-1}{R}R = \left(\overline{R} \cup \overline{\overset{-1}{R}} \cup \Delta_{E_R}\right) \cap \overset{-1}{R}R = \left(\overline{R} \cap \overset{-1}{R}R\right) \cup \left(\overline{\overset{-1}{R}} \cap \overset{-1}{R}R\right) \cup \left(\Delta_{E_R} \cap \overset{-1}{R}R\right).$$

Or R étant anti-transitive, $\overline{R} \cap \overset{-1}{R}R = \overline{\overset{-1}{R}} \cap \overset{-1}{R}R = \emptyset$. Donc $\overset{-1}{R}R = \Delta_{E_R} \cap \overset{-1}{R}R$ c'est-à-dire $\overset{-1}{R}R \subset \Delta$. On montre de même que $R\overset{-1}{R} \subset \Delta$.

La condition est suffisante.

Par hypothèse R étant connexe,

$$\overset{c}{\overline{R}} = \Delta_{E_R} \cup \overline{R \cup \overset{-1}{R}}.$$

(¹) Il faut supposer ici que E n'est pas réduit à un élément (ce qui permet d'écrire $pr_1 \Delta' = E$). En effet si E est réduit à un élément et si $R = \emptyset$, R est bien une relation d'ordre strict telle que $R \cup \overset{-1}{R} \cup \Delta = E \times E$ mais n'est pas une relation d'ordre strict total car $\overset{c}{\overline{R}} \neq E \times E$.

R étant quasi fonctionnelle

$$\overset{-1}{R}R \subset \Delta_{E_R}, \qquad R\overset{-1}{R} \subset \Delta_{E_R}.$$

D'où

$$\overline{\Delta_{E_R} \cup R \cup \overset{-1}{R}} = \Delta_{E_R} \cup \overline{R} \cup \overline{\overset{-1}{R}}.$$

Donc

$$\overset{-c}{R} = \Delta_{E_R} \cup \overline{R} \cup \overline{\overset{-1}{R}}.$$

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* R *soit une relation d'enchainement est que* R *soit connexe, acyclique et biunivoque.*

Il suffit de montrer que lorsqu'une relation R est quasi fonctionnelle et acyclique elle est antitransitive. Or cela résulte de ce que $R\overset{-1}{R} \subset \Delta \rightleftharpoons R\overset{-1}{R} \cap \Delta' = \emptyset \rightleftharpoons \Delta' R \subset R'$, car alors de $\overline{R} \subset \Delta'$ on déduit $R\overline{R} \subset \Delta' R \subset R'$, c'est-à-dire $\overline{R}\overline{R} \subset R'$.

Proposition 22. — La condition nécessaire et suffisante pour que R soit une relation d'ordre total est que R soit une relation d'ordre maximal, c'est-à-dire qu'il n'existe pas sur E de relation d'ordre S telle que $S \supset R$, $S \neq R$.

La condition est nécessaire.

Car supposons que R soit une relation d'ordre non total. Alors $\Delta' \cap (R \cap \overset{-1}{R})' \neq \emptyset$, c'est-à-dire il existe x, y, $x \neq y$ tels que $(x, y) \notin R \cup \overset{-1}{R}$.

Si l'on pose $S = \overline{R \cup \{(x, y)\}}$ il est immédiat que $S \supset R$, $S \neq R$ car $(x, y) \notin R$ et $(x, y) \in S$

$$(x, y) \notin R \cap \overset{-1}{R} \rightarrow \{(x, y)\} R \{(x, y)\} = \emptyset.$$

De plus la réflexivité de R entraîne

$$\{(x, y)\} R \subset R \{(x, y)\} R \qquad \text{et} \qquad R\{(x, y)\} \subset R\{(x, y)\} R.$$

Donc

$$S = R \cup R\{(x, y)\} R.$$

Alors

$$S \cap \overset{-1}{S} = R \cap \overset{-1}{R} \cup \left(R\{(x, y)\} R \cap \overset{-1}{R}\right) \cup \left(\overset{-1}{\overbrace{R\{(x, y)\} R}} \cap R\right) \cup \left(R\{(x, y)\} R \cap \overset{-1}{R}\{(y, x)\}\overset{-1}{R}\right).$$

Or

$$(x, y) \notin R \rightleftharpoons R\{(x, y)\} R \cap \overset{-1}{R} = \emptyset,$$

$$\{(x, y)\} R \{(x, y)\} = \emptyset \rightleftharpoons R\{(x, y)\} R \cap \overset{-1}{R}(x, y)\overset{-1}{R} = \emptyset.$$

Donc

$$S \cap \overset{-1}{S} = R \cap \overset{-1}{R} = \Delta.$$

La condition est suffisante.

En effet, supposons que R ne soit pas maximal. Alors il existe une relation d'ordre $S \subset R$, $S \neq R$. Donc il existe $x \neq y$ tel que $(x, y) \in S$, $(x, y) \notin R$.

De plus $(x, y) \notin \overset{-1}{R}$ car sinon on aurait $(x, y) \in S \cap \overset{-1}{R} \subset S \cap \overset{-1}{S} = \Delta$, c'est-à-dire $x = y$. Donc $(x, y) \notin R \cup \overset{-1}{R} \cup \Delta$. Donc $R \cup \overset{-1}{R} \cup \Delta \neq E \times E$. Donc R n'est pas une relation d'ordre total.

On en déduit aisément le

Corollaire. — R *relation d'ordre strict total* $\rightleftharpoons$ R *relation d'ordre strict maximal.*

Pour terminer nous donnerons la

Proposition 23. — R est une relation stricte $\rightleftharpoons$ R ne contient pas de carré $\neq \emptyset$.

$\rightarrow$ car s'il existait $A \neq \emptyset$ tel que $A \times A \subset R$ alors $\Delta \cap R \neq \emptyset$, c'est-à-dire $R \not\subset \Delta'$.
$\leftarrow$ car si R n'est pas strict $R \cap \Delta \neq \emptyset$ dont il existe x telle que $\{(x, x)\} \subset R$. Or $\{(x, x)\}$ est un carré.

Exemples. — La suite de matrices

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

donne respectivement des exemples de relations de préordre, d'ordre, d'ordre strict (associé à l'ordre précédent) de consécutivité (associé à l'ordre strict précédent) de chaîne, d'ordre total, d'ordre total strict (associé au précédent), d'enchaînement.

12. Groupe d'automorphisme d'une relation binaire. Isomorphismes de deux relations binaires. — Étant donnée une relation binaire $R \subset E \times E$ nous dirons qu'une permutation Σ de E est un *automorphisme* lorsque $\Sigma R = R \Sigma$, est un *automorphisme dual* lorsque $\Sigma R = \overset{-1}{R} \Sigma$. Il est immédiat que le composé de deux automorphismes ou de deux automorphismes duaux est un automorphisme, que le composé d'un automorphisme et d'un automorphisme dual est un automorphisme dual, que Δ est un automorphisme. On exprime ces propriétés par la dénomination suivante : L'ensemble des automorphismes d'une relation R sera noté $\mathcal{A}_R$ et sera appelé *groupe d'automorphisme* de R [1], l'ensemble des automorphismes et des automorphismes duaux d'une relation R sera noté $\mathcal{A}l_R$ et sera appelé *groupe d'automorphisme étendu* de R.

