ANDRÉ LICHNEROWICZ

Sur les équations relativistes de la gravitation

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 237-251
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__237_0>

SUR LES ÉQUATIONS RELATIVISTES DE LA GRAVITATION (¹);

PAR A. LICHNEROWICZ.

Je me propose, de montrer quels sont les problèmes posés par la théorie mathématique des équations relativistes de la gravitation et d'indiquer les principaux résultats obtenus dans cette voie au cours des dernières années. La plupart des résultats signalés ici ont été étendus par M^me^ Fourès, Yves Thiry et moi-même au cas où l'on envisage, en même temps que le champ gravitationnel, un champ électromagnétique. Je me limiterai ici au cas purement gravitationnel. Pour plus de clarté, je rappellerai d'abord rapidement les axiomes et les résultats classiques qui sont à la base de la théorie.

I. — Étude générale des équations d'Einstein.

1. La variété espace-temps V_4. — Dans la théorie relativiste de la gravitation, l'élément primitif est constitué par une variété « espace-temps » V_4 à quatre dimensions, douée d'une structure de variété différentiable de classe C^2 au moins; d'une manière plus précise, dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles, les coordonnées d'un point dans l'un des systèmes sont des fonctions quatre fois dérivables, à jacobien non nul, des coordonnées de ce point dans l'autre système, les dérivées premières et secondes étant continues, les dérivées troisièmes ou quatrièmes pouvant être seulement continues par morceaux.

Sur V_4 est définie une métrique riemanienne ds^2, de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs. L'expression locale de cette métrique dans un système de coordonnées admissibles est

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ et tout indice grec} = 1, 2, 3, 4). \tag{1.1}$$

Les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de (1.1) sont dits les *potentiels de gravitation* pour le système de coordonnées envisagé. Par hypothèse, le « tenseur fondamental de gravitation » $g_{\alpha\beta}$ est une fois continûment différentiable sur V_4 et admet des dérivées secondes et troisièmes continues par morceaux, ce qui est bien compatible avec la structure imposée à V_4. L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point M de V_4, un cône réel C_M qui est dit le *cône élémentaire* en M.

(¹) Conférence de synthèse faite à l'Université libre de Bruxelles.

Une direction (dx^α) au point M de V_4 est dite *orientée dans le temps* si, pour cette direction, $ds^2 > 0$ (intérieur de C_M); elle est *orientée dans l'espace* pour $ds^2 < 0$ (extérieur de C_M). Une ligne est orientée dans le temps quand ses tangentes sont orientées dans le temps. Une hypersurface S est orientée dans l'espace lorsque son élément plan tangent est extérieur au cône élémentaire. La normale à S est alors orientée dans le temps et si S est localement définie par $f(x^\alpha) = 0$, la quantité

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f \qquad \left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \tag{1.2}$$

est *strictement positive*. Si $\Delta_1 f < 0$, S est orientée dans le temps.

Les systèmes locaux de coordonnées généralement utilisés sont composés de coordonnées (x^1, x^2, x^3, x^4) telles que les surfaces $x^4 =$ const. soient orientées dans l'espace, les lignes le long desquelles x^4 varie seule étant orientées dans le temps. Ces hypothèses se traduisent analytiquement respectivement par $g^{44} > 0$ et $g_{44} > 0$; elles entraînent respectivement que les deux formes quadratiques $g_{ij} X^i X^j$ et $g^{ij} X_i X_j$ sont définies négatives (i, j et tout indice latin $= 1, 2, 3$).

Lorsque des considérations globales sont nécessaires, on suppose généralement que V_4 est le produit topologique d'une variété à trois dimensions par une variété à une dimension, les sous-variétés facteurs étant dans V_4 respectivement orientées dans l'espace et le temps. Elles sont dites sections d'espace et lignes de temps; différentes hypothèses peuvent être faites sur la topologie des variétés facteurs, mais dans la plupart des problèmes, seule la topologie des sections d'espace importe, Les cas usuels sont ceux où l'espace est homéomorphe à R^3 [la métrique d'espace définie par (1.1) étant alors complète], ou bien est une variété compacte. Il importerait que des recherches sur la topologie des variétés différentiables munies d'une métrique indéfinie permettent de réduire au minimum les hypothèses faites sur la topologie de V_4.

Les différentes hypothèses explicitées sur la métrique (1.1) caractérisent les métriques *régulières*.

2. Le système des équations d'Einstein. — Je désignerai dans la suite par $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de V_4 et poserai

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R.$$

Les équations étudiées ici seront uniquement les équations sans constante cosmologique

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}. \tag{2.1}$$

Mais beaucoup de résultats peuvent s'étendre trivialement aux équations avec constante cosmologique. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$, de signification purement mécanique, décrit au mieux, au point considéré de V_4, l'état de la matière ou de l'énergie (cas intérieur) ou bien, dans les régions non balayées par l'énergie, est identiquement nul (cas extérieur). Il généralise ainsi le second membre de l'équation de Poisson. Son expression la plus simple, dans le cas où l'on ne tient compte que de l'énergie massique, est $T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$, où ρ est la densité et u_α le vecteur-vitesse unitaire.

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$, de signification purement géométrique, ne dépend que des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres, est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre et satisfait aux *conditions dites de conservation*

$$\nabla_\lambda S^\lambda{}_\alpha = 0 \quad (\nabla_\lambda, \text{ opérateur de dérivation covariante}) \tag{2.2}$$

qui sont une conséquence immédiate des identités de Bianchi. Ces conditions peuvent d'ailleurs servir à le caractériser, à la constante cosmologique près, comme l'a montré Élie Cartan.

A noter que dans le cas extérieur, les équations d'Einstein sont équivalentes aux équations $R_{\alpha\beta} = 0$. Il est bon d'avoir connaissance de la forme explicite des $R_{\alpha\beta}$ en fonction des potentiels

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}[\partial_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + \partial_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}] + K_{\alpha\beta},$$

où les $K_{\alpha\beta}$ ne dépendent que des potentiels et de leurs dérivées premières et sont quadratiques par rapport aux déaivées premières.

J'appelle *modèle d'univers* une V_4 munie d'une métrique partout régulière, satisfaisant aux équations d'Einstein des différents cas. A la traversée des hypersurfaces orientées dans le temps, séparant la matière en mouvement des régions non balayées par elle, les potentiels et leurs dérivées premières sont continues, les dérivées secondes étant discontinues. Le but de la théorie relativiste de la gravitation est la construction de modèles d'univers et leur interprétation physique. Sous cet aspect, la théorie pose des problèmes qui présentent une analogie avec des problèmes classiques en hydrodynamique. Mais il s'agit ici de solution spartout régulières sur une variété dont la topologie donnée peut être relativement compliquée.

3. Le problème de Cauchy. — Le système des équations d'Einstein présentant, comme nous allons le voir, le caractère hyperbolique normal, le premier problème que nous devons nous poser sur lui est le problème de Cauchy qui est étroitement lié au déterminisme relativiste. Nous commencerons par une étude élémentaire locale et, pour nous réduire à l'essentiel, nous n'introduirons pas de second membre et n'envisagerons ici que le problème de Cauchy extérieur. A ce stade, l'analyse n'est d'ailleurs pas sensiblement modifiée par la présence d'un second membre. Notre problème est donc le suivant :

PROBLÈME. — *Étant donné, sur une hypersurface* S, *les potentiels et leurs dérivées premières, déterminer en dehors de* S *les potentiels lorsqu'ils satisfont aux équations du cas extérieur.*

Nous supposerons pour le moment que S *est partout orientée dans l'espace* et qu'elle a été localement représentée par l'équation $x^4 = 0$. On a alors $g^{44} > 0$. Sur S sont données les « données de Cauchy » $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_4 g_{\alpha\beta}$. Si l'on cherche à mettre en évidence, dans les équations d'Einstein, les dérivées secondes encore inconnues, $\partial_{44}g_{\alpha\beta}$, on est amené à remplacer ces équations par le système équivalent composé des deux groupes d'équations :

$$(3.1) \qquad R_{ij} \equiv -\frac{1}{2}g^{44}\partial_{44}g_{ij} + F_{ij}(\text{d. C.}) = 0 \qquad (\text{d. C.} = \text{données de Cauchy}),$$

$$(3.2) \qquad S^4_\alpha \equiv G_\alpha(\text{d. C.}) = 0.$$

Une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit possible est certainement que les équations (3.2) soient satisfaites sur S par les données de Cauchy. D'autre part, g^{44} étant $\neq 0$, les équations (3.1) fournissent les valeurs sur S des six dérivées $\partial_{44}g_{ij}$. Aucune équation ne contient les dérivées $\partial_{44}g_{\lambda 4}$. Cela ne doit pas nous surprendre : la donnée sur S des données de Cauchy laisse subsister la possibilité de changement de coordonnées conservant S point par point, ainsi que les données de Cauchy; de tels changements de coordonnées ne modifient pas les valeurs des $\partial_{44}g_{ij}$, mais permettent de donner à $\partial_{44}g_{\lambda 4}$ des valeurs arbitraires, en particulier permettent d'annuler éventuellement leurs discontinuités qui apparaissent alors comme des singularités artificielles. Nous pouvons toujours astreindre les $\partial_{44}g_{\lambda 4}$ à être continus à la traversée de S.

Cela posé, il est facile de voir que le système des équations d'Einstein est en involution : si un ds^2 satisfait aux équations (3.1) et *sur* S aux équations (3.2), il satisfait aussi en dehors de S aux équations (3.2). Ceci est une conséquence immédiate des conditions de conservation (2.2). Nous voyons donc que notre problème initial doit être partagé en deux problèmes distincts :

1° *Problème I ou problème des conditions initiales.* — Il consiste dans la recherche de données de Cauchy satisfaisant sur S au système (3.2) ou système des conditions initiales.

2° *Problème II ou problème de l'évolution dans le temps.* — Il consiste dans l'intégration du système des équations d'Einstein pour des données de Cauchy satisfaisant à (3.2).