Il est facile de démontrer la

Proposition.

$$\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_{\overset{-1}{R}} = \mathcal{A}_{R'} = \mathcal{A}_{\overset{-1}{R'}}, \qquad \mathcal{A}l_R = \mathcal{A}l_{\overset{-1}{R}} = \mathcal{A}l_{R'} = \mathcal{A}l_{\overset{-1}{R'}}.$$

Lorsque R est une relation carrée $R = A \times A$ on posera $\mathcal{A}_{A \times A} = \mathcal{A}_A$ [2]. On montre facilement que $\mathcal{A}_A$ est identique à l'ensemble des permutations Σ telles que $\Sigma(A) = A$.

---

[1] Ou encore *groupe de décomposition* de R (Zerlegungsgruppe). *Voir* par exemple J. Herbrand, *Corps algébriques*, p. 20 (*Mémorial des Sc. math.*) pour le cas particulier où R est l'équivalence modulo un idéal premier dans un eorps.

[2] Lorsque A est l'ensemble représentatif d'une certaine propriété $A \mathbin{\hat{\hat{}}} x \mathbin{\hat{\hat{}}}$, on dit que $\mathcal{A}_A$ est le *groupe de causalité* de la propriété A.

A partir des formules (36), il est facile de montrer que lorsque $R \subset E \times E$ est une relation rectangle

$$\mathfrak{A}_R = \mathfrak{A}_{pr_1 R} \cap \mathfrak{A}_{pr_2 R}.$$

A titre d'exemple le groupe d'automorphisme de la relation représentée par la matrice $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ est réduit à l'automorphisme identique Δ.

Nous donnerons enfin la définition suivante qui nous sera utile ultérieurement. Étant données deux relations binaires $R_1 \subset E_1 \times E_1$, $R_2 \subset E_2 \times E_2$, E_1, E_2 étant des ensembles quelconques, nous dirons qu'une relation fonctionnelle, biunivoque Σ de E_1 sur E_2 est un *isomorphisme* de R_1 sur R_2 lorsque $\Sigma R_1 = R_2 \Sigma$ et est un *isomorphisme dual* de R_1 sur R_2 lorsque $\Sigma R_1 = \overset{-1}{R_2}\Sigma$.

II. — Relations d'ordre.

Nous allons reprendre dans ce Chapitre l'étude des relations de préordre et des relations d'ordre en nous plaçant cette fois à un point de vue plus particulier : nous allons définir deux « invariants » : sup et inf d'une relation de préordre et d'une relation d'ordre et étudier leur propriétés. Par ailleurs en imposant à ces invariants de satisfaire à certaines propriétés, on obtient des relations d'ordre particulières, dont l'importance est considérable en mathématiques, les relations d'ordre latticiel.

1. Ensembles préordonnés. — Nous dirons qu'un ensemble E est un *ensemble préordonné* si l'on s'est donné une relation de préordre $\Omega \subset E \times E$. (Chap. I, § 3).

Soit X une partie de E. Nous appellerons :

ensemble des majorants de X, le sous-ensemble $\Omega[X]$;

ensemble des minorants de X, le sous-ensemble $\overset{-1}{\Omega}[X]$;

ensemble des plus grands éléments de X [1], le sous-ensemble $\Omega[X] \cap X$, l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qui à X fait correspondre ce sous-ensemble étant notée max;

ensemble des plus petits éléments de X [2], le sous-ensemble $\overset{-1}{\Omega}[X] \cap X$, l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qui à X fait correspondre ce sous-ensemble étant notée min;

ensemble des éléments maximaux de X, le sous-ensemble $\left(\overset{-1}{\Omega'} \cup \Delta\right)[X] \cap X$;

ensemble des éléments minimaux de X, le sous-ensemble $(\Omega' \cup \Delta)[X] \cap X$;

ensemble des bornes supérieures de X, le sous-ensemble $\overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]] \cap \Omega[X]$, l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qui à X fait correspondre ce sous-ensemble étant notée sup;

---

[1] Ou encore ensemble des maximums de X.
[2] Ou encore ensemble des minimums de X.

ensemble des bornes inférieures de **X, le sous-ensemble $\Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right]\cap\overset{-1}{\Omega}[X]$, l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qui à X fait correspondre ce sous-ensemble étant notée inf.**

Proposition 1.

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \sup X &= \min\ \Omega[X] = \inf\ \Omega[X] = \sup \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]] = \max \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]],\\ \inf X &= \max \overset{-1}{\Omega}[X] = \sup \overset{-1}{\Omega}[X] = \inf\ \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right] = \min\ \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right],\end{aligned}\right.$$

quelle que soit la partie X de E.

Résulte de (I.23) [1].

Proposition 2.

$$(2) \qquad \Omega[X] = \Omega(\Omega[X]) = \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}(X)\right], \qquad \Omega(X) \subset \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right],$$

quelle que soit la partie X de E.

En effet

$$\Omega \supset \Delta \rightarrow \Omega(\Omega[X]) \supset \Omega[X],$$

$$\Omega\Omega \subset \Omega \rightleftharpoons \Omega\Omega \cap \Omega' = \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad \overset{-1}{\Omega}\Omega' \cap \Omega = \emptyset \quad \rightleftharpoons \quad \overset{-1}{\Omega}\Omega' \subset \Omega'$$

d'après (I.32). Donc

$$\overset{-1}{\Omega}\Omega'(X) \subset \Omega'(X) \qquad \text{ou} \qquad \overset{-1}{\Omega}\Omega'(X) \cap \Omega[X] = \emptyset$$

ou d'après (I.19)

$$\Omega'(X) \cap \Omega(\Omega[X]) = \emptyset \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Omega(\Omega[X]) \subset \Omega[X].$$

Donc $\Omega[X] = \Omega[\Omega(X)]$. On a vu au paragraphe 11 du chapitre I que $\Omega'\overset{-1}{\Omega} = \Omega'$ ce qui donne immédiatement $\Omega[X] = \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}(X)\right]$. Enfin

$$\Omega(X) \subset \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right] \qquad \text{car} \quad \overset{-1}{\Omega}[X] \subset \overset{-1}{\Omega}[X] = \overset{-1}{\Omega}[\Omega(X)],$$

d'où d'après (I.20), $\Omega(X) \subset \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right]$.

Corollaire.

$$(3) \qquad \sup X = \sup \overset{-1}{\Omega}(X), \qquad \inf X = \inf \Omega(X),$$

quelle que soit la partie X *de* E.

En effet, $\sup X = \min \Omega[X] = \min \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}(X)\right] = \sup \overset{-1}{\Omega}(X)$ en appliquant simultanément l'avant-dernière et la dernière proposition.

Proposition 3. — Quelles que soient les parties X_1 et X_2 de E,

$$(4) \qquad X_1 \cap \Omega[X_2] \neq \emptyset \quad \rightarrow \quad \Omega[X_1] \subset \Omega[X_2].$$

En effet, $X_1 \cap \Omega[X_2] \subset X_1$. Donc $\Omega[X_1 \cap \Omega[X_2]] \supset \Omega[X_1]$. $X_1 \cap \Omega[X_2] \neq \emptyset$.

Donc d'après (I.17). $\Omega[X_1 \cap \Omega[X_2]] \subset \Omega(X_1 \cap \Omega[X_2]) \subset \Omega(\Omega[X_2]) = \Omega(X_2)$ d'après (2).

[1] C'est-à-dire la formule (23) du chapitre I.