Supposons un instant, ce qui est d'ailleurs absurde dans l'axiomatique de la théorie de la relativité, que toutes les données du problème II soient analytiques réelles. On peut alors déduire du théorème Cauchy-Kowalewska qu'à un changement de coordonnées près, conservant S point par point et les données de Cauchy, le problème II admet une solution analytique unique. Mais l'analyticité ne doit jouer, en fait, aucun rôle ici.

Les résultats de cette analyse ne sont pas sensiblement modifiés si l'hypersurface S est partout orientée dans le temps. Au contraire, si S est partout tangente au cône élémentaire, c'est-à-dire si $g^{44} = 0$, les dérivées secondes des potentiels g_{ij} peuvent être discontinues à la traversée de S; il peut exister une infinité de solutions des équations d'Einstein correspondant aux mêmes données de Cauchy sur S. On reconnaît là des résultats classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles concernant les *variétés caractéristiques* (ou surfaces d'onde). Ainsi C est le cône caractéristique pour les équations d'Einstein et les variétés caractéristiques sont les variétés tangentes à ces cônes; ce sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

On en déduit immédiatement que les *bicaractéristiques* au sens d'Hadamard (ou rayons) sont les géodésiques de longueur nulle du ds^2. Celles de ces courbes qui sont issues d'un même point M de V_4 engendrent les deux nappes du *conoïde caractéristique* de sommet M.

En définitive, nous devons chercher à résoudre le problème des conditions initiales; nous devons aussi obtenir des théorèmes d'existence et d'unicité dans le cas non analytique pour le problème II. C'est là un assez difficile problème de la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles et les résultats les plus fins de cette théorie ne s'appliquent pas d'une manière immédiate au présent problème. Des théorèmes intéressants relatifs à ces deux problèmes ont été récemment obtenus.

II. — Le problème de l'évolution dans le temps.

4. **Le théorème général de Mme Fourès.** — C'est en vue du problème de l'intégration des équations d'Einstein que Mme Fourès a étudié dans sa thèse les systèmes d'équations aux dérivées partielles du type suivant :

$$E_S \equiv A^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} W_S + f_S = 0 \qquad (S = 1, 2, \ldots, N), \tag{4.1}$$

où les W_S sont des fonctions inconnues de quatre variables indépendantes x^α, où les $A^{\alpha\beta}$ et f_S sont des fonctions données des W_R, $\partial_\alpha W_R$ et des x^α, la forme quadratique $A^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta$ étant supposée de type hyperbolique normal. Les résultats obtenus peuvent être étendus à un plus grand nombre de variables indépendantes, mais nous nous limiterons ici à quatre.

Sur l'hypersurface S définie par $x^4 = 0$, les données de Cauchy sont définies par les fonctions

$$W_S(x^i, 0) = \varphi_S(x^i), \qquad \partial_4 W_S(x^i, 0) = \psi_S(x^i).$$

Sur le système (E_S) *et les données de Cauchy les hypothèses suivantes sont faites :*

1° Dans un domaine D_0 de S, entourant un point $\overline{M}$ de coordonnées $(\overline{x}^i)$ et défini par $|x^i - \overline{x}^i| \leqq d$, φ_S et ψ_S admettent des dérivées partielles jusqu'aux ordres 6 et 5, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

2° Dans un domaine D défini par $|x^i - \overline{x}^i| \leqq d$, $|x^4| \leqq \varepsilon$ et pour des valeurs des inconnues satisfaisant à

$$|W_S - \varphi_S| \leqq l, \qquad |\partial_i W_S - \partial_i \varphi_S| \leqq l, \qquad |\partial_4 W_S - \psi_S| \leqq l;$$

a. Les $A^{\alpha\beta}$ et f_S admettent des dérivées partielles jusqu'au cinquième ordre, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz par rapport à tous leurs arguments;

b. La forme quadratique $A^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal, la variable x^4 présentant le caractère temporel et les variables x^i le caractère spatial ($A^{44} > 0$, $A^{ij}X_iX_j$ définie négative).

Sous ces conditions, M^me Fourès a établi que le problème de Cauchy relatif à (E_S) *admet une solution et une seule dans un domaine* Δ, *du type d'un tronc de cône de base* D_0, *défini par des inégalités de la forme*

$$|x^i - \overline{x}^i| \leqq d, \qquad |x^4| < \eta(x^i).$$

Dans le cas où les $A^{\alpha\beta}$ ne contiennent que les fonctions W_S et non leurs dérivées premières, une unité peut être gagnée dans toutes les hypothèses faites sur l'ordre de dérivabilité des fonctions et les raisonnements sont un peu plus simples : ce cas étant le cas intéressant pour les équations d'Einstein, c'est à lui que je me limiterai.

Il m'est impossible de donner ici la longue étude qui conduit à ces résultats. Je me bornerai à quelques brèves indications. M^me Fourès commence par étudier le problème de Cauchy pour un système linéaire de la forme

$$(4.2) \qquad L_s \equiv A^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}u_s + B_s^{r\alpha}\,\partial_\alpha u_r + f_s = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

où les A, B, f sont des fonctions données des variables indépendantes. En s'inspirant d'une étude plus ou moins correcte de Sobolev et Christianovitch relative à une seule équation, elle montre l'existence de formules intégrales qui peuvent être considérées comme des généralisations de classiques formules de Kirchoff. Ces formules expriment les valeurs des fonctions inconnues en un point M_0 de D à partir de leurs valeurs sur la surface du conoïde caractéristique de sommet M_0 et des données de Cauchy dans la région de S intérieure au conoïde caractéristique. Ces formules sont le principal instrument de M^me Fourès.

Dans le cas non linéaire (4.1), en dérivant quatre fois les équations E_S, on obtient un système d'équations aux dérivées partielles du type (4.2), où les u_s sont les dérivées quatrièmes de W_S. On applique à ces équations les résultats de l'étude antérieure. En adjoignant aux équations intégrales valables pour les solutions de (4.2), les équations intégrales qui relient W_S et ses dérivées, on obtient un système d'équations intégrales dont la résolution directe présente malheureusement de grandes difficultés. L'un des intégrants figurant dans les formules de Kirchoff peut bien être borné au voisinage du sommet du cône si les $A^{\alpha\beta}$ relatifs aux u_s sont considérés comme des fonctions données des coordonnées, suffisamment différentiables, mais non lorsque ces coefficients sont fonctions des W_S, considérés comme indépendants.

Il est alors nécessaire de commencer par l'étude d'un cas intermédiaire, celui des équations

$$(4.3) \qquad E_S^{(1)} \equiv A_{(1)}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}W_S + f_S = 0,$$

où les $A_{(1)}^{\alpha\beta}$ sont des fonctions données des x^α, les f_S satisfaisant aux hypothèses du cas général (4.1). Dans ce cas, il est possible d'étudier le système d'équations intégrales associé (I^1) au moyen d'un théorème de point fixe et d'établir ensuite que la solution trouvée de $I^{(1)}$ est bien solution du problème de Cauchy envisagé pour $(E_S^{(1)})$; on utilise à cet effet le procédé classique de l'approximation par des fonctions analytiques.

On passe ensuite de (4.3) au cas général, en utilisant les équations (4.3) comme équations d'approximation pour (4.1). Si l'on substitue dans les $A^{\alpha\beta}$ aux W_S des fonctions $W_S^{(1)}$, dérivables jusqu'à l'ordre 4 avec conditions de Lipschitz, on obtient comme solution du système $(E_S^{(1)})$ des fonctions $W_S^{(2)}$, satisfaisant aux mêmes hypothèses et qui servent à construire un nouveau système $E_S^{(2)}$. On établit que les approximations successives ainsi construites convergent vers la solution cherchée du problème de Cauchy pour (4.1).

5. **Les coordonnées isothermes.** — Proposons-nous maintenant d'appliquer les résultats précédents à l'intégration du système des équations d'Einstein. A cet effet, nous introduirons un très intéressant système de coordonnées lié à la métrique; ce sont les coordonnées *isothermes* dont l'introduction est due à M. de Donder, mais dont la théorie complète est due à M. Georges Darmois qui en a montré toute l'importance dès 1926. Les présents résultats confirment entièrement les vues de M. Darmois.

L'idée consiste à associer au système des équations d'Einstein une équation à une seule fonction inconnue f qui admette les mêmes variétés caractéristiques que le système d'Einstein. La manière la plus simple d'y parvenir est certainement de considérer l'équation de Laplace-Beltrani sur V_4 :

$$\Delta_2 f \equiv g^{\lambda\mu}(\partial_{\lambda\mu} f - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\partial_\rho f) = 0 \tag{5.1}$$

qui généralise dans l'espace-temps la classique équation des ondes. L'équation (5.1) admet les mêmes caractéristiques et bicaractéristiques que le système des équations d'Einstein.

Nous dirons qu'un système (x^ρ) de coordonnées locales dans V_4 est *isotherme lorsque les quantités*

$$F^\rho = \Delta_2 x^\rho = -g^{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \tag{5.2}$$

sont nulles pour $\rho = 1, 2, 3, 4$. On montre aisément qu'étant donné une hypersurface S orientée dans l'espace, elle peut toujours être envisagée comme variété coordonnée dans un système de coordonnées isothermes.

Cela posé, les quantités F^ρ interviennent d'une manière simple dans les expressions des composantes du tenseur de Ricci. Par un calcul local, on établit, en effet, qu'identiquement

$$R_{\alpha\beta} \equiv -G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta}, \tag{5.3}$$

où l'on a posé

$$G_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \tag{5.4}$$

et

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}\partial_\beta F^\mu + g_{\beta\mu}\partial_\alpha F^\mu), \tag{5.5}$$

les $H_{\alpha\beta}$ désignant des polynomes par rapport aux $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ et à leurs dérivées premières. C'est la structure des $R_{\alpha\beta}$ ainsi mise en évidence par l'introduction des quantités $F^\rho = \Delta_2 x^\rho$ qui va être exploitée ici.