Proposition 4.

$$(5)\qquad \begin{cases} \max X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \Omega[X] = \Omega[\max X], \\ \min X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \overset{-1}{\Omega}[X] = \overset{-1}{\Omega}[\min X], \end{cases}$$

quelle que soit la partie X de E.

En effet

$$\max X \subset X \;\rightarrow\; \Omega[X] \subset \Omega[\max X],$$
$$\max X \subset \Omega[X] \;\rightarrow\; (\max X) \subset \Omega(\Omega[X]) = \Omega[X].$$

Donc $\Omega(\max X) \subset \Omega[\max X]$ d'où la première partie de la proposition d'après (I.17).

Proposition 5. — Quelle que soit la partie X de E,

$$(6)\qquad \begin{cases} \sup X \neq \emptyset \rightarrow \Omega[X] = \Omega[\sup X], & \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]] = \overset{-1}{\Omega}[\sup X], \\ \inf X \neq \emptyset \rightarrow \overset{-1}{\Omega}[X] = \overset{-1}{\Omega}[\inf X], & \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right] = \Omega[\inf X]. \end{cases}$$

En effet d'après (5)

$$\max \Omega[\overset{-1}{\Omega}[X]] \neq \emptyset \;\rightarrow\; \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]]\right] = \Omega\left[\max \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]]\right]$$

c'est-à-dire, d'après (I.23),

$$\Omega[X] = \Omega[\sup X].$$

On montre de même que

$$\inf X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \overset{-1}{\Omega}[X] = \overset{-1}{\Omega}[\inf X].$$

On a donc en particulier

$$\inf \Omega[X] \neq \emptyset \;\rightarrow\; \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]] = \overset{-1}{\Omega}[\inf \Omega[X]],$$

c'est-à-dire

$$\sup X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]] = \overset{-1}{\Omega}[\sup X].$$

On montre de même que

$$\inf X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[X]\right] = \Omega[\inf X].$$

Proposition 6. — Quelles que soient les parties X_1, X_2 de E,

$$(7)\qquad \begin{cases} \max X_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \max X_2 \neq \emptyset \;\rightarrow\; \max(X_1 \cup X_2) = \max((\max X_1) \cup (\max X_2)), \\ \min X_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \min X_2 \neq \emptyset \;\rightarrow\; \min(X_1 \cup X_2) = \min((\min X_1) \cup (\min X_2)). \end{cases}$$

Démontrons par exemple la première partie :

$$\begin{matrix} \max X_1 \neq \emptyset \\ \max X_2 \neq \emptyset \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \Omega[\max X_1] = \Omega[X_1] \\ \Omega[\max X_2] = \Omega[X_2] \end{matrix} \quad \text{d'après (5).}$$

Donc

$$\begin{aligned} \max((\max X_1) \cup (\max X_2)) &= \Omega[(\max X_1) \cup (\max X_2)] \cap ((\max X_1) \cup (\max X_2)) \\ &= \Omega[\max X_1] \cap \Omega[\max X_2] \cap ((\max X_1) \cup (\max X_2)) \\ &= \Omega[X_1] \cap \Omega[X_2] \cap ((\Omega[X_1] \cap X_1) \cup (\Omega[X_2] \cap X_2)) \\ &= \Omega[X_1] \cap \Omega[X_2] \cap (X_1 \cup X_2) = \Omega[X_1 \cup X_2] \cap (X_1 \cup X_2) \\ &= \max(X_1 \cup X_2). \end{aligned}$$

Proposition 7. — Quelles que soient les parties X_1, X_2 de E,

$$(8)\qquad \begin{cases} \sup X_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \sup X_2 \neq \emptyset \;\rightarrow\; \sup(X_1 \cup X_2) = \sup((\sup X_1) \cup (\sup X_2)), \\ \inf X_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \inf X_2 \neq \emptyset \;\rightarrow\; \inf(X_1 \cup X_2) = \inf((\inf X_1) \cup (\inf X_2)). \end{cases}$$

La démonstration est analogue à celle de la démonstration précédente

Corollaire. — *Quelle que soit la partie de* X de E,

$$\begin{aligned} \max X \neq \emptyset &\rightarrow \max(\max X) = \max X, \\ \min X \neq \emptyset &\rightarrow \min(\min X) = \min X, \\ \sup X \neq \emptyset &\rightarrow \sup(\sup X) = \sup X, \\ \inf X \neq \emptyset &\rightarrow \inf(\inf X) = \inf X, \end{aligned}$$

2. **Préordre induit.** — Soit $\Omega \subset E \times E$ une relation de préordre et soit A un sous-ensemble non vide de E. On appelle *préordre induit* sur A et l'on note Ω_A la relation $\Omega_A = \Omega \cap (A \times A)$. On vérifie en effet immédiatement que Ω_A est une relation d'ordre.

Dans le cas particulier où Ω est une relation d'ordre, Ω_A est une relation d'ordre appelée *ordre induit* par Ω sur A.

D'après (I.6) si $X \subset A$ on a

$$\Omega_A[X] = \Omega[X] \cap A, \qquad \Omega_A(X) \subset \Omega(X) \cap A.$$

Pour $X \subset A$ on notera $\max_A$ l'application de $\mathfrak{P}(A)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qui à X fait correspondre $\Omega_A[X] \cap X$ et l'on dira que ce sous-ensemble et l'ensemble des plus grands éléments de X relativement à A.

On définit de même d'une manière évidente $\min_A$, $\sup_A$, $\inf_A$.

Proposition 8. — A étant un sous-ensemble non vide de E et $X \subset A$ on a

$$(9) \quad \begin{cases} (\sup X) \cap A \subset \sup_A X \subset \Omega[\sup X] \cap A, \\ (\inf X) \cap A \subset \inf_A X \subset \overset{-1}{\Omega}[\inf X] \cap A. \end{cases}$$

En effet la première formule résulte de

$$\overset{-1}{\Omega}_A[\Omega_A[X]] \supset \overset{-1}{\Omega}[\Omega[X]] \cap A,$$

de

$$\overset{-1}{\Omega}_A[\Omega_A[X]] \cap \Omega_A[X] \subset \Omega[X] \cap A$$

et de

$$\sup X \neq \emptyset \rightarrow \Omega[\sup X] = \Omega[X].$$

Pour $\sup X = \emptyset$ on a bien $\sup X \subset A$. La seconde formule se démontre de la même manière.

3. **Ensembles ordonnés.**

Proposition 9. — Si Ω est une relation d'ordre sur E, max X, min X, sup X, inf X sont soit vides soit réduits à un élément.

En effet supposons que max X ne soit pas vide et qu'il existe deux éléments x_1, x_2 tels que $x_1 \in \Omega[X] \cap X$ et $x_2 \in \Omega[X] \cap X$. Alors $x_1 \in \Omega[X] \rightarrow \overset{-1}{\Omega}(x_1) \supset X$. Or $x_2 \in X$. Donc $x_2 \in \overset{-1}{\Omega}(x_1)$. De même $x_1 \in \overset{-1}{\Omega}(x_2)$. Donc $x_1 \in \left(\Omega \cap \overset{-1}{\Omega}\right)(x_2) = \Delta(x_2)$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$. On montre de même que min X est soit vide soit réduit a un élément. La seconde partie de la proposition résulte de (1).

Max, min, sup, inf sont donc des relations quasi fonctionnelles. Pour sup et inf on notera les quasi-applications correspondantes $\bigvee$ resp. $\bigwedge$. Si $\bigvee X$ (resp. $\bigwedge X$) existe on l'appelle *la borne supérieure* (resp. *la borne inférieure*) de X. Les relations quasi fonctionnelles correspondant respectivement à $\sup_A$ et $\inf_A$ seront notées $\bigvee_A$ (resp. $\bigwedge_A$).

En particulier remarquons que $\bigvee \emptyset = \bigwedge \mathrm{E}$ est, lorsqu'il existe, le plus petit élément de E et que $\bigwedge \emptyset = \bigvee \mathrm{E}$ est, lorsqu'il existe, le plus grand élément de E.

On écrit parfois $\bigvee\limits_{x \in \mathrm{X}} x$ au lieu de $\bigvee \mathrm{X}$ et de même pour $\bigwedge$.

Si $x, y \in \mathrm{E}$; nous poserons par définition $x \vee y = \bigwedge \{x, y\}$, $x \wedge y = \bigwedge \{x, y\}$.

Proposition 10. — Si Ω est une relation d'ordre :

quel que soit $x \in \mathrm{E}$, $x \vee z$, $x \vee x$ existent et $x = x \vee x = x \wedge x$; quels que soient $x, y \in \mathrm{E}$:

$$\Omega \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}} x, y \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}} \rightleftharpoons x \vee y \text{ existe et } x \vee y = y \rightleftharpoons x \wedge y \text{ existe et } x \wedge y = x,$$
$$x \vee y \text{ existe} \rightarrow \Omega \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}} x, x \vee y \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}},$$
$$x \wedge y \text{ existe} \rightarrow \Omega \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}} x \wedge y, y \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}};$$

quels que soient $x, y, z \in \mathrm{E}$:

$y \vee z$ existe et $x \vee (y \vee z)$ existe $\rightarrow \bigvee \{x, y, z\}$ existe et $x \vee (y \vee z) = \bigvee \{x, y, z\}$;
$y \vee z$ et $x \vee y$ existent $x \vee (y \vee z)$ existe (resp. $(x \vee y) \vee z$) $\rightarrow (x \vee y) \vee z$ existe (resp. $x \vee (y \vee z)$) existe et $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,

et les deux implications analogues obtenues en remplaçant $\vee$ par $\wedge$.

La démonstration se fait sans difficulté.

Proposition 11. — X, Y étant des sous-ensembles de E

$$(10) \quad \begin{cases} \bigvee \mathrm{X},\ \bigvee \mathrm{Y},\ \bigvee \mathrm{X} \vee \bigvee \mathrm{Y} \text{ existent} \rightarrow \bigvee(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) \text{ existe et } \bigvee(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = \bigvee \mathrm{X} \vee \bigvee \mathrm{Y}, \\ \bigwedge \mathrm{X},\ \bigwedge \mathrm{Y},\ \bigwedge \mathrm{X} \wedge \bigwedge \mathrm{Y} \text{ existent} \rightarrow \bigwedge(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) \text{ existe et } \bigwedge(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = \bigwedge \mathrm{X} \wedge \bigwedge \mathrm{Y}. \end{cases}$$

résulte de (8)

Proposition 12. — X étant un sous-ensemble de E, x, y des éléments quelconques de E

$$(11) \quad \begin{cases} \bigvee \mathrm{X} \text{ existe} \rightleftharpoons \bigwedge \Omega[\mathrm{X}] \text{ existe} \rightleftharpoons \bigvee \overset{-1}{\Omega}[\Omega[\mathrm{X}]] \text{ existe} \rightarrow \bigvee \mathrm{X} = \bigwedge \Omega[\mathrm{X}] \\ \text{et} \\ \bigvee \mathrm{X} = \bigvee \overset{-1}{\Omega}[\Omega[\mathrm{X}]], \\ \bigwedge \mathrm{X} \text{ existe} \rightleftharpoons \bigvee \overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}] \text{ existe} \rightleftharpoons \bigwedge \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}]\right] \text{ existe} \rightarrow \bigwedge \mathrm{X} = \bigvee \overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}] \\ \text{et} \\ \bigwedge \mathrm{X} = \bigwedge \Omega[\overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}]]; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \bigvee \mathrm{X} \text{ existe} \rightarrow \Omega(\bigvee \mathrm{X}) = \Omega[\mathrm{X}], \quad \overset{-1}{\Omega}(\bigvee \mathrm{X}) = \Omega[\overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}]], \quad \bigvee \mathrm{X} = \bigvee \overset{-1}{\Omega}(\mathrm{X}), \\ \bigwedge \mathrm{X} \text{ existe} \rightarrow \overset{-1}{\Omega}(\bigwedge \mathrm{X}) = \overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}], \quad \Omega(\bigwedge \mathrm{X}) = \Omega\left[\overset{-1}{\Omega}[\mathrm{X}]\right], \quad \bigwedge \mathrm{X} = \bigwedge \Omega(\mathrm{X}); \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} x \vee y \text{ existe} \rightleftharpoons \bigwedge (\Omega(x) \cap \Omega(y)) \text{ existe} \rightarrow x \vee y = \bigwedge (\Omega(x) \cap \Omega(y)) \\ \text{et} \\ \Omega(x \vee y) = \Omega(x) \cap \Omega(y), \\ x \wedge y \text{ existe} \rightleftharpoons \bigvee \left(\overset{-1}{\Omega}(x) \cap \overset{-1}{\Omega}(y)\right) \text{ existe} \rightarrow x \wedge y = \bigvee \left(\overset{-1}{\Omega}(x) \cap \overset{-1}{\Omega}(y)\right) \\ \text{et} \\ \overset{-1}{\Omega}(x \wedge y) = \overset{-1}{\Omega}(x) \cap \overset{-1}{\Omega}(y). \end{cases}$$

La démonstration se fait sans difficulté à partir de (1).

Proposition 13 [1]. — Soit A un sous-ensemble non vide de E et $X \subset A$.

$$(14) \quad \begin{cases} \bigvee X \text{ existe et } \bigvee X \in A \rightarrow \bigvee_A X \text{ existe et } \bigvee_A X = \bigvee X, \\ \bigwedge X \text{ existe et } \bigwedge X \in A \rightarrow \bigwedge_A X \text{ existe et } \bigwedge_A X = \bigwedge X; \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \bigvee X \text{ et } \bigvee_A X \text{ existent} \rightarrow \Omega \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}} \bigvee X,\ \bigvee_A X \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}}, \\ \bigwedge X \text{ et } \bigwedge_A X \text{ existent} \rightarrow \Omega \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}} \bigwedge_A X,\ \bigwedge X \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{\wedge}}; \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} A = \overset{-1}{\Omega}(A) \text{ et } \bigvee X \text{ et } \bigvee_A X \text{ existent} \rightarrow \bigvee X = \bigvee_A X, \\ A = \Omega(A) \text{ et } \bigwedge X \text{ et } \bigwedge_A X \text{ existent} \rightarrow \bigwedge X = \bigwedge_A X. \end{cases}$$

En effet (14) et (15) résultent de (9), la première partie de (16) se démontre ainsi :

$$\sup_A X \neq \emptyset \rightarrow \Omega[\sup X] \cap A \neq \emptyset \rightarrow \Omega(\bigvee X) \cap A \neq \emptyset \rightarrow \bigvee X \in \overset{-1}{\Omega}(A) = A,$$

on applique alors (14).