6. **Le théorème d'existence pour les équations d'Einstein.** — Considérons donc dans V_4, une hypersurface S portant les données de Cauchy, que nous supposerons orientée dans l'espace et définie par l'équation $x^4 = 0$. D'après notre analyse antérieure, nous devons supposer que sur S les données de Cauchy satisfont aux quatre conditions nécessaires

$$(S^4_\lambda)_{x^4=0} = 0. \tag{6.1}$$

De plus, comme nous nous proposons d'utiliser des coordonnées isothermes relativement à la métrique cherchée, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que sur S ces données satisfont aussi aux quatre conditions portant sur les potentiels et leurs dérivées premières

$$(F^\mu)_{x^4=0} = 0. \tag{6.2}$$

Nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité du problème de Cauchy pour le système des équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} \equiv - G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.3}$$

Nous rappelons que ces équations ne sont pas indépendantes, mais sont liées par les conditions de conservation; ces équations, valables pour tout ds^2, sont des identités conséquences des identités de Bianchi

$$\nabla_\lambda S^\lambda{}_\alpha = 0. \tag{6.4}$$

Les différents stades du raisonnement seront alors les suivants :

1° *Résolution du problème de Cauchy pour le système d'équations* $G_{\alpha\beta} = 0$. — Ce système est du type général étudié par Mme Fourès. Il suffit donc de faire, sur les données de Cauchy, les hypothèses suivantes, dans un domaine D_0 homéomorphe à la boule à trois dimensions de l'hypersurface S.

a. Les données de Cauchy $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_4 g_{\alpha\beta}$ admettent des dérivées partielles jusqu'aux ordres 5 et 4 continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz;

b. Les données de Cauchy sont telles que la forme $g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ soit de type hyperbolique normal avec les conditions $g^{44} > 0$ et $g^{ij} X_i X_j$ définie négative.

Sous ces conditions, le problème de Cauchy relatif aux équations $G_{\alpha\beta} = 0$ admet une solution unique au voisinage de D_0, solution qui admet des dérivées partielles continues, bornées jusqu'au quatrième ordre.

2° *La solution trouvée du système* $G_{\alpha\beta} = 0$ *vérifie les conditions d'isothermie au voisinage de* D_0.

En effet, il résulte des conditions (6.1) et (6.2) que pour toute solution de $G_{\alpha\beta} = 0$, on a

$$(6.5) \qquad (\partial_4 F^{\mu})_{x^4=0} = 0.$$

D'autre part, une solution du système $G_{\alpha\beta} = 0$ vérifie les quatre équations déduites des identités de conservation (6.4). Un calcul local montre que pour une telle solution, on a

$$(6.6) \qquad g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}F^{\mu} + P^{\mu}(\partial_{\alpha}F^{\rho}) = 0,$$

où P^{μ} est linéaire par rapport aux $\partial_{\alpha}F^{\rho}$, les coefficients étant des polynomes par rapport aux $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ et à leurs dérivées premières. Nous retrouvons donc un système du type étudié et pour ce système le problème de Cauchy correspondant à des données toutes nulles. De l'unicité du problème de Cauchy il résulte $F^{\mu} = 0$ pour la solution envisagée.

Ainsi la solution trouvée des équations $G_{\alpha\beta} = 0$ satisfait aussi à $L_{\alpha\beta} = 0$ et, par suite, n'est autre qu'une solution des équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$, compatible avec les données de Cauchy et rapportée à des coordonnées isothermes. Nous avons ainsi obtenu un *théorème d'existence* pour les équations d'Einstein dans le cas non analytique.

7. Unicité pour le système des équations d'Einstein. — Il est clair que l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour le système d'Einstein doit être entendue dans un sens tout à fait différent de l'unicité usuelle, celle qui intervient pour les systèmes de M^me Fourès et qui joue ici, par exemple, pour le système $G_{\alpha\beta} = 0$. Nous entendons ici l'unicité *modulo un changement de coordonnées concervant* S *point par point ainsi que les données de Cauchy sur* S. En ce sens, il est permis de parler d'*unicité géométrique* ou « physique » si l'on préfère.

Pour établir cette unicité géométrique, il faut montrer que toute solution du problème de Cauchy relatif aux équations $R_{\alpha\beta} = 0$ peut se déduire, par un changement de coordonnées satisfaisant aux hypothèses précisées, de la solution unique du problème de Cauchy relatif aux équations $G_{\alpha\beta} = 0$. On établit à cet effet qu'il existe un changement de coordonnées, satisfaisant aux hypothèses présentes, et après lequel potentiels et coordonnées satisfont aux conditions d'isothermie. L'existence de ce changement de coordonnées fait encore intervenir un système du type de M^me Fourès.

Ce « théorème d'unicité » avait déjà été établi par Stellmacher au moyen d'une méthode beaucoup plus lourde inspirée par les travaux de Friedrichs et Hans Lewy. Cette méthode ne suggérait d'ailleurs aucune solution pour le problème beaucoup plus difficile de l'existence des solutions [2].