Définitions. — Soit Ω une relation d'ordre sur un ensemble E et un sous-ensemble X de E. Nous dirons :

que X est une $\bigvee$ partie si quel que soit $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ tel que $\bigvee Y$ existe, $\bigvee Y \in X$;

que X est une $\vee$ partie si quels que soient $x, y \in X$ tels que $x \vee y$ existe, $x \vee y \in X$;

que X est une $\bigwedge$ partie si quel que soit $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ tel que $\bigwedge X$ existe, $\bigwedge Y \in X$;

que X est une $\wedge$ partie si quels que soient $x, y \in X$ tels que $x \wedge y$ existe, $x \wedge y \in X$.

Nous dirons :

que Ω est une relation d'*ordre* $\bigwedge$ *latticiel* (resp. d'*ordre* $\bigvee$ *latticiel*) ou que E une $\bigwedge$ *lattice* (resp. une $\bigvee$ *lattice*) lorsque, quelle que soit la partie X *non vide* de E, $\bigwedge X$ existe (resp. $\bigvee X$ existe);

que Ω est une relation d'*ordre* $\wedge$ *latticiel* (resp. d'*ordre* $\vee$ *latticiel*) ou que E est une $\wedge$ *lattice* (resp. une $\vee$ *lattice*) lorsque, quels que soient les éléments $x, y \in E$, $x \wedge y$ existe (resp. $x \vee y$ existe);

que Ω est une relation d'*ordre latticiel complet* (resp. d'*ordre latticiel*) ou que E est une *lattice complète* (resp. une *lattice*) lorsque, Ω est à la fois une relation d'ordre $\bigwedge$ latticiel et $\bigvee$ latticiel (resp. lorsque Ω est à la fois une relation d'ordre $\wedge$ latticiel et $\vee$ latticiel).

Soit Ω une relation d'ordre sur l'ensemble E et X une partie de E. Nous dirons que X est *cofinal* [2] lorsque $E = \overset{-1}{\Omega}(X)$. X ou X' est toujours cofinal. Si X_1 est cofinal et $X_1 \subset X_2$, X_2 est cofinal. Pour que $\{x\}$ soit cofinal il faut et il suffit que x soit plus grand élément de E.

---

[1] Il est facile de donner des exemples où $\bigvee X$ existe sans que $\bigvee_A X$ existe et des exemples où $\bigvee_A X$ existe sans que $\bigvee X$ existe.

[2] Ou *dense* (A. Weil, *Intégration dans les groupes topologiques*, Hermann, 1938, p. 24). En effet la condition nécessaire et suffisante pour que X soit cofinal est que X soit partout dense pour la topologie droite.

Proposition 14 (1). — Si $\Omega \subset E \times E$ est un ordre $\wedge$ latticiel à gauche et si E a un plus grand élément, Ω est un ordre latticiel complet.

En effet $\Omega[E] \neq \emptyset \rightleftharpoons$ quel que soit X $\Omega[X] \neq \emptyset$. La proposition résulte alors de (11).

III. — Fermetures. Correspondances de Galois.

Fermetures. — Soit Ω une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons encore la relation $\Omega \lessgtr x, y \lessgtr$ par $x \prec y$ ou par $y \succ x$. De plus nous conviendrons de noter par un même symbole une relation quasi fonctionnelle (ou fonctionnelle) et la quasi-application (ou l'application) correspondante. Cette confusion d'écriture n'entraînera pratiquement aucun inconvénient dans ce chapitre.

Soient φ_1 et φ_2 deux applications de E dans E. La relation $\varphi_2 \overset{-1}{\varphi_1} \subset \Omega$, qui comme on le voit facilement est équivalente à : quel que soit $x \in E$ $\varphi_1(x) \prec \varphi_2(x)$, est une relation d'ordre sur l'ensemble des applications de E dans E. Lorsque cette relation est vraie on dit que φ_1 est plus fin que φ_2.

Soit φ une application de E dans E. Nous dirons :

que φ est une *fermeture* (sous-entendu de Ω) lorsque $\varphi \subset \Omega$ (autrement dit lorsque φ est telle que, quel que soit $x \in E$, $x \prec \varphi(x)$);

que φ est une W *fermeture* lorsque φ est une fermeture idempotente, c'est-à-dire une fermeture telle que $\varphi^2 = \varphi$;

que φ est une V *fermeture* lorsque φ est une fermeture croissante, c'est-à-dire telle que $\varphi\Omega \subset \Omega\varphi$ ou ce qui est équivalent lorsque quels que soient $x, y \in E$, $x \prec y \rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(y)$;

que φ est une C *fermeture* lorsque φ est à la fois une V et une W fermeture;

que φ est une F *fermeture* lorsque φ est une V fermeture distributive par rapport à $\bigvee$, c'est-à-dire telle que $\bigvee X$ existe $\rightarrow \bigvee \varphi(X)$ existe et $\varphi(\bigvee X) = \bigvee \varphi(X)$;

que φ est une T *fermeture* lorsque φ est une C fermeture distributive par rapport à $\vee$ c'est-à-dire telle que $x \vee y$ existe $\rightarrow \varphi(x) \vee \varphi(y)$ existe et $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$.

On dira que φ est une *ouverture* si φ est une fermeture pour $\overset{-1}{\Omega}$. Étant donné une fermeture (resp. une ouverture) φ, nous dirons que l'élément $x \in E$ est *fermé* (resp. ouvert) lorsque $\varphi(x) = x$.

Nous dirons que les éléments $x, y \in E$ sont *isotopes* lorsque $\varphi(x) = \varphi(y)$; la relation d'équivalence $\overset{-1}{\varphi}\varphi$ sera appelée *relation d'isotopie* attachée à φ.

L'identité est à la fois une fermeture et une ouverture. Suivant qu'on la considère comme fermeture ou comme ouverture, on l'appelle *fermeture discrète* ou *ouverture discrète*.

---

(1) Lorsque E n'a pas de plus grand élément, la proposition n'est plus vraie. Par exemple l'ensemble des filtres sur un ensemble ([2]) forme une $\wedge$ partie de $\mathfrak{pp}(E)$ n'ayant pas de plus grand élément (puisque, lorsque E n'est pas réduit à un élément il y a toujours au moins deux ultrafiltres distincts) et qui n'est pas une lattice complète.

Le lecteur constatera sans peine que les fermetures rectangles, carrées, transitives préordinales. de quasi-équivalence définies au Chap. I sont des C fermetures et que les fermetures quasi réflexives, réflexives et symétriques sont des FW fermetures.

Il est facile de voir que si A_φ désigne l'ensemble des éléments fermés de E, on a

$$\varphi \text{ est une W fermeture } \rightleftarrows A_\varphi = \varphi(E).$$

Si φ est une W fermeture, on a

$$X \subset \varphi(E) \rightleftarrows X \subset \varphi(X) \rightleftarrows X = \varphi(X).$$

Proposition 1. — Soit φ une V fermeture et X une partie non vide de E Alors :

$$\wedge X \text{ et } \wedge\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \wedge X \prec \varphi(\wedge X) \prec \wedge\varphi(X) \prec \varphi(\wedge\varphi(X)),$$
$$\vee X \text{ et } \vee\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \vee X \prec \vee\varphi(X) \prec \varphi(\vee X) \prec \varphi(\vee\varphi(X)).$$

En effet quel que soit $x \in X$, $x \succ \wedge X$, d'où $\varphi(x) \succ \varphi(\wedge X)$. D'où $\bigwedge_{x \in X} \varphi(x) \succ \varphi(\wedge X)$, d'où $\wedge\varphi(X) \succ \varphi(\wedge X)$. Le reste de la première partie de la proposition est évident.

Quel que soit $x \in X$, $\varphi(x) \in \varphi(X)$. Donc $\varphi(x) \prec \vee\varphi(X)$. Donc $x \prec \vee\varphi(X)$, donc $\bigvee_{x \in X} x \prec \vee\varphi(X)$. D'où $x \prec \vee X \prec \vee\varphi(X)$, d'où $\varphi(x) \prec \varphi(\vee X) \prec \varphi(\vee\varphi(X))$. D'où

$$\bigvee_{x \in X} \varphi(x) \prec \varphi(\vee X) \prec \varphi(\vee\varphi(X)),$$

ce qui démontre la seconde partie de la proposition.

Proposition 2. — Si E est une $\wedge$ lattice et φ une application de E dans E, la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une V fermeture est que, quelle que soit la partie non vide X de E on ait :

$$\wedge X \text{ et } \wedge\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \wedge X \prec \varphi(\wedge X) \prec \wedge\varphi(X) \prec \varphi(\wedge\varphi(X)).$$

Si E est une $\vee$ lattice et φ une application de E dans E, la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une V fermeture est que, quelle que soit la partie non vide X de E on ait :

$$\vee X \text{ et } \vee\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \vee X \prec \vee\varphi(X) \prec \varphi(\vee X) \prec \varphi(\vee\varphi(X)).$$

Démontrons par exemple la première partie. La condition est nécessaire d'après la proposition précédente. Démontrons que la condition est suffisante. φ est une fermeture car en prenant $X = \{x\}$ on a $x \prec \varphi(x)$. Soient x, y tels que $x \prec y$. Alors $x = x \wedge y$. Prenons $X = \{x, y\}$ alors $\varphi(x \wedge y) \prec \varphi(x) \wedge \varphi(y)$. Donc $\varphi(x) \prec \varphi(x) \wedge \varphi(y)$, donc $\varphi(x) \prec \varphi(y)$. Donc φ est une V fermeture.

La seconde partie se démontre de la même manière.

Proposition 3. — Soit φ une C fermeture et X une partie non vide de E. Alors :

$$\wedge X \text{ et } \wedge\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \wedge X \prec \varphi(\wedge X) \prec \wedge\varphi(X) = \varphi(\wedge\varphi(X)),$$
$$\vee X \text{ et } \vee\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \vee X \prec \vee\varphi(X) \prec \varphi(\vee X) = \varphi(\vee\varphi(X)).$$

En effet φ étant une V fermeture, $\wedge\varphi(X) \succ \varphi(\wedge X)$ et en remplaçant X par $\varphi(X)$, $\wedge\varphi(X) \succ \varphi(\wedge\varphi(X))$, $\vee\varphi(X) \prec \varphi(\vee X)$ et en opérant les deux membres par φ, $\varphi(\vee\varphi(X)) \prec \varphi(\vee X)$.

***Proposition* 4.** — **Si E est une $\wedge$ lattice et φ une application de E dans E, la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une C fermeture est que quelle que soit la partie non vide X de E on ait :**

$$\wedge X \text{ et } \wedge\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \wedge X \prec \varphi(\wedge X) \prec \wedge\varphi(X) = \varphi(\wedge\varphi(X)).$$

Si E est une $\vee$ lattice et φ une application de E dans E, la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une C fermeture est que, quelle que soit la partie non vide X de E, on ait :

$$\vee X \text{ et } \vee\varphi(X) \text{ existent } \rightarrow \vee X = \vee\varphi(X) \prec \varphi(\vee X) = \varphi(\vee\varphi(X)).$$

En effet, les conditions nécessaires résultent de la proposition ci-dessus et les conditions suffisantes se démontrent immédiatement en prenant $X = \{x\}$.

Lemme. — *Soit φ une C fermeture. Alors $\varphi(E)$ est une $\wedge$ partie de E cofinale, et si $\vee X$ et, $\vee_{\varphi(E)}X$ existent, $\wedge(\Omega[X] \cap \varphi(E))$ existe et l'on a*

$$\wedge_{\varphi(E)}X = \wedge(\Omega[X] \cap \varphi(E)) = \varphi(\vee X).$$

En effet soit $X \subset \varphi(E)$, $X \neq \emptyset$. Alors $X = \varphi(X)$. D'après la proposition précédente $\wedge\varphi(X) = \varphi(\wedge\varphi(X))$; donc $\wedge X = \varphi(\wedge X)$. Donc $\wedge X \in \varphi(E)$, c'est-à-dire $\varphi(E)$ est une $\wedge$ partie de E. $\varphi(E)$ est cofinale en E car $\varphi \subset \Omega \rightleftharpoons \Delta \subset \overset{-1}{\Omega}\varphi \rightarrow E = \overset{-1}{\Omega}\varphi(E)$. Supposons que $\vee X$, $\vee_{\varphi(E)}X$ et $\wedge(\Omega[X] \cap \varphi(E))$ existent.
Alors

$$\vee_{\varphi(E)}X = \wedge_{\varphi(E)}\Omega_{\varphi(E)}[X] = \wedge(\Omega[X] \cap \varphi(E)).$$

Or $y \in \Omega(x) \cap \varphi(E) \rightarrow \varphi(x) \prec y$, car $y \in \Omega(x) \rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(y) = y$, puisque $y \in \varphi(E)$. Donc quel que soit x, $\wedge(\Omega(x) \cap \varphi(E))$ existe et $\varphi(x) = \wedge(\Omega(x) \cap \varphi(E))$. Donc si $\vee X$ existe, $\wedge(\Omega(\vee X) \cap \varphi(E)) = \wedge(\Omega[X] \cap \varphi(E))$ existe et l'on a

$$\varphi(\vee X) = \wedge(\Omega[X] \cap \varphi(E)).$$

Théorème. — *Soit E une $\wedge$ lattice, $\mathcal{C}$ l'ensemble des C fermetures sur E ordonné par la relation « plus fin que », $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\wedge$ parties cofinales de E ordonné par inclusion. La correspondance entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ qui à $\varphi \in \mathcal{C}$ fait correspondre $\varphi(E)$ et à $A \in \mathcal{S}$ fait correspondre φ défini par $\varphi(x) = \wedge(\Omega(x) \cap A)$ est un isomorphisme dual entre les deux ensembles ordonnés $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$. De plus $\mathcal{C}$ est une $\wedge$ lattice et $\mathcal{S}$ une $\vee$ lattice.*

Lorsque E est une lattice complète, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont des lattices complètes.

En effet, d'après le lemme précédent, $\varphi \in C \rightarrow \varphi(E) \in \mathcal{S}$.

Soit $A \in \mathcal{S}$ et φ défini par $\varphi(x) = \wedge(\Omega(x) \cap A)$. A étant cofinal $\Omega(x) \cap A \neq \emptyset$ quel que soit x. A étant une $\wedge$ partie $\wedge(\Omega(x) \cap A)$ existe et $\wedge(\Omega(x) \cap A) \in A$, $\wedge(\Omega(x) \cap A) \in \Omega(x)$ car $\wedge(\Omega(x) \cap A) \succ \wedge\Omega(x) = x$. Donc $\wedge(\Omega(x) \cap A) \in \Omega(x) \cap A$, c'est-à-dire $\varphi(x) \in \Omega(x) \cap A$ est plus petit élément de $\Omega(x) \cap A$. Donc $\Omega(x) \cap A = \Omega(\varphi(x)) \cap A$ et en opérant par $\wedge$ $\varphi(x) = \varphi\varphi(x)$. De plus $\varphi(x) \in \Omega(x)$. Donc φ est une W fermeture.