---

[2] A noter qu'il serait aussi intéressant pour la construction de modèles d'univers d'étudier l'existence de solution du problème de Cauchy dans le cas ou S est orientée dans le temps. Cet aspect du problème ne semble pas encore avoir été abordé. Il devrait être relié avec le problème des conditions initiales pour S orientée dans l'espace.

III. — Le problème des conditions initiales.

8. **Position du problème.** — L'hypersurface iniale S étant rapportée à un système de coordonnées tel que son équation soit $x^4 = 0$, le problème des conditions initiales consiste, comme nous l'avons vu, à chercher des données de Cauchy satisfaisant sur S au système

$$S^4_\lambda = 0. \tag{8.1}$$

C'est là un problème fondamental pour la construction de modèles d'univers, mais il se révèle comme particulièrement ardu. Il demeure encore peu abordé. Le seul résultat partiel obtenu concerne le cas où l'hypersurface S est supposée *minima* dans la métrique cherchée. Nous allons montrer comment on peut, dans ce cas, *réduire* le problème des conditions initiales. Comme tout espace-temps admet au moins localement des variétés minima, les résultats obtenus peuvent nous donner quelque idée de ce qu'on pourrait appeler le degré de généralité d'un ds^2 extérieur. M^me^ Fourès a aussi obtenu quelques résultats partiels dans cette voie.

La méthode d'intégration sur laquelle je vais donner quelques indications présente un intérêt certain dans le cas de ds^2 intérieurs ; les équations sont alors les mêmes, mais avec second membre. Un théorème que j'ai établi autrefois affirme que pour le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait soit le mouvement d'un fluide incompressible, il faut et il suffit que les hypersurfaces dont les lignes de courant sont les trajectoires orthogonales, soient *des variétés minima du* ds^2. En l'absence de solides, on s'adresse souvent à de tels fluides pour représenter en première approximation l'état de la matière en mouvement. J'ai utilisé cette méthode pour obtenir des exemples de conditions initiales donnant un modèle d'univers à n masses.

9. **Les équations dans le cas d'un système orthogonal de coordonnées.** — Sans nuire à la généralité, nous pouvons toujours supposer que V_4 a été rapporté localement à un système orthogonal de coordonnées c'est-à-dire à un système de coordonnées tel que les lignes le long desquelles x^4 varie seul soient les trajectoires orthogonales des surfaces $x^4 =$ const. La métrique de V_4 prend alors la forme

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

où l'élément linéaire

$$\overline{ds}^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

est défini négatif. Introduisons le tenseur d'espace défini par

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2V}\partial_4 g_{ij}, \qquad \Omega^j_i = g^{jk}\Omega_{ik}, \qquad \Omega^{ij} = g^{ih} g^{jk}\Omega_{hk}.$$

Le carré du tenseur Ω^j_i est

$$H^2 = \Omega^j_i \Omega^i_j$$

et sa trace

$$K = \Omega^i_i.$$

Avec ces notations, le système des conditions initiales prend la forme

$$\text{(9.1)} \qquad \mathrm{VS}^{4i} \equiv \nabla_j(\Omega^{ij} - g^{ij}\mathrm{K}) = 0,$$

$$\text{(9.2)} \qquad \mathrm{S}_4^4 \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{K}^2 - \mathrm{H}^2 - \overline{\mathrm{R}}\right) = 0,$$

où $\overline{\mathrm{R}}$ est la courbure riemannienne scalaire de $\overline{ds^2}$.

Soit alors S une surface $x^4 = 0$. Avec les notations précédentes, le problème des conditions initiales se trouve ramené à la recherche de fonctions g_{ij}, Ω_{ij} des variables (x^i) qui satisfassent aux équations (9.1), (9.2); les fonctions V et $\partial_4 \mathrm{V}$ qui n'interviennent pas dans (9.1), (9.2) peuvent être choisies arbitrairement.

10. **Hypersurfaces minima.** — Un calcul simple de géométrie riemannienne montre que l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima s'écrit :

$$\text{(10.1)} \qquad (g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu})\,\partial_\lambda f\,\partial_\mu f\left(\partial_{\alpha\beta} f - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\,\partial_\rho f\right) = 0,$$

et il est facile de vérifier que pour toute hypersurface orientée dans l'espace, l'équation (10.1) est de type elliptique. On prendra pour S un morceau d'hypersurface, solution de cette équation et orientée dans l'espace et l'on rapportera le ds^2 de V_4 localement à un système orthogonal de coordonnées pour lequel S correspond à l'équation $x^4 = 0$. On établit aisément, par un calcul local, que dans ces conditions l'hypothèse que S est minima se traduit par la condition

$$\mathrm{K} = 0$$

sur l'hypersurface S.