φ est une $\vee$ fermeture car $x \prec y \rightarrow \Omega(x) \supset \Omega(y) \rightarrow \Omega(x) \cap A \supset \Omega(y) \cap A \rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(y)$. Donc $\varphi \in \mathcal{C}$.

La correspondance donnée entre $\mathcal{C}$ et φ est biunivoque car

$$\psi(x) = \wedge(\Omega(x) \cap \varphi(E)) \rightarrow \psi = \varphi,$$

puisque d'après le lemme $\wedge(\Omega(x) \cap \varphi(E)) = \varphi(x)$; d'autre part $\varphi(x) = \wedge(\Omega($[illegible]$)$

implique $\varphi(E) = A$ car, quel que soit x, $\varphi(x) \in A$. Donc $\varphi(E) \subset A$. D'autre part $\varphi(E) \supset A$ car si $x \in A$, $\varphi(x) = \bigwedge \Omega(x) = x$, c'est-à-dire $x \in \varphi(E)$.

On vérifie immédiatement que la correspondance est un isomorphisme dual entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{C}$ est une $\bigwedge$ lattice et $\mathcal{S}$ une $\bigvee$ lattice.

Théorème (1). — *Soit* E *un ensemble qui soit à la fois une* $\bigwedge$ *lattice et une* $\vee$ *lattice,* $\mathcal{T}$ *l'ensemble des* T *fermetures sur* E *ordonné par la relation « plus fin que »,* $\mathcal{U}$ *l'ensemble des parties cofinales des* E *qui sont à la fois des* $\bigwedge$ *parties et des* $\vee$ *parties. La correspondance entre* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{U}$ *qui à* $\varphi \in \mathcal{T}$ *fait correspondre* φ (E) *et à* $A \in \mathcal{U}$ *fait correspondre* φ *défini par* $\varphi(x) = \bigwedge (\Omega(x) \cap A)$ *est un isomorphisme dual entre les deux ensembles ordonnés* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{U}$. *De plus* $\mathcal{T}$ *est une* $\bigwedge$ *lattice et une* $\vee$ *lattice et* $\mathcal{U}$ *une* $\bigvee$ *lattice et une* $\wedge$ *lattice.*

En effet $\varphi \in \mathcal{T} \rightarrow \varphi(E) \in A$ car $x_1, x_2 \in E \rightarrow x_1 \vee x_2 = \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \vee x_2) \in \varphi(E)$
$\varphi(E) \in \mathcal{U} \rightarrow \varphi \in \mathcal{T}$, car
$\varphi(x_1 \vee x_2) = \bigwedge (\Omega(x_1 \vee x_2) \cap A) = \bigwedge (\Omega(x_1) \cap A) \vee \bigwedge (\Omega(x_2) \cap A) = \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2)$.

Correspondance de Galois. — Soient E et F deux ensembles ordonnés. Nous emploierons le même symbole $\prec$ pour désigner les relations d'ordre sur E et sur F, ce qui ne présente pas d'inconvénient. Nous dirons que le couple (f, e), f étant une application de E dans F et e une application de F dans E est une *correspondance de Galois* (2) entre E et F lorsque :

ef est une fermeture dans E;
fe est une fermeture dans F;
e est décroissant (c'est-à-dire $x_1 \prec x_2 \rightarrow e(x_1) \succ e(x_2)$ quels que soient $x_1, x_2 \in E$);
f est décroissant (c'est-à-dire $y_1 \prec y_2 \rightarrow f(y_1) \succ f(y_2)$ quels que soient $y_1, y_2 \in F$).

Théorème. — *Si* (f, e) *est une correspondance de Galois entre les ensembles ordonnés* E *et* F, on a :

$fef = f$, $efe = e$;
$\varepsilon = ef$ est une C fermeture dans E et $\varepsilon(E) = e(F)$;
$\varphi = fe$ est une C fermeture dans F et $\varphi(F) = f(E)$;
la restriction $f_{\varepsilon(E)}$ de f à $\varepsilon(E)$ est un isomorphisme de $\varepsilon(E)$ sur $\varphi(F)$;
la restriction $e_{\varphi(F)}$ de e à $\varphi(F)$ est un isomorphisme de $\varphi(F)$ sur $\varepsilon(E)$ inverse du précédent.

En effet, quel que soit $x \in E$, $ef(x) \succ x$ d'où $fef(x) \prec x$, fe étant une fermeture

$$fef(x) \succ f(x).$$

Donc $fef(x) = f(x)$ quel que soit x. Donc $fef = f$. On montre de même que $efe = e$.

(1) Ce théorème montre l'identité entre les topologies définies par des T fermetures et les topologies définies par un ensemble de fermés satisfaisant aux axiomes F_I et F_{II} de N. Bourbaki [4 Chap. I § 1].

(2) Galois a en effet découvert une correspondance de ce type très importante : celle entre les sous-groupes du groupe d'une équation et les extensions normales du corps des coefficients.

$\varepsilon = ef$ est une C fermeture car $fef = f \rightarrow efef = ef \rightarrow \varepsilon^2 = \varepsilon$; c'est donc une W fermeture car le composé de deux fonctions décroissantes est une fonction décroissante.

$\varepsilon(E) = e(F)$ car $x \in e(F) \rightleftharpoons \exists y \in F,\ x = ey \ \rightleftharpoons\ x = \varepsilon(x)$, (on prend $y = f(x)$). On montre de même que $\varphi = fe$ est une C fermeture et que $\varphi(F) = f(E)$. f applique $\varepsilon(E)$ sur $\varphi(F)$ car $f\varepsilon = f$, e applique $\varphi(F)$ sur $\varepsilon(E)$ car $e\varphi = e$.

La restriction de f à $\varepsilon(E)$ est une application biunivoque entre $\varepsilon(E)$ et $\varphi(F)$ car

$$x_1 = \varepsilon(x_1) = ef(x_1), \qquad x_2 = \varepsilon(x_2) = ef(x_2) \qquad \text{et} \qquad f(x_1) = f(x_2) \ \rightarrow\ x_1 = x_2$$

(en multipliant les deux membres par e.

La restriction de e à $\varphi(F)$ est l'inverse de la restriction de f à $\varepsilon(E)$ car

$$x = \varepsilon(x) = ef(x) \ \rightarrow\ ef(x) = x.$$

Nous dirons que la correspondance de Galois (f, e) entre E et F est *parfaite en* E lorsque e applique F *sur* E.

Nous dirons que la correspondance de Galois (f, e) entre E et F est *parfaite* lorsqu'elle est parfaite en E et en F (Ore [2]).

Proposition 5. — Si (f, e) est une correspondance de Galois entre E et F,

(f, e) est parfaite en E	$\rightleftharpoons$	$\varepsilon = ef$ est la fermeture discrète,	(a)
»	$\rightleftharpoons$	f est biunivoque entre E et $\varphi(F)$,	(b)
(f, e) est parfaite	$\rightleftharpoons$	f est biunivoque entre E et F.	(c)

En effet :

(f, e) parfaite en E $\rightleftharpoons (a)$ car $\varepsilon(E) = E \ \rightleftharpoons\ \varepsilon$ est la fermeture discrète;
$(a) \rightarrow (b)$ car $\varepsilon(E) = E$. Or on a vu que la restriction de f à $\varepsilon(E)$ était biunivoque;
$(b) \rightarrow (a)$ car $\varepsilon(E) \neq E \rightarrow \exists x,\ x \neq \varepsilon(x)$. Or $f(x) = f\varepsilon(x)$. Donc f n'est pas biunivoque.

Fermetures sur $\mathfrak{P}(E)$. — *Proposition* 6 (Everett [10]). — Pour que φ soit une C fermeture sur $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par inclusion, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble F et une relation $R \subset E \times F$ telle que, quel que soit $X \subset E$, $\varphi(X) = \overset{-1}{R}[R[X]]$.

En effet, la condition est suffisante d'après les formules (I.4), (I.22), (I.23). La condition est nécessaire : il suffit de prendre pour F l'ensemble des $\varphi(X)$ lorsque X parcourt $\mathfrak{P}(E)$ et pour R la relation $R \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{\varphi(X)} \rightleftharpoons x \in \varphi(X)$.

Proposition 7. — Pour que φ soit une C fermeture sur $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par inclusion et que $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble F et une relation $R \subset E \times F$ telle que R′ soit partout définie et que, quel que soit $X \subset E$, $\varphi(X) = \overset{-1}{R}[R[X]]$.

En effet

$$\overset{-1}{R}[R[\emptyset]] = \emptyset \ \rightleftharpoons\ \overset{-1}{R'}(F) = E \ \rightleftharpoons\ \mathrm{pr}_1 R' = E.$$

Proposition 8. — Si $R \subset E \times F$ est tel que R′ soit quasi fonctionnelle et si l'on

définit φ **application de** $\mathfrak{P}$**(E) dans** $\mathfrak{P}$**(E) par** $\varphi(X) = \overset{-1}{R}[R[X]]$ **quel que soit** $X \subset E$, φ **est une T fermeture sur** $\mathfrak{P}$**(E).**

Cela résulte de la proposition 5 du Chapitre I.

Étant donné un ensemble E ordonné par une relation d'ordre Ω et admettant un plus petit élément z et des *atomes*, c'est-à-dire des éléments minimaux de $(\Omega \cap \Delta')(z)$, on dira qu'une C fermeture φ sur E est une C_0 fermeture (respectivement qu'une T fermeture φ sur E est une T_0 fermeture) lorsqu'elle satisfera à la condition de séparation de Kolmogoroff :

si x et y sont des atomes : $x = y \rightleftharpoons \varphi x = \varphi(y)$.

Nous appellerons une FT_0 fermeture, c'est-à-dire une fermeture qui est à la fois une F fermeture et une T_0 fermeture une *fermeture d'Alexandroff*.

Proposition 9. — **Pour que φ soit une F fermeture sur $\mathfrak{P}$(E) ordonné par inclusion, il faut et il suffit qu'il existe une relation réflexive $R \subset E \times E$ telle que, quel que soit $X \subset E$, $\varphi(X) = R(X)$**

En effet la condition est suffisante d'après les formules (I.4) et (I.8) et (I.3). La condition est nécessaire : il suffit de prendre R défini par $R(x) = \varphi(\{x\})$

Proposition 10. — **Pour que φ soit une FT fermeture sur $\mathfrak{P}$(E) ordonné par inclusion, il faut et il suffit qu'il existe une relation de préordre $R \subset E \times E$ telle que, quel que soit $X \subset E$, $\varphi(X) = R(X)$, car**

$$\text{quel que soit } X\, R(R(X)) = R(X) \rightleftharpoons R^2 = R.$$

Proposition 11. — **Pour que φ soit une φ fermeture d'Alexandroff sur $\mathfrak{P}$(E) ordonné par inclusion, il faut et il suffit qu'il existe une relation d'ordre $R \subset E \times E$ telle que, quel que soit $X \subset E$, $\varphi(X) = R(X)$,**

car $(R(x) = R(y) \rightleftharpoons x = y) \rightleftharpoons R \cap \overset{-1}{R} = \Delta$, R étant une relation de préordre.

Deux F fermetures φ_1, φ_2 sur $\mathfrak{P}$(E) seront dites *réciproques* si les relations binaires réflexives R_1, R_2 correspondantes sont telles que $R_1 = \overset{-1}{R_2}$ ([10]).

Une F fermeture sur $\mathfrak{P}$(E) sera dite *autoréciproque* si la relation binaire réflexive carrespondante est symétrique.

Une F fermeture sur $\mathfrak{P}$(E) sera dite *linfieldienne* ([11]) si elle est autoréciproque et si la relation R correspondante est telle, quel que soit $x \in E$, $R(x)$ est fini.

Étant donné un ensemble ordonné par la relation d'ordre Ω, on dit que la fermeture d'Alexandroff définie par $\varphi(X) = \Omega(X)$ définit sur E la *topologie gauche* et que la fermeture d'Alexandroff définie par $\varphi(X) = \overset{-1}{\Omega}(X)$ définit sur E la *topologie droite* ([4] Chap. I, § 1, Exercice 1).

Bibliographie.

[Ens R] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles* (Fascicule de résultats). Hermann, *Actualités scientifiques et industrielles*, n° 846.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre* I, Hermann, *Actualités scientifiques et industrielles*, n° 934.

[2] — *Algèbre* II, Hermann, *Actualités scientifiques et industrielles*, n° 1032.

[3] — *Algèbre* III, Hermann, *Actualités scientifiques et industrielles*, n° 1044.

[4] — *Topologie* I, II, Hermann, *Actualités scientifiques et industrielles*, n° 858.

[5] W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars, 1928.

[6] A. Denjoy, *L'énumération transfinie* I, Gauthier-Villars, 1946.

[7] G. Birkhoff, *On the structure ofastract algebras* (*Proc. Cambridge, Phil. Soc.*, 31, 1935, (p. 433-454).

[8] — *On the combination of topologies* (*Fundamenta math.*, 29, 1936, p. 156-166).

[9] — *Espaces discrets* (*C. R. Acad. Sci.*, 201, 1935, p. 19-20).

[10] Alexandroff, *Espaces discrets* (*C. R. Acad. Sci.*, 200, 1935, p. 1649).

[11] B.-Z. Linfield, *Espace discret paramétrique et non paramétrique*. Thèse, Strasbourg, 1925.

[12] M. Krasner, *Une généralisation de la notion de corps* (*Journal de Liouville*, 386, 1938, p. 367).

[13] O. Ore, *Theory of équivalence relations* (*Duke Math. Journal*, 9, 1942).

[14] — *Galois connexions* (*Trans. amer. Math. Soc.* 55, 1944, p. 493-513).

[15] C.-J. Everett, *Closure operators and Galois theory in lattices* (*Trans. amer. Math. Soc.*, 55, 1944, p. 514-525).

[16] J. Riguet, *Produit tensoriel de lattices* (*C. R. Acad. Sci.*, 226, 1948, p. 40-41 et p. 143-146).

[17] A. Châtelet, *Les théorèmes de Jordan-Hölder et Schreier* [*Revue scientifique* (Revue rose), juin 1947, p. 579-596].

[18] A. Châtelet, *Algèbre des relations de congruence* (*Annales scient. École normale*, 64, 1947, n° 4, p. 339-368).