11. **Le problème des conditions initiales sur une hypersurface minima.** — Dans les hypothèses faites, le problème des conditions initiales revient donc à chercher des fonctions g_{ij} et Ω^{ij} des trois variables d'espace (x^i) qui satisfassent au système de cinq équations

$$\text{(11.1)} \qquad \mathrm{K} = 0,$$

$$\text{(11.2)} \qquad \nabla_j(\Omega^{ij}) = 0,$$

$$\text{(11.3)} \qquad \overline{\mathrm{R}} = -\mathrm{H}^2.$$

A cet effet, donnons-nous arbitrairement sur S un élément linéaire tridimensionnel défini négatif

$$(ds^*)^2 = g^*_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

et cherchons si les g_{ij} peuvent être choisis de façon que $\overline{ds^2}$ soit conforme à $(ds^*)^2$. Nous poserons

$$g_{ij} = e^{2\theta} g^*_{ij},$$

θ désignant une fonction inconnue. Aux inconnues Ω^{ij}, nous substituerons les π^{ij} définis par

$$\Omega^{ij} = e^{-k\theta}\pi^{ij},$$

où k est une constante que nous déterminerons dans un instant.

Cherchons les équations transformées de (11.1), (11.2), (11.3). Pour (11.2), on obtient aisément, compte tenu de $K = 0$,

$$\nabla_j \Omega^{ij} = e^{-k\theta}[\nabla_j^* \pi^{ij} - (k-5)\pi^{ij}\partial_j\theta]$$

et nous choisirons $k = 5$ de façon que dans les équations transformées de (11.2) ne figure plus la fonction inconnue θ. On obtient ainsi le système transformé

$$g_{ij}^* \pi^{ij} = 0, \tag{11.4}$$

$$\nabla_j^*(\pi^{ij}) = 0, \tag{11.5}$$

$$-\Delta_2\theta - \frac{1}{2}\Delta_1^*\theta + \frac{1}{4}R^* = -\frac{1}{4}L^2 e^{-4\theta}, \tag{11.6}$$

où R^* est la courbure riemannienne scalaire de $(ds^*)^2$ et L^2 le carré du tenseur π^{ij} dans cette métrique. Notre problème se décompose donc en les deux problèmes suivants : intégration d'un système linéaire du premier ordre aux dérivées partielles avec la condition finie (11.4) pour la détermination des π^{ij}. Ensuite, intégration de l'équation elliptique non linéaire (11.6) par la détermination de la fonction scalaire θ.

Une autre forme de l'équation (11.6) peut être commode. Si l'on pose $\varphi^2 = e^\theta$, il vient

$$-8\Delta_2^*\varphi + R^*\varphi = -\frac{L^2}{\varphi^7}, \tag{11.7}$$

où Δ_2^* est le laplacien de φ dans la métrique $(ds^*)^2$.

Il est aisé d'établir pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation (11.6) un théorème d'unicité. Le théorème d'existence relatif à ce problème présente plus de difficultés et ne peut être établi, à ma connaissance, que pour un domaine suffisamment petit ou lorsque L^2 est suffisamment petit. Nous avons ainsi obtenu, dans ce cas intéressant, un moyen d'approche pour le problème des conditions initiales.

IV. — Problèmes globaux dans le cas stationnaire.

12. Le cas stationnaire. — Les théorèmes précédemment obtenus sont de nature locale. Pour donner des exemples de résultats essentiellement globaux, relatifs au système des équations d'Einstein, je me placerai, bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, dans le cas stationnaire. J'admettrai que la métrique de V_4 admet un groupe d'isométrie à un paramètre, à trajectoires orientées dans le temps, trajectoires qui seront appelées lignes de temps. La métrique peut alors localement être mise sous la forme

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^i)\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{12.1}$$

où la variable x^4 présente le caractère temporel et les (x^i) le caractère spatial.

Je supposerai, de plus, que V_4 est homéomorphe au produit topologique d'une variété à trois dimensions V_3 par une ligne L, la variété $V_3(x)$ issue du point x de V_4 pouvant être représentée par l'équation $x^4 = \text{const.}$ et la ligne $L(x)$ étant une ligne de temps le long de laquelle x^4 varie seul.

Ces hypothèses correspondent physiquement à un état de « régime permanent » pour le ds^2. Nous allons établir, dans le cas d'un ds^2 purement extérieur ou dans le cas du ds^2 d'un modèle d'univers satifaisant à ces hypothèses, un certain nombre de résultats de nature globale.

13. Les formules de divergence. — Dans le cas d'un ds^2 stationnaire, j'ai établi par des calculs locaux deux identités qui sont le principal instrument utilisé; h^i et k^i désignant deux vecteurs d'espace ne dépendant que des potentiels et de leurs dérivées premières, on a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(h^i\sqrt{-g}) = R_4^4, \tag{13.1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(k^i\sqrt{-g}) = \frac{R_{44}}{g_{44}} - \frac{M^2}{g_{44}}, \tag{13.2}$$

où la condition $M^2 = 0$ exprime que la congruence des lignes de temps $L(x)$ est une congruence de normales.

14. Cas où V_3 est une variété compacte. — Supposons la variété V_3 compacte et considérons un ds^2 extérieur supposé partout régulier sur V_3. L'équation (13.2) peut être mise sous la forme

$$-\frac{1}{2}g^{ij}\partial_{ij}U + C^i\partial_i U = -M^2, \tag{14.1}$$

où $U = g_{44}$. Sur V_3, la fonction U atteint effectivement son minimum. Cela n'est compatible avec l'existence d'une équation telle que (14.1) de type elliptique, à second membre négatif, que si $U = \text{const.}$ et $M^2 = 0$. Les lignes $L(x)$ forment ainsi une congruence de normales et l'on peut montrer qu'il est possible de prendre pour nouvelles sections d'espace les hypersurfaces dont les lignes de temps sont les trajectoires orthogonales, de telle sorte que

$$ds^2 = (dx^4)^2 + g_{ij}(x^k)\,dx^i dx^j.$$

La nullité du tenseur de Ricci de ds^2 entraîne alors la nullité du tenseur de Ricci de la métrique $\overline{ds}^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$ qui est, par suite, localement euclidienne. On en déduit un théorème analogue à un résultat classique de la théorie du potentiel.

Théorème. — *Si les sections d'espace sont compactes, tout ds^2 extérieur stationnaire partout régulier dans l'espace est localement euclidien.*

Un raisonnement analogue dû à Aufenkamp et utilisant l'identité (13.1) montre que, si les sections d'espace $V_3(x)$ sont compactes, il ne peut exister de modèle d'univers stationnaire en l'absence de constante cosmologique.

15. Cas où V_3 est homéomorphe à l'espace euclidien. — Supposons maintenant V_3 homéomorphe à l'espace euclidien à trois dimensions et supposons, de plus, que la métrique (12.1) régulière à l'infini, y admet un comportement asymptotique euclidien, les $g_{\alpha\beta}$ étant de la forme

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{r},$$

où les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont les coefficients d'une métrique euclidienne et r la distance géodésique spatiale à un point fixe O. Dans ces conditions, il est aisé de voir que les flux des deux vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{k}$ sont équivalents à l'infini. En comparant ces deux flux à grande distance, on obtient à partir de (13.1) et (13.2) et sous réserve de convergence

$$(15.1) \qquad \iiint_{V_3} \frac{g_{4i}}{g_{44}} R^i_4 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \iiint_{V_3} \frac{M^2}{g_{44}} \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Voici deux conséquences de cette formule intégrale :

1° Si le ds^2 considéré est extérieur et partout régulier, $R^i_4 = 0$ et le premier membre est nul. Il en résulte que les lignes de temps forment encore une congruence de normales et un raisonnement analogue à celui fait dans le cas des variétés compactes peut être fait. Le théorème énoncé précédemment sur les ds^2 extérieurs stationnaires partout réguliers s'étend ainsi au cas où V_3 est homéomorphe à l'espace euclidien.

De tels théorèmes ont été longtemps cherchés par Hilbert, Levi-Civita, Darmois, Einstein et récemment par Pauli. Leur importance est grande parce qu'ils permettent de fonder sur des bases solides les méthodes d'approximation couramment utilisées.

2° Si le ds^2 considéré est la métrique d'un modèle d'univers et si à l'intérieur des masses les lignes de courant sont confondues avec les lignes de temps, $u^i = 0$, et comme

$$R^i_4 = \chi\rho u_4 u^i,$$

on a, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la matière, $R^i_4 = 0$. Là encore les lignes de temps forment partout une congruence de normales. Autrement dit, le ds^2 de l'univers est partout « statique orthogonal ». Il en résulte, en particulier, que les postulats usuellement introduits pour la formation du modèle d'univers de Schwarzschild sont surabondants.

BIBLIOGRAPHIE.

Ne figurent ici que les travaux relativement récents sur l'intégration des équations d'Einstein.

I.

G. Darmois, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. Math.*, t. 25, 1927).

Lichnerowicz, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste* (*Actual. Scient. ind.*, n° 833, chap. I).

II.

Stellmacher, *Zum Anfangswerk problem der Gravitations gleichungen* (*Math. Annalen*, t. 115, 1937, p. 136-152).

M^me Yvonne Fourès, *Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées* *partielles non linéaires* [*Acta Math.* (sous presse); différentes Notes aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 230 et 231, 1950].

III.

LICHNEROWICZ, *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps* (*J. Math. pures et appl.*, t. 23, 1944, p. 37-62).

IV.

LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste* (*loc. cit.*, chap. II).

EINSTEIN et PAULI, *Ann. Math.*, t, 44, 1943, p. 135-145.

LICHNEROWICZ, *Sur le caractère euclidien d'espaces-temps extérieurs stationnaires partout réguliers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 432-434).

Mme FOURÈS et LICHNEROWICZ, *Sur un théorème global de réduction des ds^2 stationnaires d'Einstein* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 775-777).

Yves THIRY, *Sur la régularité des champs gravitationnels et électromagnétiques dans les théories unitaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1881-1882, et *Thèse* (*J. Math. pures et appl.*, t. 116, 1951, p. 275-295).

D. AUFENKAMP, *Sur l'impossibilité d'univers stationnaires clos* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 213-214).